EXERCICES – CHAPITRE 14

ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINÉAIRES

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Dans toute la feuille, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E, F, G désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Espaces vectoriels

EXERCICE 1 ⋆

Les lois suivantes munissent-elles l'ensemble considéré d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

(i) Sur $\mathbb{R}^2$: $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$ et $\lambda\cdot(x,y)=(\lambda x,0)$.

(ii) Sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$: $(x,y)+(x',y')=(xx',y+y')$ et $\lambda\cdot(x,y)=(x^\lambda,\lambda y)$.

EXERCICE 2 ⋆⋆

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Munir l'ensemble $]-1,1[^n$ d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On pourra transporter la structure de $\mathbb{R}^n$ à l'aide d'une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.

EXERCICE 3 ⋆

1. Le vecteur $(3,3,1)$ de $\mathbb{R}^3$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(1,2,0)$ et $(2,1,0)$? des vecteurs $(1,2,0)$ et $(1,1,1)$?
2. Pour quelles valeurs du réel m le vecteur $(3,1,m)$ est-il combinaison linéaire de $(1,3,2)$ et $(1,-1,4)$?
3. Le polynôme $16X^3-7X^2+21X-4$ est-il combinaison linéaire de $8X^3-5X^2+1$ et de X^2+7X-2 ?
4. La fonction $x\mapsto\cos(2x)$ est-elle combinaison linéaire des fonctions cos et sin ? et la fonction $x\mapsto\sin(2x)$?
5. Quelles suites réelles sont combinaisons linéaires des suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$?

EXERCICE 4 ⋆⋆

La fonction Arctan est-elle, dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, combinaison linéaire des fonctions $x\mapsto \mathrm{e}^{x^2}$, $x\mapsto \mathrm{e}^{-x}$ et sin ?

Sous-espaces vectoriels

EXERCICE 5 ⋆

Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

(i) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=y\}$;
(ii) $\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2 \mid x=y\}$;
(iii) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|=|y|\}$;
(iv) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geqslant y\}$;
(v) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$;
(vi) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=0\}$;
(vii) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y-z+1=0\}$;
(viii) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=2y=4z\}$;
(ix) $\{(x,2x,3x) \mid x\in\mathbb{R}\}$;
(x) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid xyz=0\}$.

EXERCICE 6 ⋆

Soit $n \geqslant 2$. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^n$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

(i) $\left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$;

(ii) $\left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}$;

(iii) $\left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} 2^i x_i = 0\right\}$;

(iv) l'ensemble des n-uplets ayant au plus une coordonnée non nulle ;

(v) $\mathbb{Z}^n$.

EXERCICE 7 ⋆⋆

Les parties suivantes de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

(i) les suites croissantes ;
(ii) les suites monotones ;
(iii) les suites bornées ;
(iv) les suites divergentes ;
(v) les suites convergeant vers 0 ;
(vi) les suites convergeant vers 1 ;
(vii) les suites stationnaires ;
(viii) les suites 12-périodiques ;
(ix) les suites périodiques ;
(x) les suites arithmétiques ;
(xi) les suites géométriques de raison 3.

EXERCICE 8 ⋆⋆

Les parties suivantes de $\mathbb{R}[X]$ ou de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ? Le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, l'entier n et les réels x_0, y_0 sont fixés.

(i) L'ensemble des polynômes de degré n ; l'ensemble des polynômes admettant 0 et 1 pour racines ; l'ensemble des polynômes admettant au moins deux racines.

(ii) L'ensemble $\{PQ \mid Q \in \mathbb{R}[X]\}$; l'ensemble des diviseurs de P.

(iii) L'ensemble des polynômes P tels que $P(X+2) = XP'(X-4)$.

(iv) L'ensemble des fonctions croissantes ; des fonctions monotones ; des fonctions qui s'écrivent comme la différence de deux fonctions croissantes.

(v) L'ensemble des fonctions dérivables f telles que $f(0) + f(1) = f'(0)$; des fonctions f telles que $f(x_0) = y_0$.

(vi) L'ensemble $\{x \mapsto A\cos(x+\varphi) \mid A, \varphi \in \mathbb{R}\}$; l'ensemble des fonctions ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.

EXERCICE 9 ⋆⋆

On pose $a = (-1, 2, 1)$, $b = (0, 1, -1)$, $u = (1, 0, -3)$ et $v = (-2, 5, 1)$, quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer un vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}(a, b)$.
2. Montrer que $\mathrm{Vect}(a, b) = \mathrm{Vect}(u, v)$.
3. Trouver trois réels α, β, γ non tous nuls tels que $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ pour tout $(x, y, z) \in \mathrm{Vect}(a, b)$.
4. Montrer que $\mathrm{Vect}(a, b) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha x + \beta y + \gamma z = 0\}$.

EXERCICE 10 ⋆⋆

Voici des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, donnés soit comme sous-espaces engendrés, soit par une ou deux équations. Pour chacun, donner une description de l'autre type.

(i) $\{(x,y,z) \mid x+2y-z=0\}$

(ii) $\{(x,y,z) \mid x+y+z=2x+y-z=0\}$

(iii) $\text{Vect}\big((1,2,-1),(2,3,-3)\big)$

(iv) $\text{Vect}\big((1,1,1),(1,-1,0)\big)$

(v) $\text{Vect}\big((1,2,-1)\big)$

(vi) $\{(x,y,z) \mid x-2z=x+3y-2z=0\}$

EXERCICE 11 ⋆⋆

1. Dans $\mathcal{F}([-1,1],\mathbb{R})$, montrer que le sous-espace
$$\text{Vect}\big(x \mapsto \cos(2x),\ \cos^2,\ \sin^2\big)$$
peut s'écrire $\text{Vect}(f,g)$ pour deux fonctions f et g bien choisies.
2. Soit A, B, C trois parties de E. Comparer $\text{Vect}(B\cup C)$ et $\text{Vect}(B)+\text{Vect}(C)$, puis $\text{Vect}(A)$ et $\text{Vect}(A\cup B)\cap\text{Vect}(A\cup C)$.

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. Déterminer le sous-espace de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par les fonctions positives.
2. Déterminer le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ engendré par les polynômes P tels que $P(x)\geqslant 0$ pour tout réel x.

EXERCICE 13 ⋆⋆⋆

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Déterminer $\text{Vect}(E\setminus F)$.

Familles de vecteurs

EXERCICE 14 ⋆

1. Montrer que $\big((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées de $(3,7,-2)$ dans cette base.
2. On pose $F=\text{Vect}\big((1,-1,1),(0,-1,2),(1,-2,3)\big)$. En donner une base, puis montrer que
$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{K}^3 \mid x+2y+z=0\}.$$
3. Donner une base de chacun des sous-espaces
$$\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \mid x-y+2z=0\} \qquad \text{et} \qquad \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid 3x-2y+z-2t=0 \text{ et } 2x+y=0\}.$$

EXERCICE 15 ⋆

1. Les familles $\big((1,2,3),(-1,4,6)\big)$ et $\big((1,2,-1),(1,0,1),(-1,2,-3)\big)$ de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ?
2. Soit $v_1=(1,1,0)$, $v_2=(4,1,4)$ et $v_3=(2,-1,4)$. Vérifier que les familles (v_1,v_2), (v_1,v_3) et (v_2,v_3) sont libres, mais que (v_1,v_2,v_3) est liée.
3. Soit (e_1,e_2,e_3,e_4) une famille libre de E. Les familles $(e_1,2e_2,e_3)$, $(e_1,2e_1+e_4,e_3+e_4)$ et $(2e_1+e_2,e_1-2e_2,e_4,7e_1-4e_2)$ sont-elles libres ?

EXERCICE 16 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E.

1. Montrer que la famille $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{n-1} + e_n)$ est libre.
2. Pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, on pose $v_k = e_1 + \cdots + e_k$. Montrer que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre, et que

$$\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n).$$

EXERCICE 17 ⋆⋆

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. On pose $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ et, pour $i \in [\![1\,;n]\!]$, $v_i = u + e_i$. Montrer que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est liée si et seulement si $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = -1$.

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. Montrer que les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que les fonctions cos, sin et exp sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Montrer que la famille $(\sin^n)_{n\geqslant 1}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

EXERCICE 19 ⋆⋆

Déterminer si les familles suivantes sont des bases de $\mathbb{K}_2[X]$ et, le cas échéant, donner les coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans cette base.

(i) $(1, X-1, (X-1)^2)$; (ii) $(X^2+X, X^2+1, X+1)$; (iii) $((X-1)^2, X^2, (X+1)^2)$.

EXERCICE 20 ⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in [\![0\,;n]\!]$, on pose $P_k = (X+1)^{k+1} - X^{k+1}$. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

EXERCICE 21 ⋆⋆

Construire une famille libre infinie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dont aucun élément n'est une suite nulle à partir d'un certain rang.

EXERCICE 22 ⋆⋆⋆

1. Montrer que la famille $(x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x})_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que la famille $(x \mapsto |x - \alpha|)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

EXERCICE 23 ⋆⋆⋆

1. Montrer que la famille $(\cos^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathrm{Vect}(\cos^n)_{n\in\mathbb{N}} = \mathrm{Vect}\big(x \mapsto \cos(nx)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que la famille $\big(x \mapsto \cos(nx)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

Soit $a \neq b$ deux nombres complexes et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\left((X-a)^k(X-b)^{n-k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

EXERCICE 25 ⋆⋆⋆

1. Soit $(x_1,\dots,x_p)$ une famille génératrice de E, et $J = \{j \in [\![1\,;p]\!] \mid x_j \notin \text{Vect}(x_1,\dots,x_{j-1})\}$. Montrer que $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.
2. En déduire une base du sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1,1,1)$, $(-2,-1,0)$, $(0,1,2)$ et $(-1,1,3)$.

Somme de sous-espaces

EXERCICE 26 ⋆

On pose $F = \text{Vect}\big((1,1,0),(0,1,1)\big)$ et $G = \text{Vect}\big((1,1,1)\big)$ dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer $F \cap G$ et $F+G$.

EXERCICE 27 ⋆

Dans $\mathbb{R}^4$, on pose

$$E = \{(x,y,z,t) \mid x-y+z-t=0\}, \qquad F = \text{Vect}\big((1,1,1,1)\big), \qquad G = \{(x,y,z,t) \mid x+z=y+t=0\}.$$

Montrer que $E = F \oplus G$.

EXERCICE 28 ⋆

Dans $\mathbb{R}^4$, montrer que $F = \{(x,y,z,t) \mid x+y+z+t=0\}$ et $G = \{(2a,-a,0,a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ sont supplémentaires.

EXERCICE 29 ⋆⋆

Montrer que $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(X^2) = X^2P(X)\}$ et $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2)\}$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}_3[X]$.

EXERCICE 30 ⋆⋆

1. Soit E l'espace des suites réelles convergentes. Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites de limite nulle sont deux sous-espaces supplémentaires dans E.
2. Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables en 0. Montrer que l'ensemble F des fonctions $f \in E$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$ et l'ensemble des fonctions affines sont deux sous-espaces supplémentaires de E. Généraliser.

EXERCICE 31 ⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $F = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et en trouver un supplémentaire.

EXERCICE 32 ⋆⋆

1. Soit F l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de période 1, et G l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de limite nulle en $+\infty$. Montrer que la somme $F+G$ est directe. Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
2. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, montrer que l'ensemble des suites nulles aux indices pairs et l'ensemble des suites telles que $u_{2n} = u_{2n+1}$ pour tout n sont supplémentaires.

EXERCICE 33 ⋆⋆

Soit $a_0, \dots, a_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et, pour $j \in [\![0\,;n]\!]$,

$$F_j = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid P(a_i) = 0 \text{ pour tout } i \neq j\}.$$

Montrer que $\mathbb{K}_n[X] = F_0 \oplus \cdots \oplus F_n$.

EXERCICE 34 ⋆⋆

Soit A, B, C trois sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $A \cap B = A + B$ si et seulement si $A = B$.
2. Montrer que $(A \cap B) + (A \cap C) \subset A \cap (B + C)$, et que l'inclusion peut être stricte.
3. Montrer que, si $B \subset A$, alors $(A \cap B) + (A \cap C) = A \cap (B + C)$.

EXERCICE 35 ⋆⋆

Soit F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E tels que $(F \cap G) \oplus H = G$. Montrer que la somme $F + H$ est directe et que $F + G = F \oplus H$.

Applications linéaires

EXERCICE 36 ⋆

Les applications suivantes sont-elles linéaires ? On ne demande pas de justifier les réponses positives évidentes, mais de démontrer les réponses négatives.

(i) $(x, y) \mapsto xy$, de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}$;
(ii) $(x, y) \mapsto (1 + x, 2x, y)$, de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}^3$;
(iii) $(x, y, z) \mapsto (x - 3z, 2x + y)$, de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^2$;
(iv) $x \mapsto |x|$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
(v) $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$, de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$;
(vi) $(x, y) \mapsto \min(x, y)$, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$;
(vii) $P \mapsto P(X^2)$, sur $\mathbb{K}[X]$;
(viii) $P \mapsto P^2$, sur $\mathbb{K}[X]$;
(ix) $P \mapsto (2X + 1)P' - 4P$, sur $\mathbb{R}[X]$;
(x) $f \mapsto f'' - 2f' + f$, de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;
(xi) $f \mapsto f^2 + 2f$, sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;
(xii) $f \mapsto \int_0^1 f(t)^2 \, \mathrm{d}t$, de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Même question pour $(u_n) \mapsto (u_{n+2} + u_{n+1} + u_n)$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et pour $g \mapsto g \circ g$ sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

EXERCICE 37 ⋆

Montrer que les applications suivantes sont linéaires, et déterminer leurs noyaux et leurs images.

(i) $(x, y) \mapsto (x + 2y, -2x - 4y)$, sur $\mathbb{R}^2$;
(ii) $(x, y, z) \mapsto (x, 2x - z, x - y + z)$, sur $\mathbb{R}^3$;
(iii) $(x, y, z) \mapsto (x - 2y, x + 2z)$, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$;
(iv) $(x, y) \mapsto (x - 2y, x + 2y)$, sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 38 ⋆

1. Soit $f : (x, y, z) \mapsto (x - y + z, 2x + y + 2z)$. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et l'image de f. L'application f est-elle injective ? surjective ?
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $g : (x, y, z) \mapsto (2y + z, x + z, -x + y + az)$. Montrer que $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, et déterminer les valeurs de a pour lesquelles g est un automorphisme. Pour $a = 1$, calculer g^{-1}. Lorsque g n'est pas bijective, donner une base de son noyau et une famille génératrice de son image.

EXERCICE 39 ⋆⋆

1. Soit $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 = 0\}$ et $\Delta : (u_n) \mapsto (u_{n+1} - u_n)$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et que Δ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Soit $a \in \mathbb{K}$. Montrer que $E_a = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(a) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, isomorphe à $\mathbb{K}[X]$.

EXERCICE 40 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 1$ et $\omega > 0$.

1. Montrer que $T_n : P \mapsto P'' + \omega^2 P$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En calculant $T_n(1), T_n(X), \ldots, T_n(X^n)$, montrer que T_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = x^n$ possède une unique solution polynomiale, dont on donnera le degré.

EXERCICE 41 ⋆⋆

On note $\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$, et Δ_n sa restriction à $\mathbb{R}_n[X]$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, et que Δ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} \Delta_n$ et $\operatorname{Im} \Delta_n$, puis $\operatorname{Ker} \Delta$ et $\operatorname{Im} \Delta$.
3. Montrer que $\Delta_n^{n+1} = 0$.
4. Trouver un sous-espace E de $\mathbb{R}[X]$ tel que Δ induise un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}[X]$.
5. En déduire que, pour tout $d \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme S_d tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^d = S_d(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 42 ⋆⋆

Montrer que $f : P \mapsto P(2X) - P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, et déterminer son noyau et son image.

EXERCICE 43 ⋆⋆

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $u(x, y, z) = (-\sqrt{2}\,x + z,\ \sqrt{2}\,y + z,\ x + y)$.

1. Donner une base de $\operatorname{Ker} u$, de $\operatorname{Ker}(u - 2\,\mathrm{id})$ et de $\operatorname{Ker}(u + 2\,\mathrm{id})$.
2. En déduire que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u - 2\,\mathrm{id}) \oplus \operatorname{Ker}(u + 2\,\mathrm{id})$.
3. Montrer que $F = \operatorname{Ker}(u - 2\,\mathrm{id}) \oplus \operatorname{Ker}(u + 2\,\mathrm{id})$ est stable par u, et que u induit un automorphisme de F.

EXERCICE 44 ⋆⋆

1. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$. Montrer que $f^n \circ g - g \circ f^n = n f^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, c'est-à-dire tel que $f^n = 0$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathrm{id}_E - f$ est un automorphisme de E, et donner une expression de son inverse.

EXERCICE 45 ⋆⋆

1. Soit f, $g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

EXERCICE 46 ⋆⋆

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$, et que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(g \circ f)$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$.
2. Montrer que $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$, et que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$ si et seulement si $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g = F$.
3. Exprimer $\operatorname{Ker}(g \circ f)$ à l'aide de f et de $\operatorname{Ker} g$, et $\operatorname{Im}(g \circ f)$ à l'aide de g et de $\operatorname{Im} f$.

EXERCICE 47 ⋆⋆

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces de E. Montrer l'équivalence
$$f(E_1) \subset f(E_2) \iff E_1 + \operatorname{Ker} f \subset E_2 + \operatorname{Ker} f.$$
2. Soit E' un sous-espace de E et F' un sous-espace de F. Exprimer $f^{-1}(f(E'))$ à l'aide de E' et de $\operatorname{Ker} f$, puis $f(f^{-1}(F'))$ à l'aide de F' et de $\operatorname{Im} f$.

EXERCICE 48 ⋆⋆

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et S_1, S_2 deux sous-espaces de E. Montrer que $u(S_1+S_2) = u(S_1)+u(S_2)$. On suppose de plus u injective et la somme $S_1 + S_2$ directe : montrer que la somme $u(S_1) + u(S_2)$ est directe. Peut-on se passer de l'injectivité ?
2. Soit f, $g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$. Montrer que $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$.

EXERCICE 49 ⋆⋆

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ si et seulement si $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$.
2. Montrer que $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f = E$ si et seulement si $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$.
3. On suppose que $f^7 = f$. Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

EXERCICE 50 ⋆⋆⋆

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $h \in \mathcal{L}(E,G)$ tels que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} h$.

1. Montrer qu'il existe une unique application $g : \operatorname{Im} f \to G$ telle que $g \circ f = h$.
2. Montrer que g est linéaire.

EXERCICE 51 ⋆⋆⋆

Soit G et H deux sous-espaces supplémentaires de E, et $A = \{u \in \mathcal{L}(E,F) \mid G \subset \operatorname{Ker} u\}$. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$, isomorphe à $\mathcal{L}(H,F)$.

EXERCICE 52 ⋆⋆⋆

Caractérisation des homothéties. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, les vecteurs x et $u(x)$ soient colinéaires. Montrer que u est une homothétie.

Endomorphismes, projecteurs et symétries

EXERCICE 53 ⋆

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \{(x,y,z) \mid x+y-z=0\}$ et $G = \text{Vect}((1,1,3))$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Déterminer le projeté de $(2,2,3)$ sur F parallèlement à G, puis celui de $(1,-2,0)$ sur G parallèlement à F.
3. Donner l'expression de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

EXERCICE 54 ⋆

On pose $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+3z=0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0 \text{ et } 2x+z=0\}$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, et donner une base de chacun d'eux.
2. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G, et q le projecteur sur G parallèlement à F. Expliciter $p(x,y,z)$ et $q(x,y,z)$.

EXERCICE 55 ⋆

1. Soit $p : (x,y,z) \mapsto \frac{1}{3}(2x+y+z, x+2y-z, x-y+2z)$. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$, et déterminer ses éléments caractéristiques.
2. Soit $f : (x,y,z) \mapsto (x+2y, 4x-y, -2x+2y+3z)$. Calculer $f \circ f$, en déduire que $\frac{1}{3}f$ est une symétrie, dont on déterminera les éléments caractéristiques. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, et exprimer f^{-1} en fonction de f.

EXERCICE 56 ⋆⋆

Soit S_1 et S_2 deux sous-espaces supplémentaires de E. On note p_1 (resp. p_2) le projecteur sur S_1 parallèlement à S_2 (resp. sur S_2 parallèlement à S_1), et s_1 (resp. s_2) la symétrie par rapport à S_1 parallèlement à S_2 (resp. par rapport à S_2 parallèlement à S_1). Montrer les égalités

$$p_1 + p_2 = \text{id}_E, \qquad p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0, \qquad s_1 + s_2 = 0, \qquad s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1 = -\text{id}_E.$$

EXERCICE 57 ⋆⋆

Soit p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que, si p et q commutent, $p \circ q$ est un projecteur.
2. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
3. Montrer que dans ce cas $\text{Im}(p+q) = \text{Im}\, p \oplus \text{Im}\, q$ et $\text{Ker}\,(p+q) = \text{Ker}\, p \cap \text{Ker}\, q$.

EXERCICE 58 ⋆⋆

Soit $p, q \in \mathcal{L}(E)$ tels que $p+q = \text{id}_E$ et $p \circ q = 0$.

1. Montrer que p et q sont des projecteurs et que $q \circ p = 0$.
2. Montrer que $\text{Im}\, p = \text{Ker}\, q$ et $\text{Im}\, q = \text{Ker}\, p$.

EXERCICE 59 ⋆⋆

Soit f, $g \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que g est un projecteur et que $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$ sont stables par f. Montrer que f et g commutent.
2. Donner un contre-exemple lorsque g n'est pas un projecteur.

EXERCICE 60 ⋆⋆

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}_E$.

1. Montrer que f est un automorphisme de E.
2. On pose $F = \{x \in E \mid f(x) = \mathrm{i}x\}$ et $G = \{x \in E \mid f(x) = -\mathrm{i}x\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires de E.
3. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G, et $q = \mathrm{id}_E - p$. Montrer que $f = \mathrm{i}(p - q)$.

EXERCICE 61 ⋆⋆

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour $i \in [\![1\,;n]\!]$, on note p_i le projecteur sur $\operatorname{Vect}(e_i)$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(e_j)_{j\neq i}$. Montrer que $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$, que $p_i \circ p_i = p_i$, et que $p_1 + \cdots + p_n = \mathrm{id}_E$. Relier p_i à la i-ième forme coordonnée.

EXERCICE 62 ⋆⋆⋆

Lemme des noyaux, cas quadratique. Soit $\alpha \neq \beta$ deux scalaires et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) \circ (f - \beta\,\mathrm{id}_E) = 0.$$

1. Déterminer deux scalaires a et b tels que $a(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) + b(f - \beta\,\mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_E$.
2. En déduire que $E = \operatorname{Im}(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) + \operatorname{Im}(f - \beta\,\mathrm{id}_E)$.
3. Montrer que $\operatorname{Im}(f - \beta\,\mathrm{id}_E) \subset \operatorname{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{id}_E)$ et que $\operatorname{Im}(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) \subset \operatorname{Ker}(f - \beta\,\mathrm{id}_E)$.
4. En déduire que $E = \operatorname{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - \beta\,\mathrm{id}_E)$. Que retrouve-t-on pour $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ et pour $(\alpha, \beta) = (1, -1)$?

EXERCICE 63 ⋆⋆⋆

Soit p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que, si $p \circ q + q \circ p = 0$, alors $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. En déduire que $p - q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = q$.
3. On suppose maintenant $p \circ q = 0$, et l'on pose $r = p + q - q \circ p$. Montrer que r est un projecteur, que $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$ et que $\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

Formes linéaires et hyperplans

EXERCICE 64 ⋆

1. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) + P'(1) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$, et donner une droite supplémentaire de H.
2. Montrer que $H' = \{f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1)\}$ est un hyperplan de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, et que la droite engendrée par $x \mapsto x$ en est un supplémentaire.
3. Dans $\mathbb{R}^3$, les équations $x + 2y - 3z = 0$ et $-2x - 4y + 6z = 0$ définissent-elles le même plan ? Et $x + 2y - 3z = 0$ et $x - y = 0$?

EXERCICE 65 ⋆⋆

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi : f \mapsto \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $H = \operatorname{Ker}\varphi$ est un hyperplan de E, et que $E = H \oplus \mathbb{R}\,\mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1.
2. Expliciter le projecteur sur H parallèlement à $\mathbb{R}\,\mathbf{1}$.
3. Montrer que $\psi : f \mapsto f(0)$ est une forme linéaire non nulle, et que $\operatorname{Ker}\varphi \neq \operatorname{Ker}\psi$.

EXERCICE 66 ⋆⋆

Soit φ et ψ deux formes linéaires sur E telles que $\operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker}\psi$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda\varphi$. On distinguera le cas où φ est nulle.

Sous-espaces affines

EXERCICE 67 ⋆

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan affine $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y - z = 3$ et les droites affines

$$\mathcal{D}_1 = (1,1,0) + \mathbb{R}(1,0,1), \qquad \mathcal{D}_2 = \mathbb{R}(1,0,1), \qquad \mathcal{D}_3 = (0,1,0) + \mathbb{R}(1,1,1).$$

Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}$ avec chacune de ces droites, et interpréter les résultats en termes de directions.

EXERCICE 68 ⋆⋆

Résoudre les équations suivantes, en les écrivant sous la forme $u(x) = b$ avec u linéaire.

(i) $P(X+1) - P(X) = X^2$, d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.

(ii) $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'inconnue $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(iii) $y'' + y = x$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(iv) $P(0) = 1$, $P(1) = 0$ et $P(2) = 1$, d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.

EXERCICE 69 ⋆⋆

Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous-espaces affines de E, de directions F et G.

1. On suppose que $F \oplus G = E$. Montrer que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est un singleton.
2. On suppose seulement $F + G = E$. Montrer que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ n'est pas vide. Que dire de cette intersection ?

Exercices de synthèse

EXERCICE 70 ⋆⋆

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Les lettres F, G, H désignent des sous-espaces de E, et u, p des endomorphismes de E.

1. La réunion de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.
2. Si les familles (x, y), (y, z) et (x, z) sont libres, alors la famille (x, y, z) est libre.
3. Une famille qui contient une famille génératrice de E est génératrice de E.
4. Si $F \cap G = F \cap H = G \cap H = \{0\}$, alors la somme $F + G + H$ est directe.
5. Une application linéaire injective transforme toute famille libre en une famille libre.
6. Si $u \circ u = 0$, alors $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.
7. Si p est un projecteur, alors $\mathrm{id}_E - p$ est un projecteur.
8. Si $u \circ u = u$ et si u est injectif, alors $u = \mathrm{id}_E$.
9. L'ensemble des solutions d'une équation linéaire $u(x) = b$ est un sous-espace vectoriel de E.
10. Si u commute avec un projecteur p, alors $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont stables par u.

EXERCICE 71 ⋆⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n(X) + P_n(X+1) = 2X^n$.
2. Trouver une relation entre P'_{n+1} et P_n.
3. (a) Montrer que la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

   (b) Montrer que, pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, on a $Q(X+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Q^{(k)}(X)}{k!}$, la somme étant finie.

   (c) Donner la décomposition de $P_n(X+1)$ dans la base $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$.

EXERCICE 72 ⋆⋆⋆

Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. Pour $f \in \mathcal{L}(F, G)$, on pose

$$V_f = \{x + f(x) \mid x \in F\}.$$

1. Soit S un supplémentaire de G. Montrer que, pour tout $x \in F$, il existe un unique $y \in G$ tel que $x + y \in S$.
2. Montrer que les supplémentaires de G sont exactement les V_f, et que f est alors unique.
3. En déduire que tous les supplémentaires de G sont isomorphes.

EXERCICE 73 ⋆⋆⋆

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$ et $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}$. Montrer que $\operatorname{Ker}(u^i) \cap \operatorname{Ker}(v^j) = \{0\}$ pour tous i, $j \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 74 ⋆⋆⋆

Soit u et v deux symétries d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(u \circ v - v \circ u) = \operatorname{Ker}(u+v) \oplus \operatorname{Ker}(u-v)$.
2. Montrer que $\operatorname{Im}(u \circ v - v \circ u) = \operatorname{Im}(u+v) \cap \operatorname{Im}(u-v)$.

EXERCICE 75 ⋆⋆⋆

Théorème de Maschke. Soit G un sous-groupe fini du groupe $\mathrm{GL}(E)$, F un sous-espace de E stable par tous les éléments de G, et p un projecteur de E d'image F. On pose

$$\pi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \circ p \circ g.$$

1. Montrer que π est un projecteur d'image F, et que $\pi \circ h = h \circ \pi$ pour tout $h \in G$.
2. En déduire que F admet un supplémentaire stable par tous les éléments de G.

EXERCICE 76 ⋆⋆

Soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ définis par $f(P) = P'$ et $g(P) = P(0)$, la constante $P(0)$ étant vue comme un polynôme.

1. Déterminer $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Ker} g$, $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} g$.
2. Vérifier que $\mathbb{R}[X] = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$. Les deux sommes sont-elles directes ?

Le chapitre 15 montrera que, dans un espace de dimension finie, ces deux égalités entraînent que les deux sommes sont directes.

EXERCICE 77 ⋆⋆⋆

Lemme des noyaux à trois facteurs ; une récurrence et une équation différentielle d'ordre 3. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, a, b, c trois nombres complexes distincts et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$(f - a\,\mathrm{id}_E) \circ (f - b\,\mathrm{id}_E) \circ (f - c\,\mathrm{id}_E) = 0.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $E_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)$.

1. Montrer que les endomorphismes $f - a\,\mathrm{id}_E$, $f - b\,\mathrm{id}_E$ et $f - c\,\mathrm{id}_E$ commutent deux à deux, et que $(f - b\,\mathrm{id}_E) \circ (f - c\,\mathrm{id}_E) = f^2 - (b+c)f + bc\,\mathrm{id}_E$.
2. On pose
$$p_a = \frac{(f - b\,\mathrm{id}_E) \circ (f - c\,\mathrm{id}_E)}{(a-b)(a-c)},$$
et l'on définit de même p_b et p_c en permutant les rôles de a, b, c. À l'aide des polynômes de Lagrange associés aux points a, b, c (chapitre 13), montrer que $p_a + p_b + p_c = \mathrm{id}_E$.
3. Montrer que $\operatorname{Im} p_a \subset E_a$, que $p_a(x) = x$ pour tout $x \in E_a$, et que $p_a(x) = 0$ pour tout $x \in E_b \cup E_c$.
4. En déduire que $E = E_a \oplus E_b \oplus E_c$, et identifier p_a.
5. *Application aux suites.* Soit F l'ensemble des suites complexes u telles que $u_{n+3} = u_{n+1} + 6u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $T : u \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, que T induit un endomorphisme de F, et factoriser le polynôme $X^3 - X - 6$.
   (b) En déduire une base de F formée de suites géométriques.
   (c) Expliciter la suite de F telle que $u_0 = 3$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 2$.

6. *Application à une équation différentielle d'ordre* 3. Soit S l'ensemble des fonctions $y \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telles que $y''' - y'' + 2y = 0$.
   (a) Montrer que la dérivation $D : y \mapsto y'$ induit un endomorphisme de S.
   (b) En déduire une base de S formée de fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$.
   (c) Déterminer les solutions à valeurs réelles.

EXERCICE 78 ⋆⋆⋆

Moyennes glissantes. Soit F l'ensemble des suites réelles u telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+3} = \frac{u_n + u_{n+1} + u_{n+2}}{3}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui contient les suites constantes, et que l'application $u \mapsto (u_0, u_1, u_2)$ est un isomorphisme de F sur $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $u \in F$. Montrer que la suite $(u_n + 2u_{n+1} + 3u_{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. On note $\varphi(u)$ sa valeur : montrer que φ est une forme linéaire non nulle sur F.
3. Soit C la droite des suites constantes et $H = \operatorname{Ker}\varphi$. Montrer que $F = H \oplus C$, et expliciter le projeté d'une suite $u \in F$ sur C parallèlement à H.
4. Montrer que toute suite de H converge vers 0.
5. En déduire que toute suite $u \in F$ converge, et exprimer sa limite en fonction de u_0, u_1 et u_2. Quelle est la limite lorsque $(u_0, u_1, u_2) = (0, 0, 1)$?

EXERCICE 79 ⋆⋆⋆

La fonction identité est la somme de deux fonctions périodiques. Dans cet exercice, $\mathbb{R}$ est vu comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, pour l'addition des réels et la multiplication d'un réel par un rationnel. On admet que les définitions et les résultats du chapitre restent valables, avec les mêmes démonstrations, lorsque le corps des scalaires est $\mathbb{Q}$. On admet aussi, ce qui repose sur l'axiome du choix, qu'il existe une base $(e_i)_{i\in I}$ du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ dont 1 et $\sqrt{2}$ font partie : tout réel x s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire, à coefficients rationnels, d'un nombre fini des e_i. On note $\lambda(x) \in \mathbb{Q}$ le coefficient de $\sqrt{2}$ dans cette écriture.

1. Vérifier que la famille $(1, \sqrt{2})$ est libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$, et liée dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'application $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ est $\mathbb{Q}$-linéaire, et calculer $\lambda(1)$ et $\lambda(\sqrt{2})$.
3. On pose $g(x) = \sqrt{2}\,\lambda(x)$ et $h(x) = x - g(x)$ pour tout réel x. Montrer que g est 1-périodique et que h est $\sqrt{2}$-périodique. Conclure.
4. Montrer que g n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.
5. Montrer que la fonction $x \mapsto x$ n'est pas la somme de deux fonctions périodiques continues.

Les six derniers exercices sont des problèmes à traiter en autonomie : l'énoncé fixe le but, et c'est à vous de trouver le chemin.

EXERCICE 80 ⋆⋆⋆⋆

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ tel que tout vecteur non nul de E ait toutes ses coordonnées non nulles. Montrer qu'il existe $v \in E$ tel que $E = \mathrm{Vect}(v)$.

EXERCICE 81 ⋆⋆⋆⋆

Soit F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E tels que $F+H=G+H$, $F\cap H=G\cap H$ et $F\subset G$. Montrer que $F=G$. Montrer que la conclusion ne tient plus si l'on omet la troisième hypothèse.

EXERCICE 82 ⋆⋆⋆⋆

Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. À quelle condition la famille $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle liée ?

EXERCICE 83 ⋆⋆⋆⋆

Soit $D:P\mapsto P'$, endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Existe-t-il $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ tel que $f\circ f=D$?

EXERCICE 84 ⋆⋆⋆⋆

Soit $\varphi:\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{R}$ une forme linéaire telle que, pour toute suite u, le réel $\varphi(u)$ soit l'un des termes de u. Montrer qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\varphi(u)=u_n$ pour toute suite u.

EXERCICE 85 ⋆⋆⋆⋆

Pseudo-inverse. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. On dit que $g\in\mathcal{L}(E)$ est un pseudo-inverse de f si $f\circ g=g\circ f$, $f\circ g\circ f=f$ et $g\circ f\circ g=g$. Montrer que f admet au plus un pseudo-inverse, et qu'il en admet un si et seulement si $E=\operatorname{Ker}f\oplus\operatorname{Im}f$, ou encore si et seulement si $\operatorname{Ker}f=\operatorname{Ker}f^2$ et $\operatorname{Im}f=\operatorname{Im}f^2$. Déterminer le pseudo-inverse d'un automorphisme, puis celui d'un projecteur.