EXERCICES – CHAPITRE 15

DIMENSION FINIE ET RANG

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Dans toute la feuille, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E, F, G désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Espaces de dimension finie

EXERCICE 1 ⋆

1. Pour quelles valeurs du réel t la famille $\big((1,t),(t,3)\big)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$? Même question pour la famille $\big((1,0,t),(1,1,t),(t,0,1)\big)$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $u_1=(0,1,1)$, $u_2=(1,0,1)$ et $u_3=(1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$, et déterminer les coordonnées de $(1,1,1)$ dans cette base.

EXERCICE 2 ⋆

Dans $\mathbb{R}^4$, compléter chacune des familles suivantes en une base, à l'aide de vecteurs de la base canonique (e_1,e_2,e_3,e_4).

(i) $u=(1,0,2,3)$, $v=(0,1,2,3)$, $w=(1,2,0,3)$.

(ii) $u=(1,-1,1,-1)$, $v=(1,1,1,1)$.

EXERCICE 3 ⋆

Donner une base et la dimension des sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$E=\mathrm{Vect}\big((1,2,1,0),(4,-2,1,1),(7,2,4,2),(11,4,1,3)\big),$$

$$F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid 3x-2y-z+2t=0 \text{ et } 3y-2z+t=0\}.$$

EXERCICE 4 ⋆

Soit $P=X^4+2X^3-2X^2-6X+5$.

1. Déterminer la multiplicité de la racine 1 de P, puis factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $\big((X-1)^4,(X-1)^3,(X-1)^2,X-1,1\big)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$, et donner les coordonnées de P dans cette base.

EXERCICE 5 ⋆⋆

1. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$. Montrer que $(e_2,\dots,e_n)$ est libre.
2. Pour $k\in[\![1\,;n]\!]$, on pose $u_k=(k,k-1,\dots,2,1,0,\dots,0)\in\mathbb{K}^n$, dont les $n-k$ dernières coordonnées sont nulles. Montrer que $(u_1,\dots,u_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

EXERCICE 6 ⋆⋆

Polynômes de Bernstein. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour $k\in[\![0\,;n]\!]$, on pose $B_k=X^k(1-X)^{n-k}$. Montrer que $(B_0,\dots,B_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

EXERCICE 7 ⋆⋆

1. Soit $n \geqslant 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$, dont $\left((X-\alpha)X^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est une base. Donner les coordonnées de $(X-\alpha)^n$ dans cette base.
2. Soit $a \neq b$ deux réels. Déterminer une base de $\{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(a) = P(b) = 0\}$.

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. Montrer que l'ensemble des suites arithmétiques complexes est un sous-espace de dimension 2 de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, et en donner une base.
2. Soit $P = X^2 + \alpha X + \beta \in \mathbb{K}[X]$ ayant deux racines distinctes ρ et σ dans $\mathbb{K}$, et

$$R = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid u_{n+2} + \alpha u_{n+1} + \beta u_n = 0 \text{ pour tout } n\}.$$

Montrer que R est un plan vectoriel, puis en déduire, sans refaire le calcul du chapitre 7, que $((\rho^n), (\sigma^n))$ est une base de R.

EXERCICE 9 ⋆⋆

Soit $T \in \mathbb{N}^*$ et $P_T = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid u_{n+T} = u_n \text{ pour tout } n\}$ l'espace des suites T-périodiques.

1. Montrer que P_T est un sous-espace de dimension finie de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, et déterminer sa dimension.
2. Montrer que la famille $\left((\omega^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{\omega\in\mathbb{U}_T}$ est une base de P_T.
3. Montrer que la réunion $P = \bigcup_{T\geqslant 1} P_T$ est un sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, et en déterminer une base.

EXERCICE 10 ⋆⋆

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[-1,1]$, affines sur $[-1,0]$ et sur $[0,1]$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ de dimension 3, et en donner une base.

EXERCICE 11 ⋆⋆

1. Construire un isomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ sur $\mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]$, et en déduire une nouvelle preuve du fait que $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.
2. Montrer que $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est de dimension infinie.

EXERCICE 12 ⋆⋆⋆

Soit $k \geqslant 1$ et $Q = X^k + \alpha_{k-1}X^{k-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme ayant k racines distinctes $\rho_1, \ldots, \rho_k$. Montrer que l'ensemble

$$R = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid u_{n+k} + \alpha_{k-1}u_{n+k-1} + \cdots + \alpha_1 u_{n+1} + \alpha_0 u_n = 0 \text{ pour tout } n\}$$

est un sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de dimension k, et en donner une base.

EXERCICE 13 ⋆⋆

1. Soit $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in E$ tels que la famille $(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ soit libre. Montrer que $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \geqslant n$.
2. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E et $p \leqslant q$ deux éléments de $[\![1\,;n]\!]$. Montrer que

$$0 \leqslant \mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_q) - \mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p) \leqslant q - p.$$

EXERCICE 14 ⋆⋆

Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille libre de fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que le rang de la famille $(f_1', \dots, f_n')$ est au moins $n-1$.

Sous-espaces et dimension

EXERCICE 15 ⋆

1. Dans $\mathbb{R}^3$, donner une base de $F = \{(x,y,z) \mid x - 2y + z = 0\}$ et de $G = \{(a, a+b, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.
2. Dans $\mathbb{R}^4$, donner une base de $F = \{(x,y,z,t) \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\}$, puis de $F + G$, où $G = \text{Vect}((1,1,1,1))$.

EXERCICE 16 ⋆

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les couples de sous-espaces suivants. Dans chaque cas, donner une base de F, de G et de $F \cap G$, déterminer $F + G$, et dire si F et G sont supplémentaires.

(i) $F = \{x - 2y + z = 0\}$ et $G = \{2x - y + 2z = 0\}$.

(ii) $F = \{x - y - 2z = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \mid x = 2y = x + z\}$.

(iii) $F = \{(a,a,a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(b+c, b, c) \mid b, c \in \mathbb{R}\}$.

EXERCICE 17 ⋆

1. Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $F = \{(a,b,c,d) \mid b - 2c + d = 0\}$ et $G = \{(a,b,c,d) \mid a = d \text{ et } b = 2c\}$. Donner une base de F, de G et de $F \cap G$, puis montrer que $F + G = \mathbb{R}^4$.
2. Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $F = \{(x,y,z,t) \mid x + y + z + t = 0\}$ et $G = \{(2a, -a, 0, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires, et décomposer $(1,2,3,4)$ selon $F \oplus G$.

EXERCICE 18 ⋆

1. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\}$. Donner une base de F et un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$, $D_t = \text{Vect}((t,t,1))$ et $P_t = \text{Vect}((1,t,1),(2,1,1))$. Préciser les dimensions de D_t et de P_t, et donner une condition nécessaire et suffisante sur t pour que $D_t \oplus P_t = \mathbb{R}^3$.

EXERCICE 19 ⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{K}_{2n}[X] \mid P(-X) = P(X)\}$ et $\mathcal{I} = \{P \in \mathbb{K}_{2n}[X] \mid P(-X) = -P(X)\}$.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces de $\mathbb{K}_{2n}[X]$, en somme directe.
2. En exhibant des familles libres explicites, montrer que $\dim \mathcal{P} \geqslant n+1$ et $\dim \mathcal{I} \geqslant n$.
3. En faisant le moins de calculs possible, montrer que ces inégalités sont des égalités, et en déduire une base de chacun des deux sous-espaces et le fait que $\mathbb{K}_{2n}[X] = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

EXERCICE 20 ⋆⋆

1. Soit E un sous-espace de $\mathbb{K}^n$. Montrer qu'il existe une sous-famille $(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$ de la base canonique telle que E et $\text{Vect}(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$ soient supplémentaires.
2. Déterminer un supplémentaire de $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \mid x - y - z + t = 0 \text{ et } y - 2z + t = 0\}$.

EXERCICE 21 ⋆⋆

Soit E un espace de dimension finie.

1. Montrer que si F et G sont deux sous-espaces de E tels que $\dim F + \dim G > \dim E$, alors $F \cap G \neq \{0\}$.
2. Soit F, G, H trois sous-espaces de E. Donner une condition sur $\dim F + \dim G + \dim H$ garantissant que $F \cap G \cap H \neq \{0\}$.

EXERCICE 22 ⋆⋆

Soit E un espace de dimension finie.

1. Montrer, à l'aide de la dimension, que deux supplémentaires d'un même sous-espace sont isomorphes.
2. Soit F et G deux sous-espaces de E en somme directe. Montrer qu'il existe un sous-espace $\widehat{F}$ contenant F tel que $\widehat{F} \oplus G = E$.

EXERCICE 23 ⋆⋆⋆

Soit E un espace de dimension n et p, $q \in [\![0\,;n]\!]$. Quelles sont les dimensions possibles de $F \cap G$, lorsque F et G sont des sous-espaces de E de dimensions respectives p et q ?

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

Lemme d'échange de Steinitz. Soit $(f_1, \dots, f_m)$ une famille génératrice de E et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E. Pour $r \in [\![1\,;n]\!]$, on note $\mathcal{P}(r)$ l'assertion : « il existe des indices $i_1, \dots, i_r$ distincts tels que la famille obtenue à partir de $(f_1, \dots, f_m)$ en remplaçant chaque f_{i_k} par e_k soit génératrice ».

1. Montrer par récurrence que $\mathcal{P}(r)$ est vraie pour tout $r \in [\![1\,;n]\!]$.
2. En déduire une nouvelle démonstration du lemme fondamental du cours, et expliquer le nom du résultat.

EXERCICE 25 ⋆⋆⋆

Soit E un espace de dimension finie, et F, G deux sous-espaces de E. Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun si et seulement si $\dim F = \dim G$.

Applications linéaires en dimension finie

EXERCICE 26 ⋆

Soit $f : (x, y, z, t) \mapsto (x - z, y - t)$, de $\mathbb{K}^4$ dans $\mathbb{K}^2$.

1. Montrer que f est linéaire, et donner une base et la dimension de $\operatorname{Ker} f$.
2. En déduire que f est surjective.
3. Soit $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid y = z = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace de $\mathbb{K}^4$, dont on précisera la dimension, et que $\operatorname{Ker} f$ et G sont supplémentaires.

EXERCICE 27 ⋆

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P_n - P_n' = X^n$.
2. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(X + 1) + P(X) = Q$, sans chercher à le calculer.

EXERCICE 28 ⋆⋆

Soit E un espace de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{id}_E$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}\,(f^2 + f + \mathrm{id}_E)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires.

EXERCICE 29 ⋆⋆

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Rappeler pourquoi $E = \mathrm{Ker}\,u \oplus \mathrm{Im}\,u$ si et seulement si $\mathrm{Im}\,u^2 = \mathrm{Im}\,u$ et $\mathrm{Ker}\,u^2 = \mathrm{Ker}\,u$ (exercice 49 du chapitre 14).
2. On suppose E de dimension finie. Montrer que
$$E = \mathrm{Ker}\,u \oplus \mathrm{Im}\,u \iff \mathrm{Im}\,u^2 = \mathrm{Im}\,u \iff \mathrm{Ker}\,u^2 = \mathrm{Ker}\,u.$$
3. L'équivalence $\mathrm{Im}\,u^2 = \mathrm{Im}\,u \iff \mathrm{Ker}\,u^2 = \mathrm{Ker}\,u$ est-elle valable en dimension infinie ?

EXERCICE 30 ⋆⋆

Soit E un espace de dimension finie et u, $v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\mathrm{Ker}\,u + \mathrm{Ker}\,v = \mathrm{Im}\,u + \mathrm{Im}\,v = E$.

1. Montrer que les deux sommes sont directes.
2. Montrer par un contre-exemple que le résultat cesse d'être vrai si E n'est plus de dimension finie.

EXERCICE 31 ⋆⋆

Soit E et F deux espaces de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Soit V un sous-espace de E. Montrer que $\dim u(V) = \dim V - \dim(V \cap \mathrm{Ker}\,u)$.
2. Soit W un sous-espace de F. Montrer que $\dim u^{-1}(W) = \dim(W \cap \mathrm{Im}\,u) + \dim \mathrm{Ker}\,u$.

EXERCICE 32 ⋆⋆

Soit E un espace de dimension finie.

1. Soit F un sous-espace de E. Montrer qu'il existe un espace E' et $\varphi \in \mathcal{L}(E', E)$ tels que $F = \mathrm{Im}\,\varphi$.
2. Soit G un sous-espace de E. Montrer qu'il existe un espace E'' et $\psi \in \mathcal{L}(E, E'')$ tels que $G = \mathrm{Ker}\,\psi$.
3. Soit F et G deux sous-espaces de E. À quelle condition existe-t-il $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $F = \mathrm{Im}\,u$ et $G = \mathrm{Ker}\,u$?

EXERCICE 33 ⋆⋆

Soit E un espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ non nul. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $u^2 = 0$;

(ii) il existe un projecteur p de E tel que $p \circ u = u$ et $u \circ p = 0$;

(iii) il existe un projecteur p de E tel que $p \circ u - u \circ p = u$.

EXERCICE 34 ⋆⋆

Soit E, F, G des espaces de dimension finie.

1. Soit a, $b \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\dim \operatorname{Ker}(a \circ b) \leqslant \dim \operatorname{Ker} a + \dim \operatorname{Ker} b$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que
$$\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f) - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim F \leqslant \operatorname{rg}(g \circ f).$$
3. Soit $a \in \mathcal{L}(E,F)$ et $b \in \mathcal{L}(E,G)$ tels que $\operatorname{rg}(a) + \operatorname{rg}(b) < \dim E$. Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que $a(x) = b(x) = 0$.

EXERCICE 35 ⋆⋆

Soit E et F deux espaces de dimension finie, et G un sous-espace de E. Montrer que l'ensemble
$$A = \{f \in \mathcal{L}(E,F) \mid G \subset \operatorname{Ker} f\}$$
est un sous-espace de $\mathcal{L}(E,F)$, et calculer sa dimension. On pourra considérer un supplémentaire H de G et l'exercice 51 du chapitre 14.

EXERCICE 36 ⋆⋆⋆

Soit E un espace de dimension n et r, $s \in [\![0\,;n]\!]$. Déterminer l'ensemble des valeurs de $\operatorname{rg}(g \circ f)$ lorsque (f,g) parcourt les couples d'endomorphismes de E tels que $\operatorname{rg} f = r$ et $\operatorname{rg} g = s$.

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆

Lemme de factorisation. Soit E, F, G trois espaces de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(E,G)$. Montrer que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} v$ si et seulement s'il existe $w \in \mathcal{L}(F,G)$ tel que $v = w \circ u$. Pour le sens direct, on considérera un supplémentaire S de $\operatorname{Ker} u$ dans E et un supplémentaire T de $\operatorname{Im} u$ dans F.

EXERCICE 38 ⋆⋆⋆

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que, si $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$, la dimension de E est paire.
2. Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ si et seulement si $f^2 = 0$ et s'il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que
$$h \circ f + f \circ h = \mathrm{id}_E.$$

EXERCICE 39 ⋆⋆⋆

Soit E un espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$ pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est une homothétie. On pourra utiliser l'exercice 52 du chapitre 14, avec des projecteurs bien choisis.

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆

Soit f un endomorphisme d'un espace E de dimension finie.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker} f^n \subset \operatorname{Ker} f^{n+1}$ et $\operatorname{Im} f^{n+1} \subset \operatorname{Im} f^n$.
2. Que peut-on dire des suites $(\dim \operatorname{Ker} f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\dim \operatorname{Im} f^n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Montrer que les suites $(\operatorname{Ker} f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\operatorname{Im} f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes à partir d'un même rang.
4. Montrer que la suite $d_n = \operatorname{rg}(f^n)$ vérifie $d_{n+1} \leqslant \frac{d_n + d_{n+2}}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 41 ⋆⋆⋆

Soit E un espace de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que, pour tout $x \in E$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p(x) = 0$. Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $f^q = 0$.
2. On suppose que, pour tout $x \in E$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p(x) = x$. Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^q = \mathrm{id}_E$.

EXERCICE 42 ⋆⋆⋆

Montrer que tout endomorphisme d'un espace E de dimension finie est la différence de deux automorphismes. On pourra introduire un supplémentaire S de $\operatorname{Ker} u$, un supplémentaire T de $\operatorname{Im} u$ et un isomorphisme de $\operatorname{Ker} u$ sur T.

EXERCICE 43 ⋆⋆⋆

Soit E un espace de dimension finie et p, q deux projecteurs de E. Montrer que p et q ont le même rang si et seulement s'il existe u, $v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $p = u \circ v$ et $q = v \circ u$.

Hyperplans et systèmes d'équations

EXERCICE 44 ⋆

Soit E un espace de dimension n.

1. Soit H et H' deux hyperplans de E. Montrer que $\dim(H \cap H') \in \{n-1, n-2\}$, et donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\dim(H \cap H') = n-2$.
2. Quelle est la dimension du sous-espace de $\mathbb{R}^9$ défini par les deux équations

$$a - 7b + 3c - 2d + f - g + 2h + \sqrt{42}\, i = 0 \qquad \text{et} \qquad a + 2b + 3c + 4d + 5e + 6f + 7g + 8h + 9i = 0 \ ?$$

3. Soit $v = (2, 1, -1, 0) \in \mathbb{R}^4$. Écrire la droite $\operatorname{Vect}(v)$ comme l'intersection de trois hyperplans.

EXERCICE 45 ⋆⋆

Soit E un espace de dimension finie et $f_1, \dots, f_n$, f des formes linéaires sur E telles que

$$\forall x \in E, \quad \big(f_1(x) = \cdots = f_n(x) = 0\big) \implies f(x) = 0.$$

Montrer que f est combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_n$. On pourra appliquer l'exercice 37 à l'application $u : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$, de E dans $\mathbb{K}^n$.

EXERCICE 46 ⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$,

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{d}x = 2P(0) + \sum_{k=1}^{n} c_k\big(P(k) + P(-k) - 2P(0)\big).$$

Déterminer c_1 et c_2 lorsque $n = 2$.

EXERCICE 47 ⋆⋆⋆

Soit a, b, c trois nombres complexes distincts, E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$(f - a\,\mathrm{id}) \circ (f - b\,\mathrm{id}) \circ (f - c\,\mathrm{id}) = 0.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{id})$.

1. Montrer que $E = E_a \oplus E_b \oplus E_c$. Pour la somme, on pourra utiliser les polynômes de Lagrange L_a, L_b, L_c associés aux points a, b, c, et l'égalité $L_a + L_b + L_c = 1$.
2. Soit F l'ensemble des suites $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $u_{n+3} = u_{n+1} + 6u_n$ pour tout n. Montrer que $f : (u_n)_n \mapsto (u_{n+1})_n$ est un endomorphisme de F, et en déduire une base de F.
3. Par la même démarche, déterminer une base de l'espace des solutions de l'équation différentielle $y''' - y'' + 2y = 0$, en considérant $y \mapsto y'$.

Exercices de synthèse

EXERCICE 48 ⋆⋆

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse par une démonstration ou un contre-exemple. L'espace E est de dimension finie $n \geqslant 2$.

1. Toute famille de n vecteurs de E est une base de E.
2. Si F et G sont deux sous-espaces de E tels que $\dim F + \dim G = n$, alors $E = F \oplus G$.
3. Tout sous-espace de E admet un supplémentaire.
4. Deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$ se coupent toujours selon une droite au moins.
5. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est injectif, alors u est un automorphisme de E.
6. Pour tous u, $v \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{rg}(u + v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.
7. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective, alors $\dim F \leqslant \dim E$.
8. L'intersection de deux hyperplans distincts de E est de dimension $n - 2$.
9. Si $u \circ v = 0$, alors $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \leqslant n$, pour tous u, $v \in \mathcal{L}(E)$.
10. Il existe un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Ker}\,u = \mathrm{Im}\,u$.

EXERCICE 49 ⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 1$ et D la dérivation de $\mathbb{C}_n[X]$.

1. Déterminer le rang, le noyau et l'image de D, et ceux de D^2.
2. On suppose par l'absurde qu'il existe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_n[X])$ tel que $f \circ f = D$. Déterminer le rang, le noyau et l'image de f.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}\,f$ et $\mathrm{Im}\,f$ ne sont pas en somme directe, et aboutir à une contradiction.

EXERCICE 50 ⋆⋆⋆

1. Soit E un sous-espace de $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$ formé de fonctions monotones. Montrer que $\dim E \leqslant 2$.
2. Même question pour un sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ formé de fonctions monotones.

EXERCICE 51 ⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 1$ et $X_1, \dots, X_{n+1}$ des parties non vides de $[\![1\,;n]\!]$. Montrer qu'il existe deux parties I et J de $[\![1\,;n+1]\!]$, non vides et disjointes, telles que

$$\bigcup_{i\in I} X_i = \bigcup_{j\in J} X_j.$$

On pourra considérer les vecteurs $v_i \in \mathbb{R}^n$ dont la k-ième coordonnée vaut 1 si $k \in X_i$ et 0 sinon.

EXERCICE 52 ⋆⋆⋆

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Deux r-uplets de sous-espaces $(F_1, \dots, F_r)$ et $(F'_1, \dots, F'_r)$ sont dits équivalents s'il existe un automorphisme φ de E tel que l'on ait $\varphi(F_i) = F'_i$ pour tout i.

1. Classer les sous-espaces de E à équivalence près.
2. Classer les couples de sous-espaces de E à équivalence près.

EXERCICE 53 ⋆⋆⋆

Quatre sous-espaces : un invariant continu. On reprend la relation d'équivalence de l'exercice 52, et l'on suppose $\dim E = 2r$, avec $r \geqslant 1$. On fixe une base $(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r)$ de E et, pour tout réel λ, on pose

$$F_1 = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r), \qquad F_2 = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_r), \qquad G_\lambda = \mathrm{Vect}(e_1 + \lambda f_1, \dots, e_r + \lambda f_r).$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que F_1, F_2, G_1 et G_λ sont de dimension r, et que l'intersection de deux quelconques d'entre eux est réduite à $\{0\}$.
2. Soit φ un automorphisme de E tel que $\varphi(F_1) = F_1$, $\varphi(F_2) = F_2$ et $\varphi(G_1) = G_1$. Montrer que $\varphi(G_\lambda) = G_\lambda$ pour tout réel λ. On pourra introduire l'isomorphisme $s : F_1 \to F_2$ défini par $s(e_i) = f_i$, et remarquer que $G_\lambda = \{x + \lambda s(x) \mid x \in F_1\}$.
3. En déduire que, si λ et μ sont deux éléments distincts de $\mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$, les quadruplets $(F_1, F_2, G_1, G_\lambda)$ et (F_1, F_2, G_1, G_μ) ne sont pas équivalents. Comparer avec l'exercice 57, qui traite le cas de trois sous-espaces.
4. On se place dans $E = \mathbb{R}^2$, avec $r = 1$, $e_1 = (1, 0)$ et $f_1 = (0, 1)$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note D_t la droite d'équation $y = tx$. Soit t_1, t_2, t_3, t_4 quatre réels distincts. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ tel que $(D_{t_1}, D_{t_2}, D_{t_3}, D_{t_4})$ soit équivalent à $(F_1, F_2, G_1, G_\lambda)$, et l'exprimer en fonction de t_1, t_2, t_3, t_4. Les quadruplets (D_0, D_1, D_2, D_3) et (D_0, D_1, D_2, D_4) sont-ils équivalents ?

EXERCICE 54 ⋆⋆⋆

Nombres algébriques. Les définitions et résultats des chapitres 14 et 15 n'utilisent que les propriétés de corps de $\mathbb{K}$; on admet qu'ils restent valables, avec les mêmes démonstrations, lorsque $\mathbb{K}$ est remplacé par $\mathbb{Q}$. Ainsi $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, et l'on note $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(x_1, \dots, x_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des complexes $x_1, \dots, x_n$.

Un complexe α est dit *algébrique* s'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$. On note $\mathbb{Q}[\alpha] = \{P(\alpha) \mid P \in \mathbb{Q}[X]\}$, qui est le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par les puissances de α.

1. Montrer que α est algébrique si et seulement si $\mathbb{Q}[\alpha]$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie. Lorsque α annule un polynôme unitaire de $\mathbb{Q}[X]$ de degré $d \geqslant 1$, donner une famille génératrice de $\mathbb{Q}[\alpha]$ à d éléments.
2. Soit α et β deux nombres algébriques, annulant des polynômes unitaires de $\mathbb{Q}[X]$ de degrés respectifs $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$, et
$$V = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\alpha^i \beta^j)_{0\leqslant i<p,\ 0\leqslant j<q}.$$

(a) Montrer que, pour tout $v \in V$, les complexes αv et βv appartiennent à V.

(b) En déduire que $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$ sont algébriques, et annulent chacun un polynôme non nul de $\mathbb{Q}[X]$ de degré au plus pq.

(c) Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

3. Soit $\gamma = \sqrt{2}+\sqrt{3}$. On rappelle que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels (exercice 31 du chapitre 12).

(a) Montrer que la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est libre sur $\mathbb{Q}$. Dans une relation de la forme $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0$, à coefficients rationnels, on pourra supposer $c + d\sqrt{2} \neq 0$ et exprimer $\sqrt{3}$ sous la forme $x + y\sqrt{2}$, avec x, $y \in \mathbb{Q}$.

(b) Montrer l'égalité $\mathbb{Q}[\gamma] = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$, puis que γ n'annule aucun polynôme non nul de $\mathbb{Q}[X]$ de degré au plus 3, et déterminer un polynôme unitaire de degré 4 de $\mathbb{Q}[X]$ qui annule γ.

(c) En déduire qu'il existe des polynômes A, $B \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $\sqrt{2} = A(\gamma)$ et $\sqrt{3} = B(\gamma)$, et donner de tels polynômes.

4. Sans calcul, montrer que $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ annule un polynôme non nul de $\mathbb{Q}[X]$ de degré au plus 6.

EXERCICE 55 ⋆⋆⋆

Paver un rectangle par des carrés. On admet, comme à l'exercice 54, que les résultats des chapitres 14 et 15 restent valables lorsque $\mathbb{K}$ est remplacé par $\mathbb{Q}$. Soit a, $b > 0$ et $R = [0, a] \times [0, b]$. On suppose que R est pavé par des carrés $C_1, \dots, C_s$, c'est-à-dire que $R = C_1 \cup \cdots \cup C_s$, où

$$C_k = [\alpha_k, \alpha_k + c_k] \times [\beta_k, \beta_k + c_k], \qquad c_k > 0,$$

les intérieurs $]\alpha_k, \alpha_k + c_k[\times]\beta_k, \beta_k + c_k[$ étant deux à deux disjoints. Le but est de montrer que $\frac{a}{b}$ est rationnel. On note V le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ engendré par a, b et les réels α_k, β_k, c_k pour $k \in [\![1\,;s]\!]$.

1. Soit $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Pour tout rectangle $P = [x, x'] \times [y, y']$ dont les coordonnées x, x', y, y' appartiennent à V, on pose

$$\mu_f(P) = (f(x') - f(x))(f(y') - f(y)).$$

Montrer que $\mu_f(R) = \sum_{k=1}^{s} \mu_f(C_k)$. On pourra ranger les éléments de l'ensemble

$$\{0, a\} \cup \{\alpha_k, \alpha_k + c_k \mid k \in [\![1\,;s]\!]\}$$

en une suite strictement croissante $x_0 < \cdots < x_m$, faire de même pour les ordonnées, et montrer que chaque petit rectangle $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ est contenu dans un et un seul des carrés C_k.

2. On suppose $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe une application $\mathbb{Q}$-linéaire $f : V \to \mathbb{Q}$ telle que $f(a) = 1$ et $f(b) = -1$, et aboutir à une contradiction.

3. Montrer de même que $\frac{c_k}{a}$ est rationnel pour tout k. Réciproquement, montrer que si $\frac{a}{b}$ est rationnel, le rectangle R peut être pavé par des carrés.

Les cinq derniers exercices sont des problèmes à traiter en autonomie : l'énoncé fixe le but, et c'est à vous de trouver le chemin.

EXERCICE 56 ⋆⋆⋆⋆

Inégalité de Frobenius. Soit u, v, w trois endomorphismes d'un espace de dimension finie. Montrer que

$$\mathrm{rg}(u \circ v) + \mathrm{rg}(v \circ w) \leqslant \mathrm{rg}(v) + \mathrm{rg}(u \circ v \circ w).$$

EXERCICE 57 ⋆⋆⋆⋆

Avec les notations de l'exercice 52, on suppose $\dim E = 2r$. Montrer que les triplets (F_1, F_2, F_3) de sous-espaces de dimension r tels que $F_i \cap F_j = \{0\}$ pour $i \neq j$ sont tous équivalents entre eux.

EXERCICE 58 ⋆⋆⋆⋆

On admet qu'il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Montrer qu'il n'existe pas de suite $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'hyperplans de E telle que $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} H_k$.

EXERCICE 59 ⋆⋆⋆⋆

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_a : x \mapsto f(a, x)$ et $\psi_a : x \mapsto f(x, a)$, puis $F = \text{Vect}(\varphi_a)_{a\in\mathbb{R}}$ et $G = \text{Vect}(\psi_a)_{a\in\mathbb{R}}$, sous-espaces de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que, si l'un des deux est de dimension finie, l'autre l'est aussi, et qu'ils ont la même dimension.

EXERCICE 60 ⋆⋆⋆⋆

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+3} = \frac{u_n+u_{n+1}+u_{n+2}}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite (u_n) converge, et exprimer sa limite en fonction de u_0, u_1, u_2.