# CORRIGÉ – CHAPITRE 15

## DIMENSION FINIE ET RANG

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Les renvois « proposition $n$ », « théorème $n$ » désignent les énoncés du chapitre 15 du cours ; ceux du chapitre 14 sont précisés.

### Espaces de dimension finie

#### EXERCICE 1 ⋆

**1.** Dans $\mathbb{R}^2$, de dimension 2, deux vecteurs forment une base si et seulement s'ils ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire si $1\times 3 - t\times t \neq 0$. Dans $\mathbb{R}^3$, on résout $a(1,0,t)+b(1,1,t)+c(t,0,1)=0$ : la deuxième coordonnée donne $b=0$, puis $a+ct=0$ et $at+c=0$, d'où $c(1-t^2)=0$. La famille est libre, donc une base (théorème 4), si et seulement si $t^2\neq 1$.

$$\boxed{\text{base de } \mathbb{R}^2 \iff t\neq \pm\sqrt{3}, \qquad \text{base de } \mathbb{R}^3 \iff t\neq \pm 1}$$

**2.** Si $au_1+bu_2+cu_3=0$, alors $b+c=a+c=a+b=0$, donc $a=b=c=0$ : trois vecteurs libres de $\mathbb{R}^3$ forment une base. On cherche $(1,1,1)=au_1+bu_2+cu_3$ : $b+c=a+c=a+b=1$, d'où $a+b+c=\dfrac{3}{2}$, puis $a=b=c=\dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{(1,1,1)=\frac{1}{2}(u_1+u_2+u_3)}$$

#### EXERCICE 2 ⋆

**(i)** Les vecteurs $u$, $v$, $w$ sont libres : si $au+bv+cw=0$, les deux premières coordonnées donnent $a+c=0$ et $b+2c=0$, puis la troisième $2a+2b=0$, soit $-2c-4c=0$, donc $c=0$ et $a=b=0$. On essaie d'ajouter $e_2$ : si $au+bv+cw+de_2=0$, les première, troisième et quatrième coordonnées donnent $a+c=0$, $2a+2b=0$, $3a+3b+3c=0$, d'où $c=0$, $a=0$, $b=0$, puis $d=0$.

$$\boxed{(u,v,w,e_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}^4}$$

**(ii)** Les vecteurs $u$ et $v$ ne sont pas colinéaires. On vérifie de même que $(u,v,e_1,e_2)$ est libre : les troisième et quatrième coordonnées de $au+bv+ce_1+de_2$ sont $a+b$ et $-a+b$, d'où $a=b=0$, puis $c=d=0$.

$$\boxed{(u,v,e_1,e_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}^4}$$

*À retenir.* Quatre vecteurs libres dans un espace de dimension 4 forment une base : on n'a pas à vérifier qu'ils engendrent $\mathbb{R}^4$.

#### EXERCICE 3 ⋆

Pour $E$, la méthode du pivot montre que les quatre vecteurs sont libres, une relation $\sum \lambda_k x_k = 0$ n'ayant que la solution nulle. Quatre vecteurs libres de $\mathbb{R}^4$ forment une base, donc $E=\mathbb{R}^4$. Pour $F$, la seconde équation donne $z=\dfrac{3y+t}{2}$, puis la première $x=\dfrac{2y+z-2t}{3}=\dfrac{7y-3t}{6}$ ; avec $y=6$, $t=0$ puis $y=0$, $t=6$, on obtient deux vecteurs non colinéaires, et $\dim F = 4-2=2$ par la proposition 9, les deux équations n'étant pas proportionnelles.

$$\boxed{E=\mathbb{R}^4,\ \dim E=4 \qquad F=\text{Vect}\big((7,6,9,0),(-3,0,3,6)\big),\ \dim F=2}$$

## EXERCICE 4 ⋆

**1.** On a $P(1) = 0$, $P'(1) = 4+6-4-6 = 0$ et $P''(1) = 12+12-4 = 20 \neq 0$ : 1 est racine double. La division par $(X-1)^2$ donne le quotient $X^2+4X+5$, de discriminant $-4 < 0$.

$$\boxed{P = (X-1)^2(X^2+4X+5)}$$

**2.** La famille est à degrés échelonnés, donc une base (proposition 10 du chapitre 14). La formule de Taylor en 1 donne les coordonnées $\dfrac{P^{(k)}(1)}{k!}$, soit 0, 0, 10, $\dfrac{P'''(1)}{6} = \dfrac{24+12}{6} = 6$ et 1.

$$\boxed{P = (X-1)^4 + 6(X-1)^3 + 10(X-1)^2}$$

## EXERCICE 5 ⋆⋆

**1.** Une famille génératrice de $n$ vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est une base (théorème 4), donc libre, et sa sous-famille $(e_2, \dots, e_n)$ aussi.

**2.** Si $\sum_k \lambda_k u_k = 0$, la $n$-ième coordonnée vaut $\lambda_n$, car seul $u_n$ a une $n$-ième coordonnée non nulle, égale à 1 ; donc $\lambda_n = 0$. La $(n-1)$-ième coordonnée vaut alors $\lambda_{n-1}$, et ainsi de suite : la famille est libre, donc une base, puisqu'elle a $n$ éléments.

$$\boxed{(u_1, \dots, u_n) \text{ est une base de } \mathbb{K}^n}$$

## EXERCICE 6 ⋆⋆

La famille a $n+1$ éléments, dans un espace de dimension $n+1$ : il suffit de montrer qu'elle est libre. Si $\sum \lambda_k B_k = 0$, l'évaluation en 0 donne $\lambda_0 = 0$, car $B_k(0) = 0$ pour $k \geqslant 1$. On divise alors par $X$ ; le polynôme $\sum_{k \geqslant 1} \lambda_k X^{k-1}(1-X)^{n-k}$ est nul, et son évaluation en 0 donne $\lambda_1 = 0$. Une récurrence conclut.

$$\boxed{(B_0, \dots, B_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$$

## EXERCICE 7 ⋆⋆

**1.** L'ensemble $F$ est le noyau de la forme linéaire non nulle $P \mapsto P(\alpha)$ : c'est un hyperplan, de dimension $n$ (théorème 12). Les $n$ polynômes $(X-\alpha)X^k$ appartiennent à $F$ et sont de degrés distincts, donc libres : c'est une base. En écrivant $(X-\alpha)^n = (X-\alpha)(X-\alpha)^{n-1}$ et en développant le second facteur par la formule du binôme :

$$\boxed{(X-\alpha)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-\alpha)^{n-1-k} (X-\alpha)X^k}$$

**2.** Un polynôme de $\mathbb{R}_4[X]$ s'annulant en $a$ et en $b$ s'écrit $(X-a)(X-b)Q$ avec $\deg Q \leqslant 2$, et réciproquement : l'application $Q \mapsto (X-a)(X-b)Q$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur ce sous-espace.

$$\boxed{\big((X-a)(X-b),\ X(X-a)(X-b),\ X^2(X-a)(X-b)\big)}$$

## EXERCICE 8 ⋆⋆

**1.** L'application $(u_n) \mapsto (u_0, u_1 - u_0)$ est un isomorphisme de l'espace des suites arithmétiques sur $\mathbb{C}^2$, puisqu'une suite arithmétique est déterminée par son premier terme et sa raison. Il est de dimension 2, de base $((1)_n, (n)_n)$, images réciproques de la base canonique.

**2.** Par la proposition 1 (iii) du cours, $R$ est de dimension 2. Les suites $(\rho^n)$ et $(\sigma^n)$ appartiennent à $R$, puisque $\rho^2 + \alpha\rho + \beta = 0$, et elles ne sont pas colinéaires, puisque leurs deux premiers termes $(1, \rho)$ et $(1, \sigma)$ ne le sont pas. Deux vecteurs libres d'un plan en forment une base.

$$\boxed{R = \mathrm{Vect}\big((\rho^n), (\sigma^n)\big)}$$

La dimension remplace le calcul : on n'a pas eu à montrer que toute solution est combinaison des deux suites.

## EXERCICE 9 ⋆⋆

**1.** L'application $u \mapsto (u_0, \dots, u_{T-1})$ est un isomorphisme de $P_T$ sur $\mathbb{C}^T$ : une suite $T$-périodique est déterminée par ses $T$ premiers termes, qui sont quelconques.

$$\boxed{\dim P_T = T}$$

**2.** Pour $\omega \in \mathbb{U}_T$, la suite $(\omega^n)$ est $T$-périodique. Montrons que des suites géométriques de raisons distinctes $\omega_1, \dots, \omega_m$ sont libres, par récurrence sur $m$. Si $\sum \lambda_k \omega_k^n = 0$ pour tout $n$, on écrit cette égalité au rang $n+1$ et l'on retranche $\omega_m$ fois l'égalité au rang $n$ : $\displaystyle\sum_{k<m} \lambda_k(\omega_k - \omega_m)\omega_k^n = 0$. L'hypothèse de récurrence donne $\lambda_k(\omega_k - \omega_m) = 0$, donc $\lambda_k = 0$ pour $k < m$, puis $\lambda_m = 0$. On obtient ainsi $T$ suites libres dans $P_T$, de dimension $T$.

$$\boxed{\big((\omega^n)_n\big)_{\omega \in \mathbb{U}_T} \text{ est une base de } P_T}$$

**3.** La suite nulle est périodique ; si $u$ est $T$-périodique et $v$ est $S$-périodique, $\lambda u + v$ est $TS$-périodique : $P$ est un sous-espace. La famille des $(\omega^n)$, $\omega$ parcourant l'ensemble des racines de l'unité, est libre par la question 2, et elle engendre $P$, puisque toute suite périodique appartient à un $P_T$.

$$\boxed{\text{Base de } P : \big((\omega^n)_n\big)_{\omega \in \bigcup_T \mathbb{U}_T}}$$

## EXERCICE 10 ⋆⋆

Une fonction de $E$ est déterminée par ses valeurs en $-1$, 0 et 1, qui sont quelconques : l'application $f \mapsto (f(-1), f(0), f(1))$ est un isomorphisme de $E$ sur $\mathbb{R}^3$, et $E$, qui est stable par combinaison linéaire, est un sous-espace de dimension 3. Les fonctions $f_1 : x \mapsto \max(-x, 0)$, $f_2 : x \mapsto \max(x, 0)$ et la constante 1 ont pour images $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ et $(1, 1, 1)$, qui forment une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{\dim E = 3, \qquad \text{base } (f_1, f_2, 1)}$$

## EXERCICE 11 ⋆⋆

**1.** L'application $P \mapsto \left(P(0), \dfrac{P - P(0)}{X}\right)$ est linéaire, de réciproque $(a, Q) \mapsto a + XQ$. Si $\mathbb{K}[X]$ était de dimension finie $d$, de base $(b_1, \dots, b_d)$, la famille $\big((1,0), (0, b_1), \dots, (0, b_d)\big)$ serait une base de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]$, de dimension $d+1$ ; or deux espaces isomorphes ont la même dimension (proposition 6), d'où $d = d + 1$, ce qui est absurde.

$$\boxed{\mathbb{K}[X] \simeq \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X], \text{ donc } \mathbb{K}[X] \text{ est de dimension infinie.}}$$

**2.** L'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ contient la famille libre infinie des fonctions $x \mapsto x^k$, $k \in \mathbb{N}$ : il est de dimension infinie, puisqu'un espace de dimension $n$ ne contient aucune famille libre de $n+1$ vecteurs (théorème 1).

### EXERCICE 12 ⋆⋆⋆

L'application $u \mapsto (u_0, \dots, u_{k-1})$ est un isomorphisme de $R$ sur $\mathbb{C}^k$ : une suite de $R$ est déterminée par ses $k$ premiers termes, choisis arbitrairement, la relation calculant les suivants. Donc $\dim R = k$. Pour chaque racine $\rho_i$, la suite $(\rho_i^n)$ appartient à $R$, puisque $\rho_i^n Q(\rho_i) = 0$. Ces $k$ suites géométriques de raisons distinctes sont libres (exercice 9), donc forment une base.

$$\boxed{\dim R = k, \qquad R = \mathrm{Vect}\big((\rho_1^n), \dots, (\rho_k^n)\big)}$$

### EXERCICE 13 ⋆⋆

**1.** Les vecteurs $x_i + y_i$ appartiennent à $V = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, qui contient donc une famille libre de $n$ vecteurs : $\dim V \geqslant n$ (théorème 1), c'est-à-dire $\mathrm{rg}(x_1, \dots, y_n) \geqslant n$ (proposition 2).

**2.** Notons $V_p = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. On a $V_p \subset V_q$, d'où la première inégalité. Par ailleurs, $V_q$ est la somme de $V_p$ et de $\mathrm{Vect}(u_{p+1}, \dots, u_q)$, et la proposition 5 donne

$$\dim V_q \leqslant \dim V_p + (q - p).$$

$$\boxed{0 \leqslant \mathrm{rg}(u_1, \dots, u_q) - \mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) \leqslant q - p}$$

### EXERCICE 14 ⋆⋆

Soit $V = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_n)$, de dimension $n$. La dérivation $f \mapsto f'$ est linéaire et surjective de $V$ sur l'espace $\mathrm{Vect}(f_1', \dots, f_n')$. Son noyau est formé des fonctions constantes de $V$, donc de dimension au plus 1. Le théorème du rang donne

$$\boxed{\mathrm{rg}(f_1', \dots, f_n') = n - \dim \mathrm{Ker} \ \geqslant n - 1}$$

L'égalité a lieu lorsque $V$ contient les constantes, par exemple pour $(1, x, x^2)$, dont les dérivées $(0, 1, 2x)$ sont de rang 2.

## Sous-espaces et dimension

### EXERCICE 15 ⋆

**1.** Pour $F$, on écrit $x = 2y - z$, ce qui donne $F = \mathrm{Vect}\big((2,1,0),(-1,0,1)\big)$. Pour $G$, on écrit $(a, a+b, b) = a(1,1,0) + b(0,1,1)$. Dans les deux cas, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

$$\boxed{F : \big((2,1,0),(-1,0,1)\big), \qquad G : \big((1,1,0),(0,1,1)\big)}$$

**2.** En retranchant les équations de $F$, on obtient $t = x$, puis $z = -x - y$, d'où

$$F = \mathrm{Vect}\big((1,0,-1,1),(0,1,-1,0)\big),$$

de dimension 2. Le vecteur $(1,1,1,1)$ n'appartient pas à $F$, puisque $1 + 1 + 1 \neq 0$ : $F \cap G = \{0\}$, et $F + G = F \oplus G$ est de dimension 3.

$$\boxed{F + G = \mathrm{Vect}\big((1,0,-1,1),(0,1,-1,0),(1,1,1,1)\big)}$$

## EXERCICE 16 ⋆

**(i)** On trouve $F = \text{Vect}\big((2,1,0),(-1,0,1)\big)$ et $G = \text{Vect}\big((1,2,0),(-1,0,1)\big)$. Le vecteur $(2,1,0)$ n'appartient pas à $G$, donc $F \neq G$ et $\dim(F \cap G) \leqslant 1$ (théorème 5) ; comme $(-1,0,1)$ vérifie les deux équations, $F \cap G$ est la droite qu'il engendre. Par Grassmann, $\dim(F+G) = 2+2-1 = 3$.

$$\boxed{F \cap G = \mathbb{R}(-1,0,1), \quad F+G = \mathbb{R}^3, \quad \text{non supplémentaires}}$$

**(ii)** On a $F = \text{Vect}\big((1,1,0),(2,0,1)\big)$. Les conditions $x = 2y$ et $2y = x+z$ donnent $z = 0$ et $x = 2y$ : $G = \mathbb{R}(2,1,0)$. Ce vecteur n'est pas dans $F$, puisque $2-1-0 \neq 0$, donc $F \cap G = \{0\}$, et les dimensions ont pour somme 3 (proposition 4).

$$\boxed{F \cap G = \{0\}, \quad \mathbb{R}^3 = F \oplus G}$$

**(iii)** On a $F = \mathbb{R}(1,1,1)$ et $G = \text{Vect}\big((1,1,0),(1,0,1)\big)$. Si $(a,a,a) = (b+c,b,c)$, alors $b = c = a$ et $a = 2a$, donc $a = 0$ : même conclusion.

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = F \oplus G}$$

## EXERCICE 17 ⋆

**1.** L'équation de $F$ donne $b = 2c - d$ : $F = \text{Vect}\big((1,0,0,0),(0,2,1,0),(0,-1,0,1)\big)$, de dimension 3. Pour $G$, $(d,2c,c,d) = c(0,2,1,0) + d(1,0,0,1)$ : $\dim G = 2$. Un vecteur de $G$ appartient à $F$ si et seulement si $2c-2c+d = 0$, soit $d = 0$. La formule de Grassmann donne $\dim(F+G) = 3+2-1 = 4$, donc $F+G = \mathbb{R}^4$.

$$\boxed{F \cap G = \mathbb{R}(0,2,1,0), \qquad F+G = \mathbb{R}^4}$$

**2.** Le sous-espace $F$ est un hyperplan, et $(2,-1,0,1) \notin F$, puisque la somme de ses coordonnées vaut 2 : $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$ (théorème 7 du chapitre 14). Pour décomposer $(1,2,3,4) = f + a(2,-1,0,1)$, la somme des coordonnées donne $10 = 0 + 2a$, donc $a = 5$.

$$\boxed{(1,2,3,4) = (-9,7,3,-1) + 5(2,-1,0,1)}$$

## EXERCICE 18 ⋆

**1.** Un polynôme $a + bX + cX^2 + dX^3$ vérifie $P(0) = P'(0) = 0$ si et seulement si $a = b = 0$.

$$\boxed{F = \text{Vect}(X^2, X^3), \qquad \mathbb{R}_3[X] = F \oplus \text{Vect}(1, X)}$$

**2.** Le vecteur $(t,t,1)$ n'est pas nul, donc $\dim D_t = 1$ ; les vecteurs $(1,t,1)$ et $(2,1,1)$ ne sont pas colinéaires, puisque leurs dernières coordonnées sont égales et les premières différentes : $\dim P_t = 2$. Par la proposition 4, $D_t \oplus P_t = \mathbb{R}^3$ si et seulement si les trois vecteurs sont libres. L'équation $\lambda(t,t,1) + \mu(1,t,1) + \nu(2,1,1) = 0$ conduit, par la méthode du pivot, à la condition $(t-1)^2\lambda = 0$.

$$\boxed{D_t \oplus P_t = \mathbb{R}^3 \iff t \neq 1}$$

Pour $t = 1$, on a $(1,1,1) \in P_1$, comme vecteur de la famille génératrice.

## EXERCICE 19 ⋆⋆

**1.** Ce sont les noyaux de $P \mapsto P(-X) - P(X)$ et de $P \mapsto P(-X) + P(X)$. Si $P$ est dans les deux, $P = -P$, donc $P = 0$.

**2.** Les familles $(1, X^2, \dots, X^{2n})$ et $(X, X^3, \dots, X^{2n-1})$ sont libres, à degrés distincts, et formées de $n+1$ et $n$ vecteurs de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{I}$.

**3.** La somme étant directe, $\dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{I} = \dim(\mathcal{P} \oplus \mathcal{I}) \leqslant \dim \mathbb{K}_{2n}[X] = 2n+1$. Avec la question 2, toutes les inégalités sont des égalités : $\dim \mathcal{P} = n+1$, $\dim \mathcal{I} = n$, les familles de la question 2 sont des bases (théorème 4), et $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$, de dimension $2n+1$, est égal à $\mathbb{K}_{2n}[X]$ (théorème 5).

$$\boxed{\mathbb{K}_{2n}[X] = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}, \quad \dim \mathcal{P} = n+1, \quad \dim \mathcal{I} = n}$$

## EXERCICE 20 ⋆⋆

**1.** On complète une base de $E$ en une base de $\mathbb{K}^n$ à l'aide de vecteurs de la base canonique (théorème 2 (iii)) ; les vecteurs ajoutés engendrent un supplémentaire de $E$ (démonstration du théorème 6).

**2.** La seconde équation donne $y = 2z - t$, la première $x = y + z - t = 3z - 2t$ ; le sous-espace a donc pour base la famille $((3,2,1,0),(-2,-1,0,1))$. Ajoutons $e_1$ et $e_2$ : une relation

$$a(3,2,1,0) + b(-2,-1,0,1) + ce_1 + de_2 = 0$$

donne $a = b = 0$ par les deux dernières coordonnées, puis $c = d = 0$.

$$\boxed{\text{un supplémentaire : } \mathrm{Vect}(e_1, e_2)}$$

## EXERCICE 21 ⋆⋆

**1.** Par la formule de Grassmann,

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F+G) \geqslant \dim F + \dim G - \dim E > 0.$$

**2.** En appliquant deux fois la même inégalité, avec $n = \dim E$,

$$\dim(F \cap G \cap H) \geqslant \dim(F \cap G) + \dim H - n \geqslant \dim F + \dim G + \dim H - 2n.$$

$$\boxed{\dim F + \dim G + \dim H > 2 \dim E \implies F \cap G \cap H \neq \{0\}}$$

## EXERCICE 22 ⋆⋆

**1.** Deux supplémentaires de $F$ ont la même dimension, $\dim E - \dim F$ (théorème 6), donc sont isomorphes (théorème 11).

**2.** Soit $T$ un supplémentaire de $F \oplus G$ dans $E$, et $\widehat{F} = F + T$. Alors $\widehat{F} + G = (F+G) + T = E$, et la proposition 3 donne $\dim \widehat{F} + \dim G = \dim F + \dim T + \dim G = \dim E$, la somme $F + G + T$ étant directe. Par la proposition 4, $\widehat{F} \oplus G = E$.

## EXERCICE 23 ⋆⋆⋆

▷ *Conditions nécessaires.* On a $\dim(F \cap G) \leqslant \min(p, q)$, et la formule de Grassmann donne

$$\dim(F \cap G) = p + q - \dim(F+G) \geqslant p + q - n.$$

▷ *Réalisation.* Soit $d$ un entier tel que $\max(0, p+q-n) \leqslant d \leqslant \min(p,q)$, et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$. On pose $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_{p-d+1}, \dots, e_{p-d+q})$, ce qui a un sens car $p - d + q \leqslant n$. Leur intersection est engendrée par les vecteurs communs, $e_{p-d+1}, \dots, e_p$, au nombre de $d$.

$$\boxed{\dim(F \cap G) \in [\![\max(0, p+q-n)\,;\min(p,q)]\!], \text{ et toutes ces valeurs sont atteintes.}}$$

## EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

**1.** *Initialisation.* Comme $e_1 \neq 0$, il s'écrit $e_1 = \sum a_i f_i$ avec un coefficient $a_{i_1} \neq 0$. Alors $f_{i_1}$ est combinaison de $e_1$ et des autres $f_i$, et la famille obtenue en remplaçant $f_{i_1}$ par $e_1$ engendre un sous-espace contenant tous les $f_i$ : elle est génératrice.

*Hérédité.* Supposons $\mathcal{P}(r)$, $r < n$, et notons $\mathcal{F}_r$ la famille génératrice obtenue. On écrit $e_{r+1}$ comme combinaison des vecteurs de $\mathcal{F}_r$. Si les coefficients des $f_i$ restants étaient tous nuls, $e_{r+1}$ serait combinaison de $e_1, \dots, e_r$, ce que la liberté interdit. Il existe donc un $f_{i_{r+1}}$ restant de coefficient non nul, et le même raisonnement montre que l'on peut le remplacer par $e_{r+1}$.

**2.** La propriété $\mathcal{P}(n)$ exige $n$ indices distincts parmi $m$ : donc $n \leqslant m$, ce qui est le théorème 1. On « échange » un à un les vecteurs de la famille génératrice contre ceux de la famille libre, sans perdre le caractère générateur : c'est la démonstration de Steinitz (1913).

## EXERCICE 25 ⋆⋆⋆

Si $S$ est un supplémentaire commun, $\dim F = \dim E - \dim S = \dim G$. Réciproquement, on raisonne par récurrence descendante sur $p = \dim F = \dim G$. Si $p = \dim E$, $F = G = E$ et $\{0\}$ convient. Sinon, $F$ et $G$ sont des sous-espaces stricts, et $F \cup G \neq E$ : sinon $F \cup G$ serait un sous-espace, donc égal à $F$ ou à $G$ (proposition 5 du chapitre 14), et l'un des deux serait $E$. Soit $x \notin F \cup G$. Les sous-espaces $F' = F \oplus \mathbb{K}x$ et $G' = G \oplus \mathbb{K}x$ ont la même dimension $p+1$ ; par hypothèse de récurrence, ils ont un supplémentaire commun $S'$, et $S = S' \oplus \mathbb{K}x$ est un supplémentaire commun de $F$ et de $G$, puisque $F \oplus \mathbb{K}x \oplus S' = E$.

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ ont un supplémentaire commun} \iff \dim F = \dim G}$$

# APPLICATIONS LINÉAIRES EN DIMENSION FINIE

## EXERCICE 26 ⋆

**1.** Les deux coordonnées de $f$ sont des combinaisons linéaires de $x$, $y$, $z$, $t$ : $f$ est linéaire. On a $f(x,y,z,t) = 0$ si et seulement si $x = z$ et $y = t$, soit $(x,y,x,y) = x(1,0,1,0) + y(0,1,0,1)$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1,0,1,0),(0,1,0,1)), \qquad \dim \operatorname{Ker} f = 2}$$

**2.** Par le théorème du rang, $\operatorname{rg} f = 4 - 2 = 2 = \dim \mathbb{K}^2$, donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}^2$ (théorème 5) : $f$ est surjective, sans qu'on ait eu à résoudre l'équation $f(x) = b$.

**3.** L'ensemble $G$ est défini par deux équations linéaires, donc est un sous-espace ; $G = \operatorname{Vect}(e_1, e_4)$ est de dimension 2. Si $(x,0,0,t) \in \operatorname{Ker} f$, alors $x = z = 0$ et $t = y = 0$ : $G \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$, et les dimensions ont pour somme 4.

$$\boxed{\mathbb{K}^4 = \operatorname{Ker} f \oplus G}$$

## EXERCICE 27 ⋆

**1.** L'application $\varphi : P \mapsto P - P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. Si $\varphi(P) = 0$ avec $P \neq 0$, les degrés de $P$ et de $P'$ diffèrent, donc $\deg(P - P') = \deg P$, ce qui est absurde : $\varphi$ est injectif, donc bijectif (théorème 10). Il existe un unique $P_n \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $P_n - P_n' = X^n$. Un polynôme $P$ de degré $d > n$ ne convient pas, puisque $\deg(P - P') = d$ : l'unicité vaut dans $\mathbb{K}[X]$. On vérifie enfin que

$$\boxed{P_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!} X^{n-j} = X^n + nX^{n-1} + n(n-1)X^{n-2} + \cdots + n!}$$

car $P_n'$ est la même somme privée de son premier terme.

**2.** L'application $\psi : P \mapsto P(X+1) + P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Si $P \neq 0$ a pour coefficient dominant $a$ et pour degré $d$, alors $\psi(P)$ a pour terme de degré $d$ le monôme $2aX^d \neq 0$ : $\psi$ est injectif, donc bijectif, puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie.

$$\boxed{\forall Q \in \mathbb{R}_n[X],\ \exists!\, P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(X+1) + P(X) = Q}$$

*À retenir.* En dimension finie, pour résoudre une équation linéaire $\varphi(P) = Q$ de façon unique, il suffit de vérifier l'injectivité, c'est-à-dire l'unicité pour $Q = 0$.

## EXERCICE 28 ⋆⋆

**1.** Les polynômes en $f$ commutent, et $(f^2 + f + \mathrm{id}) \circ (f - \mathrm{id}) = f^3 - \mathrm{id} = 0$ : tout vecteur de $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id})$ est annulé par $f^2 + f + \mathrm{id}$.

**2.** Soit $x \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}) \cap \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id})$. Alors $f(x) = x$, donc $f^2(x) = x$, et la question 1 donne $x + x + x = 0$, soit $x = 0$. Le théorème du rang appliqué à $f - \mathrm{id}$ donne

$$\dim \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}) + \dim \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}) = \dim E,$$

et la proposition 4 conclut.

$$\boxed{E = \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}_E)}$$

## EXERCICE 29 ⋆⋆

**1.** Si $E = \mathrm{Ker}\,u \oplus \mathrm{Im}\,u$, la restriction de $u$ à $\mathrm{Im}\,u$ est injective, d'où $\mathrm{Ker}\,u^2 = \mathrm{Ker}\,u$ ; et tout $x = k + u(y)$ a pour image $u(x) = u^2(y)$, d'où $\mathrm{Im}\,u^2 = \mathrm{Im}\,u$. Réciproquement, si $x \in \mathrm{Ker}\,u \cap \mathrm{Im}\,u$, $x = u(y)$ avec $u^2(y) = 0$, donc $y \in \mathrm{Ker}\,u$ et $x = 0$ ; et pour $x \in E$, on écrit $u(x) = u^2(y)$, puis $x = (x - u(y)) + u(y)$ avec $x - u(y) \in \mathrm{Ker}\,u$.

**2.** On a toujours $\mathrm{Im}\,u^2 \subset \mathrm{Im}\,u$ et $\mathrm{Ker}\,u \subset \mathrm{Ker}\,u^2$. Par le théorème du rang, $\mathrm{rg}u^2 = \mathrm{rg}u$ équivaut à $\dim \mathrm{Ker}\,u^2 = \dim \mathrm{Ker}\,u$ ; avec les inclusions et le théorème 5,

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,u^2 = \mathrm{Im}\,u &\iff \mathrm{rg}u^2 = \mathrm{rg}u \\ &\iff \dim \mathrm{Ker}\,u^2 = \dim \mathrm{Ker}\,u \iff \mathrm{Ker}\,u^2 = \mathrm{Ker}\,u. \end{aligned}$$

Chacune des deux égalités entraîne donc l'autre, et la question 1 donne leur équivalence avec la décomposition $E = \mathrm{Ker}\,u \oplus \mathrm{Im}\,u$.

**3.** Non. La dérivation $D$ de $\mathbb{K}[X]$ est surjective, donc $\mathrm{Im}\,D^2 = \mathrm{Im}\,D = \mathbb{K}[X]$ ; mais son noyau est $\mathrm{Ker}\,D = \mathbb{K}_0[X]$, alors que $\mathrm{Ker}\,D^2 = \mathbb{K}_1[X]$.

*Piège.* L'argument de la question 2 repose entièrement sur le théorème du rang ; en dimension infinie, il n'y a plus de lien entre la taille du noyau et celle de l'image.

## EXERCICE 30 ⋆⋆

**1.** Notons $n = \dim E$. Par la formule de Grassmann, les hypothèses donnent

$$\dim \mathrm{Ker}\,u + \dim \mathrm{Ker}\,v \geqslant n \qquad \text{et} \qquad \dim \mathrm{Im}\,u + \dim \mathrm{Im}\,v \geqslant n.$$

Or le théorème du rang, appliqué à $u$ et à $v$, montre que la somme de ces quatre dimensions vaut exactement $2n$. Les deux inégalités sont donc des égalités, et la formule de Grassmann donne $\dim(\mathrm{Ker}\,u \cap \mathrm{Ker}\,v) = 0$ et $\dim(\mathrm{Im}\,u \cap \mathrm{Im}\,v) = 0$.

$$\boxed{E = \mathrm{Ker}\,u \oplus \mathrm{Ker}\,v = \mathrm{Im}\,u \oplus \mathrm{Im}\,v}$$

**2.** Dans $E = \mathbb{K}[X]$, on prend $u = D$, la dérivation, et $v : P \mapsto P(0)$, à valeurs dans les constantes. On a $\mathrm{Ker}\,u = \mathbb{K}_0[X]$ et $\mathrm{Ker}\,v = X\mathbb{K}[X]$, de somme $E$ ; $\mathrm{Im}\,u = \mathbb{K}[X]$, donc $\mathrm{Im}\,u + \mathrm{Im}\,v = E$. Mais $\mathrm{Im}\,u \cap \mathrm{Im}\,v = \mathbb{K}_0[X] \neq \{0\}$ : la seconde somme n'est pas directe.

## EXERCICE 31 ⋆⋆

**1.** On applique le théorème du rang à la restriction $u_{|V} : V \to F$, dont le noyau est $V \cap \operatorname{Ker} u$ et l'image $u(V)$.

$$\boxed{\dim u(V) = \dim V - \dim(V \cap \operatorname{Ker} u)}$$

**2.** Le sous-espace $V = u^{-1}(W)$ contient $\operatorname{Ker} u$, puisque $0 \in W$. La restriction $u_{|V}$ a pour noyau $\operatorname{Ker} u$ et pour image $W \cap \operatorname{Im} u$ : un vecteur de $W$ est atteint si et seulement s'il est dans $\operatorname{Im} u$, et alors ses antécédents sont dans $V$. Le théorème du rang donne

$$\boxed{\dim u^{-1}(W) = \dim(W \cap \operatorname{Im} u) + \dim \operatorname{Ker} u}$$

## EXERCICE 32 ⋆⋆

**1.** On prend $E' = F$ et pour $\varphi$ l'injection canonique $x \mapsto x$ de $F$ dans $E$.

**2.** Soit $S$ un supplémentaire de $G$ (théorème 6). On prend $E'' = E$ et pour $\psi$ le projecteur sur $S$ parallèlement à $G$, dont le noyau est $G$.

**3.** Le théorème du rang impose $\dim F + \dim G = \dim E$. Réciproquement, si cette condition est remplie, un supplémentaire $S$ de $G$ a la même dimension que $F$ ; soit $\theta : S \to F$ un isomorphisme (théorème 11) et $p$ le projecteur sur $S$ parallèlement à $G$. Alors $u = \theta \circ p$ a pour noyau $\operatorname{Ker} p = G$, puisque $\theta$ est injectif, et pour image $\theta(S) = F$.

$$\boxed{\exists\, u \in \mathcal{L}(E),\ \operatorname{Im} u = F \text{ et } \operatorname{Ker} u = G \iff \dim F + \dim G = \dim E}$$

## EXERCICE 33 ⋆⋆

▷ *(i) ⇒ (ii).* Si $u^2 = 0$, alors $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$. Soit $p$ un projecteur d'image $\operatorname{Im} u$, par exemple le projecteur sur $\operatorname{Im} u$ parallèlement à un supplémentaire. Comme $p$ fixe les vecteurs de son image, $p \circ u = u$ ; et $u \circ p = 0$, puisque $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.

▷ *(ii) ⇒ (iii).* On a $p \circ u - u \circ p = u - 0 = u$.

▷ *(iii) ⇒ (i).* Composons $pu - up = u$ à gauche par $p$ : comme $p^2 = p$, on obtient $pu - pup = pu$, donc $pup = 0$. Composons-la à droite par $p$ : $pup - up = up$, donc $up = 0$, puis $pu = u$. Enfin

$$u^2 = u \circ (p \circ u) = (u \circ p) \circ u = 0.$$

## EXERCICE 34 ⋆⋆

**1.** On a $\operatorname{Ker}(a \circ b) = b^{-1}(\operatorname{Ker} a)$. L'exercice 31, question 2, donne

$$\dim \operatorname{Ker}(a \circ b) = \dim(\operatorname{Ker} a \cap \operatorname{Im} b) + \dim \operatorname{Ker} b \leqslant \dim \operatorname{Ker} a + \dim \operatorname{Ker} b.$$

**2.** On a $\operatorname{Im}(g \circ f) = g(\operatorname{Im} f)$, et l'exercice 31, question 1, appliqué à $g$ et à $V = \operatorname{Im} f$, donne la première égalité. Comme $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) \leqslant \dim \operatorname{Ker} g = \dim F - \operatorname{rg} g$, on en déduit

$$\boxed{\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) \geqslant \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim F}$$

C'est l'*inégalité de Sylvester* ; elle complète la majoration $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$ de la proposition 7.

**3.** Par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} a + \dim \operatorname{Ker} b = 2 \dim E - \operatorname{rg} a - \operatorname{rg} b > \dim E$, et l'exercice 21 donne $\operatorname{Ker} a \cap \operatorname{Ker} b \neq \{0\}$.

## EXERCICE 35 ⋆⋆

L'ensemble $A$ contient l'application nulle, et si $f$, $g$ s'annulent sur $G$, il en est de même de $\lambda f+g$ : $A$ est un sous-espace. Soit $H$ un supplémentaire de $G$. L'application $f \mapsto f_{|H}$ est un isomorphisme de $A$ sur $\mathcal{L}(H,F)$ (exercice 51 du chapitre 14) : une application linéaire nulle sur $G$ est déterminée par sa restriction à $H$, qui est quelconque. La proposition 8 donne

$$\boxed{\dim A = (\dim E - \dim G)\dim F}$$

## EXERCICE 36 ⋆⋆⋆

▷ *Conditions nécessaires.* La proposition 7 donne $\mathrm{rg}(g\circ f) \leqslant \min(r,s)$, et l'exercice 34 donne $\mathrm{rg}(g\circ f) \geqslant r+s-n$.

▷ *Réalisation.* Soit $k$ un entier tel que $\max(0,r+s-n) \leqslant k \leqslant \min(r,s)$, et $d = r-k$. L'inégalité $k \leqslant \min(r,s)$ s'écrit $d \geqslant \max(0,r-s)$, et l'inégalité $k \geqslant \max(0,r+s-n)$ s'écrit $d \leqslant \min(r,n-s)$ :

$$\max\big(0, r+(n-s)-n\big) \leqslant d \leqslant \min(r,n-s).$$

L'exercice 23 fournit deux sous-espaces $F_0$ et $G_0$, de dimensions $r$ et $n-s$, tels que $\dim(F_0\cap G_0) = d$. Par l'exercice 32, il existe $f$ d'image $F_0$, donc de rang $r$, et $g$ de noyau $G_0$, donc de rang $s$. L'exercice 34 donne alors $\mathrm{rg}(g\circ f) = r-d = k$.

$$\boxed{\{\mathrm{rg}(g\circ f)\} = [\![\max(0,r+s-n)\,;\min(r,s)]\!]}$$

## EXERCICE 37 ⋆⋆⋆

▷ *Sens réciproque.* Si $v = w\circ u$, tout vecteur annulé par $u$ l'est par $v$.

▷ *Sens direct.* La restriction de $u$ à $S$ est un isomorphisme de $S$ sur $\mathrm{Im}\,u$ (théorème 8) ; notons $\sigma$ sa réciproque. On définit $w\in\mathcal{L}(F,G)$ par $w = v\circ\sigma$ sur $\mathrm{Im}\,u$ et $w=0$ sur $T$, ce qui est licite puisque $F = \mathrm{Im}\,u \oplus T$ (proposition 19 du chapitre 14). Pour $x = k+s$, avec $k\in\mathrm{Ker}\,u$ et $s\in S$, on a $v(k)=0$ par hypothèse, donc

$$w(u(x)) = w(u(s)) = v(\sigma(u(s))) = v(s) = v(x).$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,u \subset \mathrm{Ker}\,v \iff \exists\, w\in\mathcal{L}(F,G),\ v = w\circ u}$$

*Idée.* La condition $\mathrm{Ker}\,u\subset\mathrm{Ker}\,v$ dit que $v(x)$ ne dépend que de $u(x)$ : la fonction $w$ « $u(x)\mapsto v(x)$ » est bien définie sur $\mathrm{Im}\,u$, et il reste à la prolonger.

## EXERCICE 38 ⋆⋆⋆

**1.** Le théorème du rang donne $\dim E = \dim\mathrm{Ker}\,f + \mathrm{rg}f = 2\mathrm{rg}f$.

**2.** *Sens direct.* L'égalité $\mathrm{Im}\,f = \mathrm{Ker}\,f$ entraîne $f^2 = 0$. Soit $S$ un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,f$ ; la restriction $f_{|S}$ est un isomorphisme de $S$ sur $\mathrm{Im}\,f = \mathrm{Ker}\,f$ (théorème 8), de réciproque $\sigma$. On définit $h$ par $h=\sigma$ sur $\mathrm{Ker}\,f$ et $h=0$ sur $S$. Pour $x\in S$, $h(f(x))+f(h(x)) = \sigma(f(x))+0 = x$ ; pour $x\in\mathrm{Ker}\,f$, $h(f(x))+f(h(x)) = 0+f(\sigma(x)) = x$. Les deux endomorphismes coïncident sur $\mathrm{Ker}\,f$ et sur $S$, donc $h\circ f + f\circ h = \mathrm{id}_E$.

*Sens réciproque.* L'égalité $f^2=0$ donne $\mathrm{Im}\,f\subset\mathrm{Ker}\,f$. Pour $x\in\mathrm{Ker}\,f$, on a $x = h(f(x))+f(h(x))$, soit $x = f(h(x))$, et $x\in\mathrm{Im}\,f$.

$$\boxed{\mathrm{Im}\,f = \mathrm{Ker}\,f \iff f^2 = 0 \text{ et } \exists\, h,\ h\circ f + f\circ h = \mathrm{id}_E}$$

## EXERCICE 39 ⋆⋆⋆

Soit $x \in E$ non nul, $H$ un supplémentaire de $\mathbb{K}x$ et $p$ le projecteur sur $\mathbb{K}x$ parallèlement à $H$. Comme $u$ commute avec $p$, l'image $\operatorname{Im} p = \mathbb{K}x$ est stable par $u$ (exercice 45 du chapitre 14) : $u(x)$ est colinéaire à $x$. Ceci valant pour tout $x$, l'exercice 52 du chapitre 14 montre que $u$ est une homothétie.

$$\boxed{u \text{ commute avec tout } v \in \mathcal{L}(E) \iff u = \lambda \operatorname{id}_E}$$

La réciproque est immédiate : une homothétie commute avec tout endomorphisme.

## EXERCICE 40 ⋆⋆⋆

**1.** Si $f^n(x) = 0$, alors $f^{n+1}(x) = f(0) = 0$ ; et $f^{n+1}(x) = f^n(f(x)) \in \operatorname{Im} f^n$.

**2.** La suite $(\dim \operatorname{Ker} f^n)$ est croissante, majorée par $\dim E$, et la suite $(\dim \operatorname{Im} f^n)$ est décroissante et positive ; ce sont des suites d'entiers, donc elles sont constantes à partir d'un certain rang. Leur somme vaut $\dim E$ (théorème du rang).

**3.** Soit $p$ le plus petit entier tel que $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$, qui existe par la question 2 et le théorème 5. Montrons que $\operatorname{Ker} f^{p+k} = \operatorname{Ker} f^{p+k+1}$ pour tout $k$ : si $f^{p+k+1}(x) = 0$, alors $f^k(x) \in \operatorname{Ker} f^{p+1} = \operatorname{Ker} f^p$, donc $f^{p+k}(x) = 0$. Par le théorème du rang et l'inclusion de la question 1, $\operatorname{Im} f^{n+1} = \operatorname{Im} f^n$ équivaut à $\operatorname{Ker} f^{n+1} = \operatorname{Ker} f^n$ : les deux suites se stabilisent exactement au même rang $p$.

**4.** L'exercice 34, appliqué à $f^n$ puis $f$, donne

$$d_n - d_{n+1} = \dim(\operatorname{Im} f^n \cap \operatorname{Ker} f).$$

Comme $\operatorname{Im} f^{n+1} \subset \operatorname{Im} f^n$, cette quantité décroît avec $n$, ce qui s'écrit $d_{n+1} - d_{n+2} \leqslant d_n - d_{n+1}$, soit

$$\boxed{d_{n+1} \leqslant \frac{d_n + d_{n+2}}{2}}$$

La suite des rangs est donc « convexe » : ses décroissances successives diminuent.

## EXERCICE 41 ⋆⋆⋆

Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une base de $E$.

**1.** Pour chaque $i$, il existe $p_i$ tel que $f^{p_i}(e_i) = 0$. Soit $q = \max_i p_i$ ; alors $f^q(e_i) = f^{q-p_i}(f^{p_i}(e_i)) = 0$ pour tout $i$, et $f^q$, nul sur une base, est nul.

**2.** Pour chaque $i$, il existe $p_i \geqslant 1$ tel que $f^{p_i}(e_i) = e_i$, donc $f^{kp_i}(e_i) = e_i$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Avec $q = p_1 p_2 \cdots p_m$, multiple de chaque $p_i$, on obtient $f^q(e_i) = e_i$ pour tout $i$, donc $f^q = \operatorname{id}_E$ (théorème 4 du chapitre 14).

*Piège.* L'entier $p$ dépend de $x$ ; c'est la dimension finie qui permet de se ramener à un nombre fini de vecteurs. Sur $\mathbb{K}[X]$, la dérivation vérifie l'hypothèse 1 sans qu'aucune de ses puissances soit nulle.

## EXERCICE 42 ⋆⋆⋆

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les sous-espaces $\operatorname{Ker} u$ et $T$ ont la même dimension $\dim E - \operatorname{rg} u$, donc il existe un isomorphisme $\varphi : \operatorname{Ker} u \to T$. On définit $a$ et $b$ sur $E = \operatorname{Ker} u \oplus S$ par

$$a = u \text{ sur } S, \quad a = \varphi \text{ sur } \operatorname{Ker} u, \qquad b = u \text{ sur } S, \quad b = 2\varphi \text{ sur } \operatorname{Ker} u.$$

L'image de $a$ contient $u(S) = \operatorname{Im} u$ (théorème 8) et $\varphi(\operatorname{Ker} u) = T$, donc $\operatorname{Im} a = \operatorname{Im} u + T = E$ : $a$ est surjectif, donc un automorphisme (théorème 10). Il en est de même de $b$, puisque $2\varphi$ est aussi un isomorphisme de $\operatorname{Ker} u$ sur $T$. Enfin $2a - b$ vaut $2u - u = u$ sur $S$ et $2\varphi - 2\varphi = 0$ sur $\operatorname{Ker} u$.

$$\boxed{u = (2a) - b, \qquad 2a,\ b \in \mathrm{GL}(E)}$$

### EXERCICE 43 ⋆⋆⋆

▷ *Sens réciproque.* Si $p = u \circ v$ et $q = v \circ u$, alors

$$q = q^3 = (vu)(vu)(vu) = v\,(uv)(uv)\,u = v \circ p^2 \circ u = v \circ p \circ u,$$

donc $\mathrm{rg} q \leqslant \mathrm{rg} p$ (proposition 7). De même $p = p^3 = u \circ q \circ v$, donc $\mathrm{rg} p \leqslant \mathrm{rg} q$.

▷ *Sens direct.* On a $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$ et $E = \mathrm{Im}\, q \oplus \mathrm{Ker}\, q$ (proposition 21 du chapitre 14). Comme $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Im}\, q$ ont la même dimension, il existe un isomorphisme $\alpha : \mathrm{Im}\, q \to \mathrm{Im}\, p$. On pose $u = \alpha$ sur $\mathrm{Im}\, q$ et $u = 0$ sur $\mathrm{Ker}\, q$, puis $v = \alpha^{-1}$ sur $\mathrm{Im}\, p$ et $v = 0$ sur $\mathrm{Ker}\, p$. Pour $y \in \mathrm{Im}\, p$, $u(v(y)) = \alpha(\alpha^{-1}(y)) = y = p(y)$, et pour $y \in \mathrm{Ker}\, p$, $u(v(y)) = 0 = p(y)$ : $u \circ v = p$. On vérifie de même que $v \circ u = q$ sur $\mathrm{Im}\, q$ et sur $\mathrm{Ker}\, q$.

$$\boxed{\mathrm{rg} p = \mathrm{rg} q \iff \exists\, u, v \in \mathcal{L}(E),\ p = u \circ v,\ q = v \circ u}$$

## Hyperplans et systèmes d'équations

### EXERCICE 44 ⋆

**1.** On a $H \cap H' \subset H$, donc $\dim(H \cap H') \leqslant n-1$, et $\dim(H \cap H') \geqslant n-2$ par le théorème 13. Si $H = H'$, la dimension vaut $n-1$. Sinon, $H \cap H'$ est un sous-espace strict de $H$, de dimension au plus $n-2$ (théorème 5).

$$\boxed{\dim(H \cap H') = n-2 \iff H \neq H' \iff \text{les équations de } H \text{ et } H' \text{ ne sont pas proportionnelles}}$$

**2.** La première équation ne contient pas $e$, et la seconde le contient avec le coefficient 5 : si la seconde forme était $\lambda$ fois la première, on aurait $5 = 0$. Les deux hyperplans sont distincts.

$$\boxed{\dim = 9 - 2 = 7}$$

**3.** Les formes $x - 2y$, $y + z$ et $t$ s'annulent en $v = (2, 1, -1, 0)$, et elles sont libres, leurs coefficients $(1, -2, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$ étant échelonnés. L'intersection est de dimension $4 - 3 = 1$ (proposition 9) et contient $v$.

$$\boxed{\mathrm{Vect}(v) = \{x - 2y = 0\} \cap \{y + z = 0\} \cap \{t = 0\}}$$

### EXERCICE 45 ⋆⋆

L'application $u : x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ est linéaire de $E$ dans $\mathbb{K}^n$, et l'hypothèse dit exactement que $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}\, f$. L'exercice 37 fournit $w \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ tel que $f = w \circ u$. Une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$ s'écrit $w(y) = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$, avec $c_i = w(e_i)$.

$$\boxed{f = c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n}$$

C'est la forme générale du résultat sur les équations proportionnelles (proposition 23 du chapitre 14), qui correspond au cas $n = 1$.

## EXERCICE 46 ⋆⋆

Les deux membres sont linéaires en $P$ ; il suffit d'écrire l'égalité sur une base de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$. Pour $P = X^{2j+1}$, les deux membres sont nuls, par imparité. Pour $P = 1$, les deux membres valent 2. Pour $P = X^{2j}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, la condition s'écrit

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\, k^{2j} = \frac{1}{2j+1}.$$

C'est l'équation $\Phi(c) = b$, où $b = \left(\frac{1}{2j+1}\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$ et où $\Phi : c \mapsto \left(\sum_k c_k k^{2j}\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrons que $\Phi$ est injectif. Si $\Phi(c) = 0$, alors $\sum_k c_k Q(k^2) = 0$ pour tout polynôme $Q = \sum_{j=1}^{n} q_j Y^j$ sans terme constant et de degré au plus $n$. Pour $m \in [\![1\,;n]\!]$, le polynôme $Q_m = Y \prod_{k\neq m} (Y - k^2)$ est de ce type, et s'annule en $k^2$ pour $k \neq m$, mais pas en $m^2$ : donc $c_m = 0$. L'endomorphisme $\Phi$ est injectif, donc bijectif (théorème 10), d'où l'existence et l'unicité. Pour $n = 2$, on résout $c_1 + 4c_2 = \frac{1}{3}$ et $c_1 + 16c_2 = \frac{1}{5}$.

$$\boxed{c_1 = \frac{17}{45}, \qquad c_2 = -\frac{1}{90}}$$

On a vérifié l'égalité obtenue sur $1, X, \ldots, X^5$. Cette *formule de quadrature* est exacte sur $\mathbb{R}_5[X]$ en n'utilisant que cinq valeurs de $P$.

## EXERCICE 47 ⋆⋆⋆

**1.** Posons $L_a = \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)}$, et de même $L_b$ et $L_c$. Le polynôme $L_a+L_b+L_c-1$, de degré au plus 2, s'annule en $a$, $b$, $c$, donc est nul : $\mathrm{id} = L_a(f)+L_b(f)+L_c(f)$. De plus, $(f - a\,\mathrm{id})\circ L_a(f)$ est un multiple de $(f - a\,\mathrm{id})(f - b\,\mathrm{id})(f - c\,\mathrm{id}) = 0$, donc $\operatorname{Im} L_a(f) \subset E_a$. Tout $x = L_a(f)(x) + L_b(f)(x) + L_c(f)(x)$ est ainsi dans $E_a + E_b + E_c$. Si $x_a + x_b + x_c = 0$, avec $x_\lambda \in E_\lambda$, on applique $(f - b\,\mathrm{id})(f - c\,\mathrm{id})$ : on obtient $(a - b)(a - c)x_a = 0$, donc $x_a = 0$, et de même $x_b = x_c = 0$.

$$\boxed{E = E_a \oplus E_b \oplus E_c}$$

**2.** Si $u \in F$, la suite décalée vérifie la même relation : $f$ est un endomorphisme de $F$, et $f^3 = f+6\,\mathrm{id}$. Or $X^3 - X - 6 = (X - 2)(X^2 + 2X + 3)$, de racines 2 et $\rho$, $\bar\rho$, avec $\rho = -1 + i\sqrt{2}$. La question 1 s'applique. Le sous-espace $E_\lambda$ est formé des suites de $F$ vérifiant $u_{n+1} = \lambda u_n$, c'est-à-dire des multiples de $(\lambda^n)$, qui appartient à $F$ puisque $\lambda$ est racine.

$$\boxed{\text{Base de } F : ((2^n), ((-1 + i\sqrt{2})^n), ((-1 - i\sqrt{2})^n))}$$

**3.** Soit $S$ l'espace des solutions complexes ; une solution $y$ vérifie $y''' = y'' - 2y$, donc est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et $y'$ est encore solution : $D : y \mapsto y'$ est un endomorphisme de $S$, et $D^3 - D^2 + 2\,\mathrm{id} = 0$. Or $X^3 - X^2 + 2 = (X + 1)(X^2 - 2X + 2)$, de racines $-1$ et $1 \pm i$. Par le chapitre 6, $\operatorname{Ker}(D - \lambda\,\mathrm{id})$ est formé des multiples de $x \mapsto e^{\lambda x}$, qui est solution.

$$\boxed{\text{Base de } S : \left(x \mapsto e^{-x},\ x \mapsto e^{(1+i)x},\ x \mapsto e^{(1-i)x}\right)}$$

Les fonctions $e^x \cos x$ et $e^x \sin x$ engendrent le même plan que $e^{(1\pm i)x}$, ce qui donne une base formée de fonctions réelles. On a ainsi résolu une équation d'ordre 3 sans disposer d'un théorème de Cauchy à cet ordre.

## Exercices de synthèse

### EXERCICE 48 ⋆⋆

1. **Faux.** Les vecteurs doivent de plus être libres : la famille $(x, x, \dots, x)$ n'est pas une base.
2. **Faux.** Dans $\mathbb{R}^2$, avec $F = G$ une droite, $\dim F + \dim G = 2$ mais $F \cap G = F \neq \{0\}$. Il faut en plus $F \cap G = \{0\}$ (proposition 4).
3. **Vrai.** C'est le théorème 6, obtenu par le théorème de la base incomplète.
4. **Faux.** Les plans $\text{Vect}(e_1, e_2)$ et $\text{Vect}(e_3, e_4)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$. Deux plans se coupent selon une droite au moins dans $\mathbb{R}^3$, car $2 + 2 > 3$ (exercice 21), mais pas dans $\mathbb{R}^4$.
5. **Vrai.** En dimension finie, un endomorphisme injectif est bijectif (théorème 10).
6. **Vrai.** On a $\text{Im}(u + v) \subset \text{Im}\, u + \text{Im}\, v$, et $\dim(\text{Im}\, u + \text{Im}\, v) \leqslant \text{rg}u + \text{rg}v$ (proposition 5).
7. **Vrai.** On a $\dim F = \text{rg}u = \dim E - \dim \text{Ker}\, u \leqslant \dim E$ par le théorème du rang.
8. **Vrai.** C'est l'exercice 44, question 1.
9. **Vrai.** L'égalité $u \circ v = 0$ signifie $\text{Im}\, v \subset \text{Ker}\, u$, d'où $\text{rg}v \leqslant n - \text{rg}u$.
10. **Faux.** On aurait $3 = \dim \text{Ker}\, u + \text{rg}u = 2\text{rg}u$, qui est pair (exercice 38).

*Piège.* Les assertions 2 et 4 confondent les conditions sur les dimensions, qui sont nécessaires, avec la condition sur l'intersection, qui reste indispensable.

### EXERCICE 49 ⋆⋆⋆

**1.** Le noyau de $D$ est formé des constantes, et son image est $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, puisque $D(\frac{X^{k+1}}{k+1}) = X^k$. De même, $D^2$ a pour noyau $\mathbb{C}_1[X]$ et pour image $\mathbb{C}_{n-2}[X]$, réduite à $\{0\}$ si $n = 1$.

$$\boxed{\text{Ker}\, D = \mathbb{C}_0[X],\ \text{Im}\, D = \mathbb{C}_{n-1}[X],\ \text{rg}D = n \qquad \text{Ker}\, D^2 = \mathbb{C}_1[X],\ \text{rg}D^2 = n - 1}$$

**2.** Si $f$ était injectif, il serait bijectif (théorème 10), et $D = f^2$ le serait aussi, ce qui est faux. Donc $\text{Ker}\, f \neq \{0\}$. Or $\text{Ker}\, f \subset \text{Ker}\, f^2 = \text{Ker}\, D$, qui est de dimension 1 : $\text{Ker}\, f = \mathbb{C}_0[X]$, et $\text{rg}f = n$. De même, $\text{Im}\, f \supset \text{Im}\, f^2 = \text{Im}\, D$, et les deux sont de dimension $n$.

$$\boxed{\text{Ker}\, f = \mathbb{C}_0[X], \qquad \text{Im}\, f = \mathbb{C}_{n-1}[X], \qquad \text{rg}f = n}$$

**3.** Comme $n \geqslant 1$, $\text{Ker}\, f = \mathbb{C}_0[X] \subset \mathbb{C}_{n-1}[X] = \text{Im}\, f$ : la somme n'est pas directe. Par l'exercice 29, on devrait donc avoir $\text{Ker}\, f^2 \neq \text{Ker}\, f$. Mais $\text{Ker}\, f^2 = \text{Ker}\, D = \mathbb{C}_0[X] = \text{Ker}\, f$ : c'est une contradiction.

$$\boxed{\text{La dérivation de } \mathbb{C}_n[X] \text{ n'a pas de racine carrée dans } \mathcal{L}(\mathbb{C}_n[X]).}$$

## EXERCICE 50 ⋆⋆⋆

**1.** L'application $\Phi : f \mapsto (f(0), f(1))$ est linéaire de $E$ dans $\mathbb{R}^2$. Si $f(0) = f(1) = 0$ et si $f$ est monotone, $f$ est comprise entre $f(0)$ et $f(1)$ sur $[0,1]$, donc nulle : $\Phi$ est injective. Une famille libre de $E$ a pour image une famille libre de $\mathbb{R}^2$, donc a au plus deux éléments.

$$\boxed{\dim E \leqslant 2}$$

**2.** Soit $E$ un sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ formé de fonctions monotones, et $f_1$, $f_2$, $f_3 \in E$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, les restrictions des fonctions de $E$ à $[-N,N]$ forment un sous-espace de fonctions monotones, et la question 1 s'applique sur $[-N,N]$, en remplaçant 0 et 1 par $-N$ et $N$. Le sous-espace

$$\Lambda_N = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \sum_i \lambda_i f_i = 0 \text{ sur } [-N,N]\right\}$$

de $\mathbb{R}^3$ n'est donc pas réduit à $\{0\}$. La suite $(\Lambda_N)$ est décroissante pour l'inclusion, donc la suite des dimensions, entières et au moins égales à 1, est décroissante et stationnaire : $\Lambda_N = \Lambda_{N_0}$ pour $N \geqslant N_0$. Un vecteur non nul de $\Lambda_{N_0}$ donne une relation valable sur tout $\mathbb{R}$ : $(f_1, f_2, f_3)$ est liée, et $\dim E \leqslant 2$.
*Piège.* On ne peut pas conclure directement par les valeurs en deux points, puisqu'aucun segment ne contient $\mathbb{R}$ ; et la relation trouvée sur chaque $[-N,N]$ pourrait a priori changer avec $N$. C'est la dimension finie de $\mathbb{R}^3$ qui force la stabilisation.

## EXERCICE 51 ⋆⋆⋆

Les $n+1$ vecteurs $v_1, \dots, v_{n+1}$ de $\mathbb{R}^n$ sont liés : il existe des réels $\lambda_i$ non tous nuls tels que $\sum_i \lambda_i v_i = 0$. Posons $I = \{i \mid \lambda_i > 0\}$ et $J = \{j \mid \lambda_j < 0\}$, qui sont disjoints. Si $J$ était vide, on choisirait $i$ avec $\lambda_i > 0$ et $k \in X_i$ ; la $k$-ième coordonnée de $\sum \lambda_i v_i$, somme de termes positifs, serait au moins $\lambda_i > 0$, ce qui est absurde. Donc $J \neq \emptyset$, et de même $I \neq \emptyset$. On a

$$\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = \sum_{j \in J} (-\lambda_j) v_j,$$

deux combinaisons à coefficients strictement positifs. La $k$-ième coordonnée du membre de gauche est strictement positive si et seulement si $k$ appartient à l'un des $X_i$, $i \in I$ ; de même à droite.

$$\boxed{\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{j \in J} X_j}$$

*À retenir.* Un énoncé purement combinatoire se démontre ici par le lemme fondamental : la dimension compte les vecteurs, et les signes des coefficients font le reste.

## EXERCICE 52 ⋆⋆⋆

**1.** Un automorphisme conserve la dimension des sous-espaces (proposition 6), donc deux sous-espaces équivalents ont la même dimension. Réciproquement, si $\dim F = \dim F' = p$, on complète une base $(e_1, \dots, e_p)$ de $F$ en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $E$, et de même pour $F'$. L'endomorphisme $\varphi$ défini par $\varphi(e_i) = e'_i$ envoie une base sur une base, donc est un automorphisme, et $\varphi(F) = F'$.

$$\boxed{F \sim F' \iff \dim F = \dim F' \text{ : il y a } n+1 \text{ classes.}}$$

**2.** Comme $\varphi$ est injectif, $\varphi(F \cap G) = \varphi(F) \cap \varphi(G)$ : deux couples équivalents ont les mêmes dimensions $p = \dim F$, $q = \dim G$ et $k = \dim(F \cap G)$. Réciproquement, on construit une *base adaptée* au couple : une base $(a_i)$ de $F \cap G$, complétée en une base $(a_i, b_j)$ de $F$ et en une base $(a_i, c_l)$ de $G$. La famille $(a, b, c)$ est libre : si $\sum \alpha_i a_i + \sum \beta_j b_j + \sum \gamma_l c_l = 0$, le vecteur $\sum \gamma_l c_l$ appartient à $G$ et à $F$, donc à $F \cap G$, ce qui force les $\gamma_l$ à être nuls, puis les $\alpha_i$ et $\beta_j$. On la complète par des vecteurs $d_m$ en une base de $E$. Les quatre blocs ont pour tailles $k$, $p-k$, $q-k$ et $n-p-q+k$, qui ne dépendent que de $(p,q,k)$. L'automorphisme envoyant la base adaptée à $(F,G)$ sur celle adaptée à $(F',G')$, bloc par bloc, envoie $F$ sur $F'$ et $G$ sur $G'$.

$$\boxed{(F,G) \sim (F',G') \iff (\dim F, \dim G, \dim F \cap G) = (\dim F', \dim G', \dim F' \cap G')}$$

Les triplets possibles sont, par l'exercice 23, ceux qui vérifient $\max(0, p+q-n) \leqslant k \leqslant \min(p,q)$.

## EXERCICE 53 ⋆⋆⋆

**1.** Soit $\lambda$ et $\mu$ deux réels distincts, et $x \in G_\lambda \cap G_\mu$. On écrit $x = \sum_i a_i(e_i+\lambda f_i) = \sum_i b_i(e_i+\mu f_i)$ ; les coordonnées sur $e_i$ donnent $a_i = b_i$, et celles sur $f_i$ donnent $\lambda a_i = \mu b_i$, d'où $(\lambda-\mu)a_i = 0$, puis $a_i = 0$ et $x = 0$. De même, si $x = \sum_i a_i(e_i + \lambda f_i)$ appartient à $F_2$, ses coordonnées sur les $e_i$ sont nulles, donc $x = 0$. La famille $(e_i + \lambda f_i)_i$ est libre, pour la même raison, donc $\dim G_\lambda = r$, et $\dim F_1 = \dim F_2 = r$. Comme $F_1 = G_0$, et que 0, 1, $\lambda$ sont distincts, on obtient le résultat.

$$\boxed{\dim F_1 = \dim F_2 = \dim G_1 = \dim G_\lambda = r, \quad \text{intersections deux à deux réduites à } \{0\}}$$

**2.** Pour $x = \sum_i a_i e_i \in F_1$, on a $x + \lambda s(x) = \sum_i a_i(e_i + \lambda f_i)$, et tout vecteur de $G_\lambda$ s'écrit ainsi : $G_\lambda = \{x + \lambda s(x) \mid x \in F_1\}$. Comme $\varphi(F_1) = F_1$ et $\varphi(F_2) = F_2$, la restriction de $\varphi$ définit des applications linéaires $a : F_1 \to F_1$ et $b : F_2 \to F_2$. Soit $x \in F_1$. Le vecteur $\varphi(x + s(x)) = a(x) + b(s(x))$ appartient à $G_1$ : il existe $y \in F_1$ tel que $a(x) + b(s(x)) = y + s(y)$. Comme $E = F_1 \oplus F_2$, l'unicité de la décomposition donne $y = a(x)$ et $b(s(x)) = s(a(x))$. Par conséquent,

$$\varphi(x + \lambda s(x)) = a(x) + \lambda\, b(s(x)) = a(x) + \lambda\, s(a(x)) \in G_\lambda.$$

Ainsi $\varphi(G_\lambda) \subset G_\lambda$. La restriction de $\varphi$, injective, est un isomorphisme de $G_\lambda$ sur $\varphi(G_\lambda)$, qui est donc de dimension $r$ (proposition 6) ; le théorème 5 donne l'égalité.

$$\boxed{\varphi(G_\lambda) = G_\lambda \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}}$$

**3.** Supposons qu'un automorphisme $\varphi$ envoie $(F_1, F_2, G_1, G_\lambda)$ sur $(F_1, F_2, G_1, G_\mu)$. Il vérifie les hypothèses de la question 2, donc $G_\mu = \varphi(G_\lambda) = G_\lambda$. Or $G_\lambda \cap G_\mu = \{0\}$ par la question 1, alors que $\dim G_\lambda = r \geqslant 1$ : c'est absurde. Chaque $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ fournit, par la question 1, un quadruplet de sous-espaces de dimension $r$ deux à deux d'intersection nulle, et ces quadruplets sont deux à deux non équivalents.

$$\boxed{\text{Il y a une infinité de classes de tels quadruplets, indexées par } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.}$$

Pour trois sous-espaces, l'exercice 57 montre au contraire qu'il n'y a qu'une seule classe.

**4.** La droite $D_{t_k}$ est dirigée par $u_k = (1, t_k)$. Comme $t_1 \neq t_2$, $(u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. La résolution de $u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2$, c'est-à-dire de $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha t_1 + \beta t_2 = t_3$, puis de même pour $u_4 = \gamma u_1 + \delta u_2$, donne

$$\alpha = \frac{t_2 - t_3}{t_2 - t_1}, \quad \beta = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1}, \quad \gamma = \frac{t_2 - t_4}{t_2 - t_1}, \quad \delta = \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_1},$$

tous non nuls puisque les $t_k$ sont distincts. On pose $e_1' = \alpha u_1$ et $f_1' = \beta u_2$, qui forment une base de $\mathbb{R}^2$. Alors $u_3 = e_1' + f_1'$ et $u_4 = \frac{\gamma}{\alpha}(e_1' + \lambda f_1')$ avec $\lambda = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$. L'automorphisme $\varphi$ défini par $\varphi(e_1) = e_1'$ et $\varphi(f_1) = f_1'$, qui envoie une base sur une base, envoie $F_1$, $F_2$, $G_1$, $G_\lambda$ sur $D_{t_1}$, $D_{t_2}$, $D_{t_3}$, $D_{t_4}$. On a $\lambda \neq 0$, car $\alpha\delta \neq 0$, et $\lambda \neq 1$, sinon $D_{t_4} = \varphi(G_1) = D_{t_3}$. L'unicité vient de la question 3 : deux quadruplets standard équivalents à un même quadruplet sont équivalents entre eux, la relation étant symétrique et transitive.

$$\boxed{\lambda = \frac{(t_2 - t_3)(t_4 - t_1)}{(t_3 - t_1)(t_2 - t_4)}}$$

Pour $(t_1, t_2, t_3, t_4) = (0, 1, 2, 3)$, on trouve $\lambda = \dfrac{(-1) \times 3}{2 \times (-2)} = \dfrac{3}{4}$ ; on vérifie que $e_1' = (-1, 0)$, $f_1' = (2, 2)$, et que $e_1' + \dfrac{3}{4} f_1' = (\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2})$ dirige bien $D_3$. Pour $(0, 1, 2, 4)$, on trouve $\lambda = \dfrac{(-1) \times 4}{2 \times (-3)} = \dfrac{2}{3}$.

$$\boxed{(D_0, D_1, D_2, D_3) \text{ et } (D_0, D_1, D_2, D_4) \text{ ne sont pas équivalents.}}$$

*À retenir.* Le nombre $\lambda$ est, à la convention près, le *birapport* des quatre pentes. Jusqu'ici, les classes d'équivalence de l'exercice 52 se décrivaient par des dimensions, c'est-à-dire par des entiers ; avec quatre sous-espaces apparaît un invariant réel, qui varie continûment, et la classification n'est plus finie.
*Piège.* Trois droites distinctes de $\mathbb{R}^2$ sont toujours équivalentes à $(F_1, F_2, G_1)$ ; il est tentant d'en conclure qu'un automorphisme bien choisi permet aussi de placer une quatrième droite à volonté. Mais, par la question 2, un automorphisme qui conserve $F_1$, $F_2$ et $G_1$ conserve toutes les droites $G_\lambda$ : il ne laisse plus aucune liberté pour la quatrième.

## EXERCICE 54 ⋆⋆⋆

**1.** Supposons $\alpha$ algébrique, et soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ non nul tel que $P(\alpha) = 0$. Le polynôme $P$ n'est pas constant, et, quitte à le diviser par son coefficient dominant, qui est rationnel, on peut l'écrire $P = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$ avec $d \geqslant 1$. Soit $W = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \alpha, \dots, \alpha^{d-1})$. Montrons par récurrence forte que $\alpha^n \in W$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est clair si $n < d$ ; si $n \geqslant d$, la relation $P(\alpha) = 0$ donne

$$\alpha^n = \alpha^{n-d}\alpha^d = -\sum_{i=0}^{d-1} a_i\, \alpha^{n-d+i},$$

et les exposants $n - d + i$ sont strictement inférieurs à $n$, donc chaque terme appartient à $W$ par hypothèse de récurrence. Ainsi $\mathbb{Q}[\alpha] \subset W$, et l'inclusion réciproque est claire : $\mathbb{Q}[\alpha] = W$ est de dimension finie, au plus $d$.

Réciproquement, si $\mathbb{Q}[\alpha]$ est de dimension $m$, les $m+1$ vecteurs $1, \alpha, \dots, \alpha^m$ sont liés sur $\mathbb{Q}$ (théorème 1) : il existe des rationnels $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ non tous nuls tels que $\sum_k \lambda_k \alpha^k = 0$, et le polynôme $\sum_k \lambda_k X^k$, non nul, annule $\alpha$.

$$\boxed{\alpha \text{ algébrique} \iff \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\alpha] < +\infty, \qquad \mathbb{Q}[\alpha] = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \alpha, \dots, \alpha^{d-1})}$$

*Piège.* La famille $(1, \alpha, \dots, \alpha^{d-1})$ engendre $\mathbb{Q}[\alpha]$, mais n'en est une base que si $\alpha$ n'annule aucun polynôme non nul de degré inférieur à $d$ : la dimension de $\mathbb{Q}[\alpha]$ est seulement majorée par $d$. Pour $\alpha = 1$ et $P = X^2 - 1$, on a $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}$, de dimension 1.

**2.(a)** On note $P = X^p + \sum_{i<p} a_i X^i$ et $Q = X^q + \sum_{j<q} b_j X^j$ les polynômes annulant $\alpha$ et $\beta$. Par linéarité, il suffit de vérifier que $\alpha \cdot \alpha^i\beta^j$ et $\beta \cdot \alpha^i\beta^j$ appartiennent à $V$ pour $i < p$ et $j < q$. Si $i+1 < p$, le produit $\alpha^{i+1}\beta^j$ est l'un des générateurs de $V$. Si $i + 1 = p$, la relation $P(\alpha) = 0$ donne

$$\alpha^p\beta^j = -\sum_{i'=0}^{p-1} a_{i'}\, \alpha^{i'}\beta^j \in V.$$

Le cas de $\beta$ est symétrique.

$$\boxed{\alpha V \subset V \quad \text{et} \quad \beta V \subset V}$$

**2.(b)** Posons $\sigma = \alpha + \beta$. Pour $v \in V$, on a $\sigma v = \alpha v + \beta v \in V$. Comme $1 = \alpha^0\beta^0 \in V$, une récurrence immédiate donne $\sigma^k \in V$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. L'espace $V$ est engendré par $pq$ vecteurs, donc de dimension au plus $pq$ (théorème 4), et les $pq+1$ vecteurs $1, \sigma, \dots, \sigma^{pq}$ de $V$ sont liés sur $\mathbb{Q}$ (théorème 1). Une relation de dépendance fournit un polynôme non nul de degré au plus $pq$ qui annule $\sigma$. Le même raisonnement s'applique à $\pi = \alpha\beta$, puisque $\pi v = \alpha(\beta v) \in V$ pour tout $v \in V$.

$$\boxed{\alpha + \beta \text{ et } \alpha\beta \text{ sont algébriques, et annulent un polynôme non nul de degré au plus } pq}$$

**2.(c)** Notons $\mathbb{A}$ l'ensemble des nombres algébriques. Il contient 1, racine de $X - 1$, et il est stable par somme et par produit d'après la question précédente. Si $P(\alpha) = 0$ avec $P$ non nul, le polynôme

non nul $P(-X)$ annule $-\alpha$. Enfin, si $\alpha \neq 0$ et $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$, le polynôme $\widetilde{P} = \sum_{k=0}^{d} a_k X^{d-k}$ a pour coefficient constant $a_d \neq 0$, donc n'est pas nul, et

$$\widetilde{P}\Big(\frac{1}{\alpha}\Big) = \sum_{k=0}^{d} a_k\, \alpha^{k-d} = \frac{P(\alpha)}{\alpha^d} = 0.$$

$\boxed{\mathbb{A} \text{ est un sous-corps de } \mathbb{C}}$

**3.(a)** Soit $a$, $b$, $c$, $d$ des rationnels tels que $a + b\sqrt{2} + \sqrt{3}\,(c + d\sqrt{2}) = 0$. Supposons $c + d\sqrt{2} \neq 0$. Alors $c - d\sqrt{2} \neq 0$ aussi : sinon $d \neq 0$, puisque $c = d = 0$ est exclu, et $\sqrt{2} = \dfrac{c}{d}$ serait rationnel. On multiplie par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{3} = -\frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{c^2 - 2d^2} = x + y\sqrt{2}, \qquad x = \frac{2bd - ac}{c^2 - 2d^2}, \quad y = \frac{ad - bc}{c^2 - 2d^2},$$

avec $x$, $y \in \mathbb{Q}$. En élevant au carré, $3 = x^2 + 2y^2 + 2xy\sqrt{2}$. Si $xy \neq 0$, cela exprime $\sqrt{2}$ comme un rationnel ; donc $xy = 0$. Si $y = 0$, alors $\sqrt{3} = x$ est rationnel ; si $x = 0$, alors $\sqrt{6} = \sqrt{2}\sqrt{3} = 2y$ est rationnel. Les deux cas sont exclus, donc $c + d\sqrt{2} = 0$, ce qui force $c = d = 0$ par irrationalité de $\sqrt{2}$, puis $a + b\sqrt{2} = 0$ et $a = b = 0$.

$\boxed{(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}) \text{ est libre sur } \mathbb{Q}}$

**3.(b)** Soit $W = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$, de dimension 4 par la question précédente. C'est l'espace $V$ de la question 2 pour $\alpha = \sqrt{2}$ et $\beta = \sqrt{3}$, racines de $X^2 - 2$ et $X^2 - 3$, avec $p = q = 2$ : toutes les puissances de $\gamma$ appartiennent à $W$, donc $\mathbb{Q}[\gamma] \subset W$. Le calcul donne

$$\gamma^2 = 5 + 2\sqrt{6}, \qquad \gamma^3 = 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}, \qquad \gamma^4 = 49 + 20\sqrt{6}.$$

Si $\lambda_0 + \lambda_1\gamma + \lambda_2\gamma^2 + \lambda_3\gamma^3 = 0$ avec des $\lambda_k$ rationnels, la liberté de $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ donne

$$\lambda_0 + 5\lambda_2 = 0, \qquad \lambda_1 + 11\lambda_3 = 0, \qquad \lambda_1 + 9\lambda_3 = 0, \qquad 2\lambda_2 = 0,$$

d'où $\lambda_2 = \lambda_0 = 0$, puis $\lambda_3 = \lambda_1 = 0$. La famille $(1, \gamma, \gamma^2, \gamma^3)$ est donc libre : aucun polynôme non nul de degré au plus 3 n'annule $\gamma$, et $\mathbb{Q}[\gamma]$, qui contient quatre vecteurs libres, est de dimension au moins 4. Comme $\mathbb{Q}[\gamma] \subset W$ et $\dim W = 4$, le théorème 5 donne l'égalité. Enfin $10\gamma^2 - 1 = 49 + 20\sqrt{6} = \gamma^4$.

$\boxed{\mathbb{Q}[\gamma] = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}), \qquad \gamma^4 - 10\gamma^2 + 1 = 0}$

**3.(c)** Comme $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ appartiennent à $W = \mathbb{Q}[\gamma]$, de tels polynômes existent. Pour les trouver, on élimine une racine carrée dans $\gamma^3$ : on a $\gamma^3 - 9\gamma = 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3} - 9\sqrt{2} - 9\sqrt{3} = 2\sqrt{2}$, et de même $11\gamma - \gamma^3 = 2\sqrt{3}$.

$$\boxed{\sqrt{2} = \frac{\gamma^3 - 9\gamma}{2}, \qquad \sqrt{3} = \frac{11\gamma - \gamma^3}{2}}$$

Le résultat surprend : le seul nombre $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ permet de retrouver séparément $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ par des opérations rationnelles. Le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant $\gamma$ contient donc $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

**4.** Le réel $\alpha = \sqrt[3]{2}$ annule $X^3 - 2$, et $\beta = \sqrt{3}$ annule $X^2 - 3$. La question 2.(b), avec $p = 3$ et $q = 2$, donne directement le résultat.

$\boxed{\sqrt[3]{2} + \sqrt{3} \text{ annule un polynôme non nul de } \mathbb{Q}[X] \text{ de degré au plus } 6}$

Le calcul effectif, long à la main, conduit à $X^6 - 9X^4 - 4X^3 + 27X^2 - 36X - 23$.
*À retenir.* L'argument de dimension prouve l'existence d'une relation polynomiale sans la construire : $pq + 1$ vecteurs dans un espace de dimension au plus $pq$ sont liés. C'est le même mécanisme qu'à l'exercice 51, transposé sur le corps $\mathbb{Q}$.

## EXERCICE 55 ⋆⋆⋆

**1.** Chaque carré est contenu dans $R$, puisque $R$ en est la réunion ; les réels $\alpha_k$ et $\alpha_k + c_k$ appartiennent donc à $[0, a]$, et l'on a $x_0 = 0$ et $x_m = a$. On note de même $y_0 = 0 < y_1 < \cdots < y_n = b$ les ordonnées, et $P_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ les petits rectangles, pour $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$. Tous ces nombres appartiennent à $V$.

▷ *Développement de $\mu_f$.* Soit $P = [x_{i_0}, x_{i_1}] \times [y_{j_0}, y_{j_1}]$ un rectangle dont les sommets sont des points de la grille. Par télescopage, quelle que soit la fonction $f$,

$$f(x_{i_1}) - f(x_{i_0}) = \sum_{i=i_0+1}^{i_1} (f(x_i) - f(x_{i-1})),$$

et de même pour les ordonnées. En développant le produit, $\mu_f(P)$ est la somme des $\mu_f(P_{ij})$ pour $i_0 < i \leqslant i_1$ et $j_0 < j \leqslant j_1$, c'est-à-dire pour les petits rectangles contenus dans $P$. Cela s'applique à $R$ et à chaque carré $C_k$, dont les sommets sont des points de la grille.

▷ *Chaque petit rectangle est dans un seul carré.* Soit $(u, v)$ le centre de $P_{ij}$. Il appartient à $R$, donc à un carré $C_k$. Les nombres $\alpha_k$ et $\alpha_k + c_k$ appartiennent à la grille, alors que $u$, strictement compris entre $x_{i-1}$ et $x_i$, n'y appartient pas ; donc $\alpha_k < u < \alpha_k + c_k$, et comme aucun point de la grille n'est strictement compris entre $x_{i-1}$ et $x_i$, on obtient $\alpha_k \leqslant x_{i-1}$ et $x_i \leqslant \alpha_k + c_k$. Le même raisonnement sur $v$ montre que $P_{ij} \subset C_k$. Si $P_{ij}$ était contenu dans deux carrés $C_k$ et $C_l$, avec $k \neq l$, son centre appartiendrait aux intérieurs de ces deux carrés, qui sont disjoints.

▷ *Conclusion.* En regroupant les petits rectangles selon le carré qui les contient,

$$\sum_{k=1}^{s} \mu_f(C_k) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{P_{ij} \subset C_k} \mu_f(P_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_f(P_{ij}) = \mu_f(R).$$

$$\boxed{\mu_f(R) = \sum_{k=1}^{s} \mu_f(C_k) \text{ pour toute fonction } f : V \to \mathbb{R}}$$

Avec $f = \mathrm{id}$, $\mu_f$ est l'aire, et l'on retrouve que l'aire de $R$ est la somme des aires des carrés. Le résultat vaut pour toute fonction $f$, ce que la suite exploite.

**2.** L'espace $V$ est engendré par $3s + 2$ réels, donc de dimension finie sur $\mathbb{Q}$. La famille $(a, b)$ est libre sur $\mathbb{Q}$ : si $\lambda a + \nu b = 0$ avec $\lambda$, $\nu$ rationnels non tous deux nuls, alors $\lambda \neq 0$, sinon $\nu b = 0$ avec $b \neq 0$, et $\dfrac{a}{b} = -\dfrac{\nu}{\lambda}$ serait rationnel. On la complète en une base $(a, b, w_3, \ldots, w_d)$ de $V$ (théorème 2), et l'on définit $f$ comme l'unique application $\mathbb{Q}$-linéaire de $V$ dans $\mathbb{Q}$ telle que $f(a) = 1$, $f(b) = -1$ et $f(w_i) = 0$ (théorème 4 du chapitre 14).

Par $\mathbb{Q}$-linéarité, $f(\alpha_k + c_k) - f(\alpha_k) = f(c_k)$, et de même pour $\beta_k$ : on a donc $\mu_f(C_k) = f(c_k)^2 \geqslant 0$. D'autre part, $f(0) = 0$ et $\mu_f(R) = f(a)f(b) = -1$. La question 1 donne alors

$$-1 = \sum_{k=1}^{s} f(c_k)^2 \geqslant 0,$$

ce qui est absurde.

Si un rectangle est pavé par des carrés, le rapport de ses côtés est rationnel.

*Piège.* Une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est de la forme $x \mapsto \kappa x$, et donne $\mu_f = \kappa^2 \times$ aire : on n'obtient aucune contradiction. Toute la force de l'argument vient de ce que $f$ n'est que $\mathbb{Q}$-linéaire, ce qui permet d'imposer $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires ; une telle fonction n'est ni continue ni monotone. Il suffit de la construire sur l'espace $V$ de dimension finie, et non sur $\mathbb{R}$ tout entier, qui est de dimension infinie sur $\mathbb{Q}$.

**3.** D'après la question 2, $b = ra$ avec $r \in \mathbb{Q}$. Supposons $\dfrac{c_k}{a} \notin \mathbb{Q}$ pour un certain $k$. Comme à la question 2, la famille $(a, c_k)$ est libre sur $\mathbb{Q}$, et il existe une application $\mathbb{Q}$-linéaire $f : V \to \mathbb{Q}$ telle que

$f(a) = 0$ et $f(c_k) = 1$. Alors $f(b) = rf(a) = 0$, donc $\mu_f(R) = 0$, alors que $\sum_l \mu_f(C_l) \geqslant f(c_k)^2 = 1$ : c'est absurde.

Réciproquement, supposons que $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$, avec $p$, $q \in \mathbb{N}^*$, et posons $c = \frac{a}{p} = \frac{b}{q}$. Les $pq$ carrés $[ic, (i+1)c] \times [jc, (j+1)c]$, pour $0 \leqslant i < p$ et $0 \leqslant j < q$, recouvrent $R$ et ont des intérieurs deux à deux disjoints.

$$\boxed{\frac{c_k}{a} \in \mathbb{Q} \text{ pour tout } k, \qquad R \text{ pavable par des carrés } \iff \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}}$$

*À retenir.* Le rectangle $[0, \sqrt{2}] \times [0, 1]$ ne peut pas être pavé par un nombre fini de carrés, si petits soient-ils. Ce théorème de Max Dehn (*Mathematische Annalen*, 1903) se démontre en regardant $\mathbb{R}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ : un problème de géométrie se résout par le théorème de la base incomplète.

## EXERCICE 56 ⋆⋆⋆⋆

*Idée.* On réécrit l'inégalité $\mathrm{rg}(vw) - \mathrm{rg}(uvw) \leqslant \mathrm{rg}(v) - \mathrm{rg}(uv)$ : elle compare la perte de rang causée par $u$ sur deux sous-espaces emboîtés, que l'exercice 34 mesure exactement.

L'exercice 34, question 2, appliqué à $u$ après $v \circ w$, puis à $u$ après $v$, donne

$$\mathrm{rg}(vw) - \mathrm{rg}(uvw) = \dim(\mathrm{Im}\, vw \cap \mathrm{Ker}\, u), \qquad \mathrm{rg}(v) - \mathrm{rg}(uv) = \dim(\mathrm{Im}\, v \cap \mathrm{Ker}\, u).$$

Comme $\mathrm{Im}(v \circ w) \subset \mathrm{Im}\, v$, la première dimension est inférieure à la seconde.

$$\boxed{\mathrm{rg}(u \circ v) + \mathrm{rg}(v \circ w) \leqslant \mathrm{rg}(v) + \mathrm{rg}(u \circ v \circ w)}$$

Avec $v = \mathrm{id}_E$, on retrouve l'inégalité de Sylvester $\mathrm{rg}u + \mathrm{rg}w - \dim E \leqslant \mathrm{rg}(u \circ w)$.

## EXERCICE 57 ⋆⋆⋆⋆

*Idée.* On ramène tout triplet à une forme standard : $F_1$, $F_2$ et le graphe d'un isomorphisme de $F_1$ sur $F_2$.

Comme $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et $\dim F_1 + \dim F_2 = 2r$, on a $E = F_1 \oplus F_2$. De même, $F_3$ est un supplémentaire de $F_2$, donc, par l'exercice 72 du chapitre 14, le graphe $\{x + \theta(x) \mid x \in F_1\}$ d'une application linéaire $\theta : F_1 \to F_2$. Si $\theta(x) = 0$, alors $x \in F_3 \cap F_1 = \{0\}$ : $\theta$ est injective, donc un isomorphisme, les dimensions étant égales. Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $F_1$. Alors $(\theta(e_i))$ est une base de $F_2$ (proposition 6), $(e_i, \theta(e_i))$ une base de $E$, et $(e_i + \theta(e_i))$ une base de $F_3$.

Pour un second triplet, on obtient de même $\theta'$ et une base $(e'_i)$ de $F'_1$. L'automorphisme $\varphi$ défini par $\varphi(e_i) = e'_i$ et $\varphi(\theta(e_i)) = \theta'(e'_i)$ envoie une base sur une base ; il envoie $F_1$ sur $F'_1$, $F_2$ sur $F'_2$, et $e_i + \theta(e_i)$ sur $e'_i + \theta'(e'_i)$, donc $F_3$ sur $F'_3$.

$$\boxed{\text{Tous ces triplets sont équivalents.}}$$

Ce n'est plus vrai pour quatre sous-espaces : dans $\mathbb{R}^2$, quatre droites distinctes ne sont pas toujours équivalentes, car leur birapport est un invariant.

## EXERCICE 58 ⋆⋆⋆⋆

*Idée.* On trouve dans $E$ une courbe qui ne rencontre chaque hyperplan qu'en un nombre fini de points ; il faudrait alors une infinité dénombrable d'ensembles finis pour couvrir $\mathbb{R}$.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$, et $v(t) = \sum_{i=1}^{n} t^{i-1} e_i$ pour $t \in \mathbb{R}$. Un hyperplan $H$ est le noyau d'une forme non nulle $x \mapsto \sum a_i x_i$ (théorème 12), et $v(t) \in H$ si et seulement si $\sum a_i t^{i-1} = 0$. Ce polynôme, non nul et de degré au plus $n-1$, a au plus $n-1$ racines : l'ensemble $T_H = \{t \mid v(t) \in H\}$ a au plus $n-1$ éléments.

Supposons $E = \bigcup_k H_k$. Tout réel $t$ appartient alors à l'un des $T_{H_k}$. Numérotons les éléments de $T_{H_k}$ en $t_{k,1}, \dots, t_{k,m_k}$, avec $m_k \leqslant n-1$. L'application qui envoie $(k,j)$ sur $t_{k,j}$ si $j \leqslant m_k$, et sur 0 sinon, est une surjection de $\mathbb{N} \times [\![1\,;n]\!]$ sur $\mathbb{R}$. Composée avec une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N} \times [\![1\,;n]\!]$, comme $m \mapsto (\lfloor m/n \rfloor, 1 + m - n\lfloor m/n \rfloor)$, elle donne une surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$, ce qui est exclu.

$$\boxed{E \text{ n'est pas réunion d'une suite d'hyperplans.}}$$

Pour $n = 1$, l'argument reste valable : le seul hyperplan est $\{0\}$, et les ensembles $T_H$ sont vides.

## EXERCICE 59 ⋆⋆⋆⋆

*Idée.* Si $F$ est de dimension $d$, on écrit chaque $\varphi_a$ sur une base formée de $d$ fonctions $\varphi_{a_i}$ ; les coefficients dépendent de $a$, et la même égalité, lue « dans l'autre variable », exprime chaque $\psi_b$ à l'aide de ces $d$ coefficients.

Supposons $\dim F = d$. Parmi les familles libres formées de fonctions $\varphi_a$, il en existe une de cardinal maximal, au plus $d$, soit $(\varphi_{a_1}, \dots, \varphi_{a_m})$. Par maximalité, tout $\varphi_a$ est combinaison de ces fonctions (proposition 8 du chapitre 14) ; elles engendrent donc $F$, et $m = d$. Pour tout $a$, il existe des réels $c_1(a), \dots, c_d(a)$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(a,x) = \sum_{i=1}^{d} c_i(a)\, f(a_i, x).$$

On obtient ainsi des fonctions $c_1, \dots, c_d$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $b \in \mathbb{R}$ fixé et tout $a$, l'égalité en $x = b$ s'écrit

$$\psi_b(a) = f(a,b) = \sum_{i=1}^{d} \varphi_{a_i}(b)\, c_i(a), \qquad \text{soit} \qquad \psi_b = \sum_{i=1}^{d} \varphi_{a_i}(b)\, c_i.$$

Toutes les fonctions $\psi_b$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(c_1, \dots, c_d)$, donc $G$ est de dimension finie au plus $d$. Le rôle des deux variables étant symétrique, $\dim F \leqslant \dim G$ dès que $G$ est de dimension finie.

$$\boxed{\dim F = \dim G}$$

Pour une fonction $f$ définie sur un produit d'ensembles finis, c'est l'égalité du rang des lignes et du rang des colonnes d'un tableau, que le chapitre 16 retrouvera pour les matrices.

## EXERCICE 60 ⋆⋆⋆⋆

*Idée.* On résout la récurrence linéaire d'ordre 3 par l'exercice 12 ; la limite se lit sur une quantité conservée.

▷ *Forme générale.* Les suites complexes vérifiant la relation forment l'espace $R$ de l'exercice 12, associé à

$$Q = X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(X-1)(3X^2 + 2X + 1).$$

Les racines de $3X^2 + 2X + 1$ sont $\rho = \dfrac{-1 + i\sqrt{2}}{3}$ et $\bar{\rho}$, de module $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} < 1$, distinctes de 1. Il existe donc $\alpha$, $\beta$, $\gamma \in \mathbb{C}$ tels que $u_n = \alpha + \beta\rho^n + \gamma\bar{\rho}^n$ pour tout $n$. Comme $|\rho^n| = 3^{-n/2} \to 0$, la suite $(u_n)$ converge vers $\alpha$, qui est réel puisque les $u_n$ le sont.

▷ *Une quantité conservée.* Posons $I_n = u_n + 2u_{n+1} + 3u_{n+2}$. Alors

$$I_{n+1} = u_{n+1} + 2u_{n+2} + (u_n + u_{n+1} + u_{n+2}) = I_n.$$

La suite $(I_n)$ est constante, égale à $I_0$, et tend vers $(1+2+3)\alpha = 6\alpha$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{u_0 + 2u_1 + 3u_2}{6}}$$

Avec $(u_0, u_1, u_2) = (0, 0, 6)$, on trouve $u_3 = 2$, $u_4 = \dfrac{8}{3}$, $u_5 = \dfrac{32}{9}$, et les termes se rapprochent de 3, valeur annoncée par la formule. Les coefficients 1, 2, 3 s'interprètent comme des poids : la limite est une moyenne pondérée des conditions initiales, où le dernier terme compte le plus.