CORRIGÉ – CHAPITRE 16

MATRICES

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Les renvois « proposition n », « théorème n » désignent les énoncés du chapitre 16 du cours ; ceux des chapitres antérieurs sont précisés. On note A^T la transposée de A, U le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1 lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Calcul matriciel

EXERCICE 1 ⋆

1. Le calcul direct donne

$$A+B=\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix},\qquad (A+B)^2=\begin{pmatrix}9&0\\5&4\end{pmatrix},\qquad AB=\begin{pmatrix}-3&1\\0&-2\end{pmatrix},\qquad BA=\begin{pmatrix}-2&0\\5&-3\end{pmatrix},$$

et, avec $A^2=\begin{pmatrix}11&-3\\-6&2\end{pmatrix}$ et $B^2=\begin{pmatrix}3&2\\6&7\end{pmatrix}$,

$$\boxed{(A+B)^2=\begin{pmatrix}9&0\\5&4\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}8&1\\0&5\end{pmatrix}=A^2+2AB+B^2}$$

2. On trouve $A^2+AB+BA+B^2=\begin{pmatrix}9&0\\5&4\end{pmatrix}=(A+B)^2$. C'est le développement correct : par bilinéarité du produit (proposition 3), $(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$, et l'on ne peut regrouper $AB+BA$ en $2AB$ que si $AB=BA$, ce qui n'est pas le cas ici.

3. La différence vaut $(A+B)^2-(A^2+2AB+B^2)=BA-AB$.

$$\boxed{(A+B)^2=A^2+2AB+B^2 \iff AB=BA}$$

Piège. L'erreur la plus répandue est d'appliquer les identités remarquables, ou la formule du binôme, à des matrices qui ne commutent pas. Elles ne valent que dans un anneau commutatif, ou pour deux éléments qui commutent (chapitre 11).

EXERCICE 2 ⋆

1. On écrit $A=I_2+E_{12}$ et $B=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$. Comme I_2 commute avec tout, B commute avec A si et seulement si elle commute avec E_{12}. Or

$$E_{12}B=\begin{pmatrix}z&t\\0&0\end{pmatrix},\qquad BE_{12}=\begin{pmatrix}0&x\\0&z\end{pmatrix},$$

d'où $z=0$ et $t=x$.

$$\boxed{AB=BA \iff B=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}=xI_2+yE_{12},\quad (x,y)\in\mathbb{K}^2}$$

2. On a $A=aI_2+bE_{12}$ avec $b\neq 0$; pour la même raison, B commute avec A si et seulement si elle commute avec bE_{12}, donc avec E_{12} : on retrouve les matrices xI_2+yE_{12}. Si $b=0$, la matrice $A=aI_2$ est scalaire et commute avec toutes les matrices.

3. L'ensemble $\mathcal{C}(A) = \{B \mid AB = BA\}$ est le noyau de l'application linéaire $B \mapsto AB - BA$: c'est un sous-espace vectoriel. Il est stable par produit : si B, $C \in \mathcal{C}(A)$, alors

$$A(BC) = (AB)C = (BA)C = B(AC) = B(CA) = (BC)A.$$

Il contient I_n : c'est donc aussi un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

EXERCICE 3 ⋆

1. Avec $A = E_{11}$ et $B = E_{21}$, la proposition 4 donne $AB = E_{11}E_{21} = 0$, car $1 \neq 2$, et $BA = E_{21}E_{11} = E_{21} \neq 0$.

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \quad AB = 0, \quad BA = E_{21} \neq 0}$$

2. Le calcul donne

$$\boxed{AB = AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}}$$

alors que $B \neq C$. Si A était inversible, on multiplierait à gauche par A^{-1} pour obtenir $B = C$: la matrice A n'est donc pas inversible. On le voit aussi directement : ses deuxième et troisième colonnes sont égales.

3. D'après la proposition 2, la j-ième colonne de AF est AF_j, où F_j est la j-ième colonne de F. Ainsi $AF = 0$ si et seulement si chaque colonne de F appartient à $\operatorname{Ker} A$. Le système $AX = 0$ s'écrit $x = 0$, $y + z = 0$, $3x + y + z = 0$, donc $\operatorname{Ker} A = \mathbb{K}\,(0, -1, 1)$.

$$\boxed{AF = 0 \iff F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & -\beta & -\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}, \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3}$$

À retenir. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on ne simplifie pas : $AB = AC$ n'entraîne $B = C$ que si A est inversible. L'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas intègre (théorème 1).

EXERCICE 4 ⋆⋆

1. Le j-ième coefficient de la ligne LA vaut $\sum_{i=1}^{n} 1 \times a_{ij}$, c'est-à-dire la somme des coefficients de la j-ième colonne de A. Donc $LA = L$ si et seulement si toutes ces sommes valent 1.

2. Si $LA = L$ et $LB = L$, alors $L(AB) = (LA)B = LB = L$, par associativité. Si A est inversible et $LA = L$, on multiplie à droite par A^{-1} : $L = LA^{-1}$.

les matrices stochastiques en colonnes sont stables par produit et par inverse

3. La somme des coefficients de la i-ième ligne de A est le i-ième coefficient de AU, où $U = L^T$. Une matrice a toutes ses sommes de lignes égales à 1 si et seulement si $AU = U$, et le même calcul, à gauche cette fois, montre que ces matrices sont stables par produit et par inverse. On peut aussi transposer : $AU = U$ équivaut à $LA^T = L$.

À retenir. Une propriété des sommes de lignes ou de colonnes se traduit par un produit par U ou par L : c'est une égalité matricielle, que l'on manipule ensuite sans revenir aux coefficients.

EXERCICE 5 ⋆⋆

1. On écrit $A = \sum_{p,q} a_{pq} E_{pq}$. Par la proposition 4, $E_{ij} E_{pq} E_{k\ell}$ est nul sauf si $p = j$ et $q = k$, auquel cas il vaut $E_{i\ell}$. De même, $AE_{ij} = \sum_{p} a_{pi} E_{pj}$, dont le seul coefficient diagonal éventuellement non nul est celui d'indice (j, j), égal à a_{ji}.

$$\boxed{E_{ij} A E_{k\ell} = a_{jk} E_{i\ell}, \qquad \operatorname{tr}(AE_{ij}) = a_{ji}}$$

2. Si $\operatorname{tr}(AM) = 0$ pour toute M, on prend $M = E_{ij}$: $a_{ji} = 0$ pour tous i, j, donc $A = 0$.

3. Les matrices scalaires λI_n commutent avec tout. Réciproquement, si A commute avec toutes les matrices, elle commute avec E_{ij}. Or $AE_{ij} = \sum_{p} a_{pi} E_{pj}$ et $E_{ij} A = \sum_{q} a_{jq} E_{iq}$. En identifiant les coefficients d'indice (p, j) pour $p \neq i$, on obtient $a_{pi} = 0$; en identifiant ceux d'indice (i, j), on obtient $a_{ii} = a_{jj}$. Ainsi A est diagonale, de coefficients diagonaux tous égaux.

$$\boxed{\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall M,\ AM = MA\} = \{\lambda I_n \mid \lambda \in \mathbb{K}\}}$$

À retenir. Le centre de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est réduit aux matrices scalaires. Les matrices E_{ij} servent de « sondes » : multiplier par E_{ij} isole une ligne ou une colonne.

EXERCICE 6 ⋆⋆

1. Le coefficient diagonal d'indice (j, j) de $A^T A$ vaut $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ij}$.

$$\boxed{\operatorname{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij}^2}$$

2. Si $A^T A = 0$, sa trace est nulle ; c'est une somme de carrés de réels, donc chacun est nul et $A = 0$.

3. Le résultat tombe en défaut sur $\mathbb{C}$. La matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{vérifie} \quad A^T A = A^2 = \begin{pmatrix} 1-1 & \mathrm{i}-\mathrm{i} \\ \mathrm{i}-\mathrm{i} & -1+1 \end{pmatrix} = 0,$$

alors que $A \neq 0$.

Piège. L'argument repose sur le fait qu'une somme de carrés de réels nuls n'est nulle que si chaque terme l'est. Dans $\mathbb{C}$, on a $1^2 + \mathrm{i}^2 = 0$; c'est pourquoi le chapitre 19 remplacera A^T par la transposée conjuguée lorsqu'il travaillera sur $\mathbb{C}$.

EXERCICE 7 ⋆⋆

1. Par la proposition 5, $(AB)^T = B^T A^T = BA$. Donc AB est symétrique si et seulement si $AB = BA$.

2. On a $(A^2)^T = (A^T)^2 = (-A)^2 = A^2$. Le coefficient diagonal a_{ii} vérifie $a_{ii} = -a_{ii}$, donc $2a_{ii} = 0$ et $a_{ii} = 0$.

3. Pour tout X, le réel $X^T A X$ est une matrice 1×1, égale à sa transposée $X^T A^T X$. Si A est antisymétrique, il est donc égal à son opposé, donc nul. Réciproquement, supposons $X^T A X = 0$ pour tout X. Avec $X = e_i$, on obtient $a_{ii} = 0$; avec $X = e_i + e_j$, on obtient $a_{ii} + a_{ij} + a_{ji} + a_{jj} = 0$, soit $a_{ij} = -a_{ji}$.

$$\boxed{(\forall X \in \mathbb{R}^n,\ X^T A X = 0) \iff A^T = -A}$$

À retenir. La forme $X \mapsto X^T A X$ ne voit que la partie symétrique $\frac{1}{2}(A + A^T)$ de A, dans la décomposition $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$ de la proposition 7. Cette remarque reviendra au chapitre 19.

EXERCICE 8 ⋆

Première matrice. On trouve

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2A \qquad \text{et} \qquad A^3 = 2A^2 = 4A.$$

On conjecture $A^n = 2^{n-1}A$; c'est vrai pour $n = 1$, et si $A^n = 2^{n-1}A$, alors $A^{n+1} = 2^{n-1}A^2 = 2^nA$.

Seconde matrice. On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$. On conjecture $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$; si c'est vrai au rang n, alors

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 + 2(2^n - 1) \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \qquad (n \geqslant 1)}$$

EXERCICE 9 ⋆

1. Les relations s'écrivent $X_{n+1} = AX_n$ avec la matrice ci-dessous, et une récurrence immédiate donne $X_n = A^nX_0$.

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad X_n = A^nX_0}$$

2. On a $N = E_{12} + E_{23}$, $N^2 = E_{13}$ par la proposition 4, et $N^k = 0$ pour $k \geqslant 3$. Comme $3I_3$ commute avec N, la formule du binôme s'applique (chapitre 3) et ne garde que trois termes : pour $n \geqslant 2$,

$$\boxed{A^n = 3^nI_3 + n3^{n-1}N + \binom{n}{2}3^{n-2}N^2 = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & \binom{n}{2}3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}}$$

et cette formule reste vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, le coefficient binomial étant alors nul.

3. Avec $X_0 = (1, 2, 7)$,

$$\boxed{a_n = 3^n + 2n3^{n-1} + \frac{7n(n-1)}{2}3^{n-2}, \qquad b_n = 2 \cdot 3^n + 7n3^{n-1}, \qquad c_n = 7 \cdot 3^n}$$

Par exemple, $a_5 = 243 + 810 + 1890 = 2943$, ce que confirme le calcul direct des itérés.

EXERCICE 10 ⋆⋆

1. Par la proposition 4, $N^k = \sum_{i=1}^{d-k} E_{i,i+k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant d-1$: c'est la matrice dont la k-ième sur-diagonale est formée de 1. En particulier $N^k = 0$ pour $k \geqslant d$. La somme $\sum_{k=0}^{d-1} N^k$ a donc des 1 sur la diagonale et sur toutes les sur-diagonales : c'est A.

2. La somme télescopique donne $(I_d - N)A = \sum_{k=0}^{d-1}(N^k - N^{k+1}) = I_d - N^d = I_d$. Par le théorème 3, une inverse à gauche est une inverse.

$$\boxed{A^{-1} = I_d - N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}}$$

3. On écrit $A^n = \sum_{k=0}^{d-1} c_k(n) N^k$. Pour $n = 2$, $A^2 = \sum_k (k+1)N^k$, car le coefficient de N^k dans $\left(\sum N^j\right)^2$ compte les couples (j, j') de somme k. Plus généralement, $A^{n+1} = A^n A$ donne $c_k(n+1) = \sum_{j=0}^{k} c_j(n)$. On montre par récurrence que $c_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$: c'est vrai pour $n = 1$, et la formule de sommation $\sum_{j=0}^{k} \binom{n+j-1}{j} = \binom{n+k}{k}$, qui se démontre par récurrence sur k avec la relation de Pascal (chapitre 3), assure l'hérédité.

$$\boxed{A^n = \sum_{k=0}^{d-1} \binom{n+k-1}{k} N^k \qquad (n \geqslant 1)}$$

Pour $d = 4$, on retrouve les sur-diagonales $1, 2, 3, 4$ de A^2 et $1, 3, 6, 10$ de A^3.

EXERCICE 11 ⋆⋆

1. On a $U^2 = (J - I_4)^2 = J^2 - 2J + I_4$, et $J^2 = 4J$, car chaque coefficient de J^2 est une somme de quatre produits égaux à 1. Donc $U^2 = 2J + I_4 = 2U + 3I_4$.

$$\boxed{U^2 = 2U + 3I_4, \qquad \alpha = 2, \quad \beta = 3}$$

2. On pose $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$. Si $U^k = \alpha_k I_4 + \beta_k U$, alors $U^{k+1} = \alpha_k U + \beta_k(2U + 3I_4)$, d'où

$$\boxed{\alpha_{k+1} = 3\beta_k, \qquad \beta_{k+1} = \alpha_k + 2\beta_k}$$

3. En substituant, $\beta_{k+2} = \alpha_{k+1} + 2\beta_{k+1} = 2\beta_{k+1} + 3\beta_k$. L'équation caractéristique $r^2 - 2r - 3 = 0$ a pour racines 3 et -1 (chapitre 7), et les conditions $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 1$ fixent les constantes ; puis $\alpha_k = 3\beta_{k-1}$ pour $k \geqslant 1$, formule qui convient aussi pour $k = 0$.

$$\boxed{\beta_k = \frac{3^k - (-1)^k}{4}, \qquad \alpha_k = \frac{3^k + 3(-1)^k}{4}}$$

4. La relation $U^2 - 2U = 3I_4$ s'écrit $U \cdot \frac{1}{3}(U - 2I_4) = I_4$.

$$\boxed{U^{-1} = \frac{1}{3}(U - 2I_4) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

On peut remarquer que la formule de la question 3, prise en $k=-1$, donne $\alpha_{-1}=-\dfrac{2}{3}$ et $\beta_{-1}=\dfrac{1}{3}$: c'est exactement U^{-1}.

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. Le calcul donne $A^2=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}=2I_3-A$. Donc $A(A+I_3)=2I_3$, et $A\cdot\dfrac{1}{2}(A+I_3)=I_3$.

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{2}(A+I_3)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}}$$

2. On trouve $B^3-B=4I_3$, soit $B\cdot\dfrac{1}{4}(B^2-I_3)=I_3$.

$$\boxed{B^{-1}=\frac{1}{4}(B^2-I_3)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-4&2\\1&-2&-1\\1&2&-1\end{pmatrix}}$$

3. On trouve $C^2-3C+2I_3=0$, soit $C(3I_3-C)=2I_3$.

$$\boxed{C^{-1}=\frac{1}{2}(3I_3-C)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&-1&1\\1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}}$$

4. On pose $u_0=0$, $v_0=1$. Si $C^n=u_nC+v_nI_3$, alors $C^{n+1}=u_n(3C-2I_3)+v_nC$, d'où $u_{n+1}=3u_n+v_n$ et $v_{n+1}=-2u_n$. Ainsi $u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n$, d'équation caractéristique $r^2-3r+2=0$, de racines 1 et 2 ; avec $u_0=0$ et $u_1=1$, on obtient $u_n=2^n-1$, puis $v_n=-2u_{n-1}=2-2^n$.

$$\boxed{C^n=(2^n-1)C+(2-2^n)I_3}$$

Pour $n=4$, on trouve $15C-14I_3$, ce que confirme le calcul direct de C^4.
À retenir. Une relation polynomiale $C^2=3C-2I_3$ ramène toute puissance de C à une combinaison de C et I_3 ; les coefficients obéissent à une suite récurrente linéaire, dont l'équation caractéristique reproduit la relation.

EXERCICE 13 ⋆⋆

1. Soit $A^s=0$ et $B^t=0$. Comme A et B commutent, $(AB)^s=A^sB^s=0$, et la formule du binôme s'applique :

$$(A+B)^{s+t-1}=\sum_{k=0}^{s+t-1}\binom{s+t-1}{k}A^kB^{s+t-1-k}.$$

Dans chaque terme, ou bien $k\geqslant s$ et $A^k=0$, ou bien $k\leqslant s-1$ et $s+t-1-k\geqslant t$, donc $B^{s+t-1-k}=0$. La somme est nulle.

2. Les matrices $A=E_{12}$ et $B=E_{21}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sont nilpotentes, mais $AB=E_{11}$ vérifie $(AB)^k=E_{11}\neq 0$, et $(A+B)^2=E_{11}+E_{22}=I_2$: ni le produit ni la somme ne sont nilpotents.

3. La somme télescopique donne $(I_n-A)(I_n+A+\cdots+A^{s-1})=I_n-A^s=I_n$.

$$\boxed{(I_n-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{s-1}A^k}$$

On reconnaît la somme géométrique $1+x+\cdots+x^{s-1}=\dfrac{1-x^s}{1-x}$; ici, le terme x^s disparaît, et la série géométrique « s'arrête d'elle-même ». L'exercice 10 en est un cas particulier.

EXERCICE 14 ⋆⋆

1. Le calcul par blocs, en regardant les lignes et colonnes 1 et 3 d'une part et l'indice 2 d'autre part, donne

$$\boxed{M(a,b)M(a',b') = M(aa'-bb',\ ab'+ba')}$$

2. Si $(a,b) \neq (0,0)$, la question 1 donne $M(a,b)M(a',b') = M(1,0) = I_3$ avec

$$a' = \frac{a}{a^2+b^2}, \qquad b' = \frac{-b}{a^2+b^2}.$$

Si $(a,b) = (0,0)$, la première colonne de $M(0,0)$ est nulle, et $M(0,0)$ n'est pas inversible.

$$\boxed{M(a,b) \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \iff (a,b) \neq (0,0), \qquad M(a,b)^{-1} = M\Big(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\Big)}$$

3. Le produit de la question 1 reproduit $(a+\mathrm{i}b)(a'+\mathrm{i}b') = (aa'-bb') + \mathrm{i}(ab'+ba')$, et l'inverse reproduit $\dfrac{1}{a+\mathrm{i}b} = \dfrac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}$. L'application $a+\mathrm{i}b \mapsto M(a,b)$ est donc un morphisme injectif du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(\mathrm{GL}_3(\mathbb{R}), \times)$. Géométriquement, $M(a,b)$ agit dans le plan des première et troisième coordonnées comme la similitude $z \mapsto (a+\mathrm{i}b)z$ du chapitre 4, et laisse fixe le deuxième axe.
Piège. Ce n'est pas un morphisme d'anneaux : $M(a,b) + M(a',b') = M(a+a', b+b') + E_{22}$, à cause du coefficient central égal à 1. Seule la structure multiplicative est transportée.

EXERCICE 15 ⋆⋆⋆

1. On a $M(a,b,c,d) = aI_4 + bI + cJ' + dK$, et l'application $(a,b,c,d) \mapsto M(a,b,c,d)$ est linéaire et injective, puisque la première colonne de $M(a,b,c,d)$ est (a,b,c,d). Son image $\mathbb{H}$ est donc un sous-espace vectoriel.

$$\boxed{\mathbb{H} = \mathrm{Vect}(I_4, I, J', K), \qquad \dim \mathbb{H} = 4}$$

2. Le calcul donne

$$\boxed{I^2 = J'^2 = K^2 = -I_4, \qquad IJ' = K = -J'I, \qquad J'K = I = -KJ', \qquad KI = J' = -IK}$$

Par bilinéarité, le produit de deux éléments de $\mathbb{H}$ est combinaison des produits ci-dessus et de I_4, donc appartient à $\mathbb{H}$; comme $I_4 \in \mathbb{H}$ et que $\mathbb{H}$ est stable par différence, c'est un sous-anneau de $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$. Il n'est pas commutatif, puisque $IJ' = K \neq -K = J'I$.

3. Le calcul donne $M^T M = (a^2+b^2+c^2+d^2)I_4$. Si $M \neq 0$, le réel $N = a^2+b^2+c^2+d^2$ est non nul et

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\, M^T = \frac{1}{N} M(a,-b,-c,-d) \in \mathbb{H}}$$

4. Soit $X = bI + cJ' + dK$ avec $b^2+c^2+d^2 = 1$. En développant, les termes croisés se compensent deux à deux, puisque $IJ' + J'I = 0$, et de même pour les autres paires :

$$X^2 = b^2I^2 + c^2J'^2 + d^2K^2 = -(b^2+c^2+d^2)I_4 = -I_4.$$

Il y a ainsi une infinité de solutions, une pour chaque point de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.
À retenir. Dans un corps, le polynôme X^2+1 a au plus deux racines (chapitre 13). La démonstration utilise la factorisation $P = (X-\alpha)Q$ et le fait que l'évaluation est un morphisme, ce qui exige la commutativité. L'anneau $\mathbb{H}$ des quaternions de Hamilton vérifie tous les axiomes d'un corps sauf la commutativité ; on ne l'appelle donc pas un corps, et le résultat du chapitre 13 n'y vaut plus.

EXERCICE 16 ⋆⋆⋆

1. Le coefficient d'indice (i,j) de U^TU est $\sum_{k=1}^{n} u_{ki}u_{kj}$, où $u_{ki} = 1$ si $k \leqslant i$ et 0 sinon. Le produit $u_{ki}u_{kj}$ vaut 1 exactement lorsque $k \leqslant \min(i,j)$; la somme vaut donc $\min(i,j)$.

$$\boxed{A = U^TU}$$

2. D'après l'exercice 10, U est inversible d'inverse $I_n - N$, avec $N = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}$. Par la proposition 8, A est inversible, et

$$A^{-1} = U^{-1}(U^T)^{-1} = (I_n - N)(I_n - N^T) = I_n - N - N^T + NN^T.$$

Or $NN^T = \sum_{i,j} E_{i,i+1}E_{j+1,j} = \sum_{i=1}^{n-1} E_{ii}$, par la proposition 4.

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Le dernier coefficient diagonal vaut 1, et non 2, car NN^T n'a que $n-1$ coefficients diagonaux non nuls.

3. Pour $n = 3$, on vérifie

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

À retenir. Écrire une matrice symétrique comme produit U^TU d'une matrice triangulaire par sa transposée ramène son inversion à celle d'une matrice triangulaire, beaucoup plus simple.

EXERCICE 17 ⋆⋆⋆

On note U la colonne dont tous les coefficients valent 1 : une matrice A à coefficients positifs ou nuls appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $AU = U$.

1. Si A, $B \in \mathcal{D}$, les coefficients de AB sont des sommes de produits de réels positifs, donc positifs, et $ABU = AU = U$.

2. Une matrice de permutation P a des coefficients positifs et une somme égale à 1 sur chaque ligne : $P \in \mathcal{D}$. Ses colonnes sont des vecteurs $e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}$ deux à deux distincts de la base canonique ; le coefficient (i,j) de P^TP est la somme des produits terme à terme de la i-ième et de la j-ième colonne, qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. Ainsi $P^TP = I_n$ et $P^{-1} = P^T$, qui est encore une matrice de permutation, donc appartient à $\mathcal{D}$.

3. Soit $A \in \mathcal{D}$ inversible d'inverse $B \in \mathcal{D}$. Pour $i \neq k$, le coefficient d'indice (i,k) de $AB = I_n$ s'écrit $\sum_j a_{ij}b_{jk} = 0$: une somme de termes positifs nulle, donc $a_{ij}b_{jk} = 0$ pour tout j. Soit j tel que $a_{ij} > 0$; alors $b_{jk} = 0$ pour tout $k \neq i$, et la ligne j de B, de somme 1, est égale à ${e_i}^T$.

Si la ligne i de A contenait deux coefficients non nuls, d'indices $j \neq j'$, les lignes j et j' de B seraient toutes deux égales à ${e_i}^T$, et B ne serait pas inversible (théorème 3, ses lignes étant liées). Chaque ligne de A contient donc un seul coefficient non nul, égal à 1 puisque la somme de la ligne vaut 1. Enfin, deux lignes de A ne peuvent avoir leur 1 dans la même colonne, sinon elles seraient égales ; les n lignes occupent donc n colonnes distinctes, et chaque colonne contient exactement un 1.

$$\boxed{\{A \in \mathcal{D} \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} \in \mathcal{D}\} = \{\text{matrices de permutation}\}}$$

Piège. Une matrice de $\mathcal{D}$ peut être inversible sans que son inverse soit dans $\mathcal{D}$: pour $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, l'inverse $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ a des sommes de lignes égales à 1, mais des coefficients négatifs.

Matrices et applications linéaires

EXERCICE 18 ⋆

1. Les images des vecteurs de la base canonique sont $f(e_1) = (1,0,0)$, $f(e_2) = (0,1,1)$ et $f(e_3) = (-1,0,0)$; ce sont les colonnes de A.

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

2. Le calcul donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On conjecture la formule ci-dessous. Elle est vraie pour $n = 1$, et si elle l'est au rang n, le produit $A^n A$ a pour deuxième colonne $(-(n-1)-1, 1, 1) = (-n, 1, 1)$, les autres colonnes restant inchangées.

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & -(n-1) & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (n \geqslant 1)}$$

3. La matrice de f^n est A^n (théorème 2), d'où

$$\boxed{f^n(x,y,z) = (x-(n-1)y-z,\ y,\ y) \qquad (n \geqslant 1)}$$

EXERCICE 19 ⋆

La linéarité de chacune des trois applications découle de celle de l'évaluation et de la dérivation.

(i) Les images de 1, X, X^2, X^3 sont $(1,0)$, $(-1,1)$, $(1,2)$ et $(-1,6)$. Les deux lignes de la matrice ne sont pas proportionnelles, donc $\operatorname{rg} u = 2 = \dim \mathbb{K}^2$: l'application u est surjective, mais non injective, puisque $\dim \mathbb{K}_3[X] = 4 > 2$.

$$\boxed{\operatorname{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad u \text{ surjective, non injective}}$$

(ii) On a $v(X^k) = kX^k$. Les constantes sont dans le noyau, et 1 n'est pas dans l'image : v n'est ni injective ni surjective.

$$\boxed{\operatorname{Mat}(v) = \operatorname{diag}(0,1,2,\dots,n)}$$

(iii) On a $w(X^k) = 2X^k + kX^{k-1}(X-1) = (k+2)X^k - kX^{k-1}$. La matrice est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $2, 3, 4, 5$, tous non nuls : elle est inversible (proposition 12), et w est un automorphisme.

$$\boxed{\operatorname{Mat}(w) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad w \text{ bijective}}$$

EXERCICE 20 ⋆

1. La matrice A est triangulaire à diagonale non nulle, donc inversible (proposition 12). On résout $AX = Y$ en remontant : $z = c$, $y = b - 2c$, $x = a - b + 2c$.

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

2. On a $\Delta(1) = 1$, $\Delta(X) = 1 + X$ et $\Delta(X^2) = 2X + X^2$: la matrice de Δ dans la base canonique est exactement A.

3. La matrice de Δ est inversible, donc Δ est un automorphisme (théorème 3). Les coordonnées de la solution sont $A^{-1}(1, 1, 2) = (4, -3, 2)$.

$$\boxed{\Delta(P) = 1 + X + 2X^2 \iff P = 4 - 3X + 2X^2}$$

On vérifie : $P + P' = 4 - 3X + 2X^2 - 3 + 4X = 1 + X + 2X^2$.

EXERCICE 21 ⋆

1. On aurait $3 = \mathrm{rg} I_3 = \mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{rg} A \leqslant 2$, ce qui est impossible.

$$\boxed{\text{il n'existe pas de } B \text{ telle que } AB = I_3}$$

2. On écrit $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}$. L'égalité $CA = I_2$ donne $c_2 + c_3 = 1$, $c_1 + c_3 = 0$, $c_5 + c_6 = 0$ et $c_4 + c_6 = 1$. En prenant $c_3 = s$ et $c_6 = t$ comme paramètres :

$$\boxed{CA = I_2 \iff C = \begin{pmatrix} -s & 1-s & s \\ 1-t & -t & t \end{pmatrix}, \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2}$$

Piège. Le théorème 3, qui fait d'une inverse d'un côté une inverse des deux côtés, ne vaut que pour les matrices carrées. Ici, A a une infinité d'inverses à gauche et aucune inverse à droite.

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. L'application $u \mapsto (u_0, u_1)$ est un isomorphisme de F sur $\mathbb{R}^2$, puisqu'une suite de F est déterminée par ses deux premiers termes, que l'on peut choisir librement. On note a et b les suites de F de premiers termes $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

$$\boxed{\mathcal{B} = (a, b), \qquad a = (1, 0, 1, 1, 2, 3, \dots), \quad b = (0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots)}$$

2. L'application T est linéaire, et si $u \in F$, la suite $v = T(u)$ vérifie

$$v_{n+2} = u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} = v_{n+1} + v_n,$$

donc $T(u) \in F$.

3. La suite $T(a)$ a pour premiers termes $(a_1, a_2) = (0, 1)$, donc $T(a) = b$; la suite $T(b)$ a pour premiers termes $(1, 1)$, donc $T(b) = a + b$.

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Cette matrice est inversible, car $0 \times 1 - 1 \times 1 = -1 \neq 0$ (proposition 9), d'inverse $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par le théorème 3, T est un automorphisme de F : on peut « remonter » une suite de Fibonacci, en posant $u_{-1} = u_1 - u_0$.

EXERCICE 23 ⋆⋆

1. Si $\sum_k \lambda_k f_k = 0$, alors, en multipliant par $\mathrm{e}^{-\alpha x}$, le polynôme $\sum_k \lambda_k X^k$ s'annule sur tout $\mathbb{R}$, donc il est nul et tous les λ_k sont nuls. La famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre et engendre E.

$$\boxed{\dim E = n+1}$$

2. On a $f_k' = k f_{k-1} + \alpha f_k$, avec la convention $f_{-1} = 0$. Par linéarité, $D(E) \subset E$, et

$$\boxed{\mathrm{Mat}(D) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & \\ & \alpha & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha & n \\ & & & & \alpha \end{pmatrix}}$$

3. La matrice est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux tous égaux à α. Elle est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$ (proposition 12), et le théorème 3 conclut. Pour $\alpha = 0$, on retrouve d'ailleurs que les constantes ont une dérivée nulle.

4. Avec $\alpha = 1$ et $n = 2$, la matrice de D est celle de l'exercice 20, dont on connaît l'inverse. Une primitive de f_2 est $D^{-1}(f_2)$, de coordonnées $A^{-1}(0,0,1) = (2,-2,1)$.

$$\boxed{\int x^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x + C}$$

On vérifie en dérivant : $(2x-2)\mathrm{e}^x + (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x$.
À retenir. Inverser la matrice de la dérivation sur un espace stable, c'est trouver une primitive. Les deux intégrations par parties du chapitre 6 sont ici remplacées par la résolution d'un système triangulaire.

EXERCICE 24 ⋆⋆

1. L'application f est linéaire, et $f(X^k) = k(k-1)X^k + 2kX^k = k(k+1)X^k$: elle envoie $\mathbb{K}_3[X]$ dans lui-même.

$$\boxed{\mathrm{Mat}(f) = \mathrm{diag}(0,2,6,12), \qquad \mathrm{Ker}\, f = \mathbb{K}_0[X], \qquad \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(X, X^2, X^3)}$$

2. L'application g est linéaire. Les termes de degré 3 se compensent :

$$g(1) = -1 - 2X, \qquad g(X) = -1 - X - X^2, \qquad g(X^2) = 2X^3 - 2X - 2X^3 - X^2 = -2X - X^2.$$

Donc g est un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$, de matrice

$$G = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'échelonnement $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ donne la ligne $(0,1,-2)$, puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ donne $(0,0,-3)$: trois pivots, donc $\mathrm{rg} G = 3$ (théorème 8).

$$\boxed{g \text{ est un automorphisme de } \mathbb{K}_2[X]}$$

EXERCICE 25 ⋆⋆

1. Par la proposition 4, $AE_{11} = aE_{11} + cE_{21}$, $AE_{21} = bE_{11} + dE_{21}$, $AE_{12} = aE_{12} + cE_{22}$ et $AE_{22} = bE_{12} + dE_{22}$.

$$\boxed{\mathrm{Mat}(L_A) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}}$$

2. On ordonne la base colonne par colonne : $(E_{11}, \dots, E_{n1}, E_{12}, \dots, E_{n2}, \dots, E_{1n}, \dots, E_{nn})$. Comme la j-ième colonne de AM est A fois la j-ième colonne de M, la matrice de L_A est diagonale par blocs, avec n blocs égaux à A. L'image de L_A est formée des matrices dont chaque colonne est dans $\mathrm{Im}\, A$, et ce sous-espace est isomorphe à $(\mathrm{Im}\, A)^n$.

$$\boxed{\mathrm{rg} L_A = n\, \mathrm{rg} A}$$

3. Dans une base de E, l'endomorphisme $v \mapsto u \circ v$ correspond à $M \mapsto AM$, avec $A = \mathrm{Mat}(u)$, par l'isomorphisme du théorème 2. Son rang est donc $n\,\mathrm{rg} u$, où $n = \dim E$.

EXERCICE 26 ⋆⋆

1. La formule du binôme donne $\tau_a(X^j) = (X+a)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} a^{j-i} X^i$.

$$\boxed{A_a = \left(\binom{j}{i} a^{j-i}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}, \text{ triangulaire supérieure}}$$

avec la convention $\binom{j}{i} = 0$ pour $i > j$.

2. On a $\tau_a(\tau_b(P)) = \tau_a(P(X+b)) = P(X+a+b)$, donc $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{a+b}$, et $A_a A_b = A_{a+b}$ (théorème 2). Comme $A_0 = I_{n+1}$, on a $A_a A_{-a} = I_{n+1}$.

$$\boxed{A_a^{-1} = A_{-a}, \qquad A_1^k = A_k \quad (k \in \mathbb{Z})}$$

3. Pour $n = 3$, on obtient

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_1^{-1} = A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le coefficient d'indice (i,j) du produit $A_1 A_{-1}$ exprime l'identité

$$\boxed{\sum_{k=i}^{j} (-1)^{j-k} \binom{k}{i} \binom{j}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}}$$

c'est une *formule d'inversion* des coefficients binomiaux, obtenue sans aucun calcul de sommes.

EXERCICE 27 ⋆⋆

1. L'application φ est linéaire. Si $\varphi(P) = 0$, le polynôme P, de degré au plus n, a $n+1$ racines distinctes, donc il est nul (chapitre 13) : φ est injective. Comme $\dim \mathbb{K}_n[X] = \dim \mathbb{K}^{n+1} = n+1$, c'est un isomorphisme.

2. Pour $P = \sum_j a_j X^j$, la i-ième coordonnée de $\varphi(P)$ est $\sum_j x_i^j a_j$: la matrice de φ dans les bases canoniques est V. Elle représente un isomorphisme, elle est donc inversible (théorème 2).

3. La matrice V^{-1} est celle de φ^{-1}. Sa i-ième colonne est formée des coordonnées du polynôme $\varphi^{-1}(e_i)$, c'est-à-dire de l'unique polynôme de degré au plus n qui vaut 1 en x_i et 0 en les autres x_k.

la i-ième colonne de V^{-1} contient les coefficients du polynôme de Lagrange L_i

À retenir. L'interpolation de Lagrange du chapitre 13 n'est autre que l'inversion de la matrice de Vandermonde. Le chapitre 17 calculera le déterminant de cette matrice.

EXERCICE 28 ⋆⋆⋆

1. Supposons $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x) = 0$, et que les λ_k ne soient pas tous nuls ; soit m le plus petit indice tel que $\lambda_m \neq 0$. En appliquant f^{n-1-m}, tous les termes d'indice $k > m$ deviennent $f^{n-1-m+k}(x) = 0$, car $n-1-m+k \geqslant n$, et il reste $\lambda_m f^{n-1}(x) = 0$, ce qui contredit $f^{n-1}(x) \neq 0$. La famille est libre, de cardinal $n = \dim E$: c'est une base.

2. L'image de chaque vecteur de $\mathcal{B}$ est le suivant, et l'image du dernier est $f^n(x) = 0$.

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n-1} E_{k+1,k}, \qquad \mathrm{rg} f = n-1}$$

3. Deux tels endomorphismes ont la même matrice ci-dessus, chacun dans une base convenable. Par le théorème 4, leurs matrices dans une base quelconque sont semblables à cette matrice, donc semblables entre elles.

EXERCICE 29 ⋆⋆⋆

1. Supposons que u stabilise le drapeau (F_i). Par le théorème de la base incomplète (chapitre 15), on construit une base $(e_1, \dots, e_n)$ telle que $F_i = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ pour tout i, en complétant à chaque étape une base de F_{i-1} par un vecteur de $F_i \setminus F_{i-1}$. Alors $u(e_j) \in F_j$ est combinaison de $e_1, \dots, e_j$: la j-ième colonne de la matrice n'a de coefficients non nuls que sur les lignes 1 à j, et la matrice est triangulaire supérieure. Réciproquement, si la matrice dans une base $(e_1, \dots, e_n)$ est triangulaire supérieure, les sous-espaces $F_i = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ forment un drapeau complet stable par u.

2. On prend le drapeau $F_i = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ associé à la base canonique. Comme A est triangulaire à diagonale nulle, $Ae_j = \sum_{i<j} a_{ij} e_i \in F_{j-1}$, donc $u_A(F_i) \subset F_{i-1}$. Par récurrence, $u_A^k(E) \subset F_{n-k}$, et en particulier $u_A^n(E) \subset F_0 = \{0\}$.

A triangulaire supérieure à diagonale nulle $\implies A^n = 0$

À retenir. Chaque application de A fait descendre d'un cran dans le drapeau : au bout de n crans, il ne reste rien. C'est la version géométrique du calcul $N^d = 0$ de l'exercice 10.

EXERCICE 30 ⋆

1. Pour $\mathcal{C}$, la relation $a(1,1,1)+b(1,1,0)+c(1,0,0)=(x,y,z)$ donne $a=z$, $b=y-z$, $c=x-y$: tout vecteur a des coordonnées uniques, donc $\mathcal{C}$ est une base. Pour $\mathcal{B}$, on résout de même $\alpha b_1+\beta b_2+\gamma b_3+\delta b_4=(x,y,z,t)$: la deuxième coordonnée donne $\gamma=y$, la troisième $\beta=z-y$, la quatrième $\delta=t-z$, puis la première $\alpha=x-y-t+z$. La solution est unique : $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

2. Avec $u=(1,-2,5,6)$, on obtient $\gamma=-2$, $\beta=7$, $\delta=1$ et $\alpha=1+2-6+5=2$. Avec la matrice de passage P de la base canonique à $\mathcal{B}$, la proposition 13 donne le même résultat sous la forme $X'=P^{-1}X$, où

$$P=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&0&1&0\\0&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix},\qquad P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&-1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}.$$

$$\boxed{u=2b_1+7b_2-2b_3+b_4}$$

3. La matrice de f dans les bases canoniques se lit sur les coefficients de la définition. Pour obtenir $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, on calcule les images $f(b_j)$ et on les décompose dans $\mathcal{C}$ grâce aux formules de la question 1 : par exemple $f(b_1)=(1,1,-1)$ a pour coordonnées $(-1,2,0)$.

$$\boxed{\mathrm{Mat}(f)=\begin{pmatrix}1&-2&2&5\\1&-2&3&4\\-1&0&2&-3\end{pmatrix},\qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)=\begin{pmatrix}-1&-1&-2&-4\\2&8&8&9\\0&0&0&1\end{pmatrix}}$$

On contrôle ce résultat par la formule $Q^{-1}\mathrm{Mat}(f)P$ du théorème 4, où Q est la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{C}$.

EXERCICE 31 ⋆⋆

1. En notant X'_j les colonnes des coordonnées de e'_j dans $\mathcal{B}$, on calcule $AX'_1=(0,1,1)=X'_1$, $AX'_2=(-1,1,-1)=-X'_2$ et $AX'_3=(-2,2,0)=-2X'_3$. La famille $\mathcal{B}'$ est libre : si $ae'_1+be'_2+ce'_3=0$, alors $b+c=0$, $a-b-c=0$, $a+b=0$, d'où $a=0$, puis $b=0$ et $c=0$. C'est donc une base de E.

$$\boxed{D=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)=\mathrm{diag}(1,-1,-2)}$$

2. Les colonnes de la matrice de passage sont les coordonnées des e'_j, et $D=P^{-1}AP$ (théorème 4).

$$\boxed{P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-1&-1\\1&1&0\end{pmatrix},\qquad P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&-1&1\\2&1&-1\end{pmatrix},\qquad A=PDP^{-1}}$$

3. On a $A^n=PD^nP^{-1}$, car les facteurs $P^{-1}P$ intermédiaires se simplifient.

$$\boxed{A^n=\begin{pmatrix}2(-2)^n-(-1)^n & (-2)^n-(-1)^n & (-1)^n-(-2)^n\\1+(-1)^n-2(-2)^n & 1+(-1)^n-(-2)^n & (-2)^n-(-1)^n\\1-(-1)^n & 1-(-1)^n & (-1)^n\end{pmatrix}}$$

Pour $n=0$, on retrouve I_3, et pour $n=1$, la matrice A.

EXERCICE 32 ⋆⋆

1. En notant F la matrice de f, le calcul donne $F^2 = F$: f est un projecteur, et $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$ (chapitre 14). Le noyau est la droite dirigée par $(2, 4, -5)$. L'image est engendrée par les colonnes $(3, 4, -5)$ et $(-4, -7, 10)$; c'est le plan d'équation $x - 2y - z = 0$, qui contient $(2, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$.

$$\boxed{\text{dans la base } ((2,1,0),(1,0,1),(2,4,-5)), \quad \operatorname{Mat}(f) = \operatorname{diag}(1,1,0)}$$

2. En notant G la matrice de g, on remarque que $G = 2F - I_3$. Alors $G^2 = 4F^2 - 4F + I_3 = I_3$: g est une symétrie, et dans la même base,

$$\boxed{g = 2f - \mathrm{id}, \qquad \operatorname{Mat}(g) = \operatorname{diag}(1,1,-1)}$$

C'est la symétrie par rapport au plan $\operatorname{Im} f$ parallèlement à la droite $\operatorname{Ker} f$, associée au projecteur f.

EXERCICE 33 ⋆⋆

On note $N = (1, -2, 1)$ et $d = (-1, 1, 2)$. Un vecteur v se décompose en $v = (v - \lambda d) + \lambda d$, avec $v - \lambda d$ dans le plan, c'est-à-dire $N^T(v - \lambda d) = 0$. Comme $N^T d = -1 - 2 + 2 = -1$, on obtient $\lambda = -N^T v$, et $p(v) = v + (N^T v)\, d$. La matrice de p est donc $I_3 + dN^T$.

$$\boxed{\operatorname{Mat}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}}$$

Premier contrôle. On vérifie que la matrice M obtenue envoie d sur 0 et fixe les vecteurs $(2, 1, 0)$ et $(1, 0, -1)$ du plan, qui forment une base du plan : ces trois conditions caractérisent p.

Second contrôle. On vérifie $M^2 = M$, et $\operatorname{tr} M = 2 = \operatorname{rg} M$, comme pour tout projecteur (exercice 40).

EXERCICE 34 ⋆⋆

1. L'application φ est linéaire et ne fait pas monter le degré : $\varphi(1) = 1$, $\varphi(X) = X + 1 + X = 1 + 2X$, et $\varphi(X^2) = 2X^2 + 4 + 2X^2 + 2X + X^2 = 4 + 2X + 5X^2$.

$$\boxed{\operatorname{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}$$

2. La matrice de $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}$ est triangulaire de diagonale $(1 - \lambda, 2 - \lambda, 5 - \lambda)$. Elle n'est pas inversible, c'est-à-dire que $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}$ n'est pas injectif, si et seulement si $\lambda \in \{1, 2, 5\}$ (proposition 12). La résolution des trois systèmes donne :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(\varphi - \mathrm{id}) = \operatorname{Vect}(1), \qquad \operatorname{Ker}(\varphi - 2\,\mathrm{id}) = \operatorname{Vect}(1 + X), \qquad \operatorname{Ker}(\varphi - 5\,\mathrm{id}) = \operatorname{Vect}(7 + 4X + 6X^2)}$$

Pour $\lambda = 5$, par exemple, le système donne $c = 1$, puis $-3b + 2 = 0$, puis $-4a + b + 4 = 0$, soit $(a, b, c) = (\frac{7}{6}, \frac{2}{3}, 1)$, que l'on multiplie par 6.

3. Trois vecteurs pris dans les trois noyaux, de degrés échelonnés 0, 1, 2, forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\boxed{\text{dans la base } (1,\ 1+X,\ 7+4X+6X^2), \quad \operatorname{Mat}(\varphi) = \operatorname{diag}(1,2,5)}$$

EXERCICE 35 ⋆⋆

1. On cherche des vecteurs v tels que $Av = \lambda v$ pour $\lambda = 0, 1, 3$. On trouve

$$A(1,-2,1) = 0, \qquad A(1,0,0) = (1,0,0), \qquad A(1,1,1) = (3,3,3).$$

Ces trois vecteurs sont libres : si $a(1,-2,1) + b(1,0,0) + c(1,1,1) = 0$, la deuxième et la troisième coordonnée donnent $-2a + c = 0$ et $a + c = 0$, donc $a = c = 0$, puis $b = 0$.

$$\boxed{P^{-1}AP = \operatorname{diag}(0,1,3) \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

2. Les colonnes de B sont proportionnelles à $w = (1,-3,-2)$, donc $\operatorname{rg} B = 1$, et $\operatorname{Ker} B$ est le plan d'équation $x + y - z = 0$, qui contient w ; ainsi $B^2 = 0$. On pose $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = Bv_1 = w$ et $v_3 = (1,0,1) \in \operatorname{Ker} B$. Ces vecteurs sont libres, car (v_2, v_3) est une base de $\operatorname{Ker} B$ et $v_1 \notin \operatorname{Ker} B$. Dans la base (v_1, v_2, v_3), on a $v_1 \mapsto v_2$, $v_2 \mapsto 0$, $v_3 \mapsto 0$.

$$\boxed{P^{-1}BP = E_{21} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

EXERCICE 36 ⋆⋆

1. Les formules d'addition (chapitre 4) donnent $R(\theta)R(\varphi) = R(\theta + \varphi)$. Comme $R(0) = I_2$, chaque $R(\theta)$ est inversible d'inverse $R(-\theta)$, et $\theta \mapsto R(\theta)$ est un morphisme de groupes. Son noyau est l'ensemble des θ tels que $\cos\theta = 1$ et $\sin\theta = 0$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} = 2\pi\mathbb{Z}}$$

2. Par récurrence pour $n \geqslant 0$, puis en passant à l'inverse pour $n < 0$:

$$\boxed{R(\theta)^n = R(n\theta) \qquad (n \in \mathbb{Z})}$$

c'est la formule de Moivre écrite matriciellement.

3.(a) Si $R(\theta)v = \lambda v$ avec $v = (x,y) \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(R(\theta) - \lambda I_2)v = 0$, donc $R(\theta) - \lambda I_2$ n'est pas inversible. Par la proposition 9, $(\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = 0$, ce qui impose $\sin\theta = 0$, c'est-à-dire $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, exclu. Si l'on avait $P^{-1}R(\theta)P = \operatorname{diag}(\lambda, \mu)$ avec $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, la première colonne v de P serait non nulle et vérifierait $R(\theta)v = \lambda v$: c'est impossible.

3.(b) Sur $\mathbb{C}$, on vérifie $R(\theta)(1,-\mathrm{i}) = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta, \sin\theta - \mathrm{i}\cos\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1,-\mathrm{i})$ et, de même, $R(\theta)(1,\mathrm{i}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(1,\mathrm{i})$. Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

$$\boxed{P^{-1}R(\theta)P = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix}}$$

À retenir. Être semblable à une matrice diagonale dépend du corps : une rotation du plan réel ne fixe aucune droite réelle, mais elle fixe deux droites complexes, sur lesquelles elle agit par multiplication par $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}$.

EXERCICE 37 ⋆⋆

1. Toutes les matrices élémentaires sont de rang 1. Par le théorème 6, deux matrices de même taille et de même rang sont équivalentes.

$$\boxed{\text{deux matrices élémentaires de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ sont toujours équivalentes}}$$

2. Soit P la matrice de permutation qui échange e_i et e_j ; elle vérifie $P^2 = I_n$. L'endomorphisme canoniquement associé à E_{jj} envoie e_j sur e_j et les autres vecteurs sur 0. Dans la base obtenue en échangeant e_i et e_j, sa matrice devient E_{ii}.

$$\boxed{P^{-1}E_{jj}P = E_{ii}, \qquad P = P_{ij} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}}$$

3. Comme $i \neq j$ et $k \neq \ell$, il existe une permutation σ de $[\![1\,;n]\!]$ telle que $\sigma(k) = i$ et $\sigma(\ell) = j$. L'endomorphisme associé à $E_{k\ell}$ envoie e_ℓ sur e_k et les autres vecteurs de base sur 0. Dans la base $(e'_1, \dots, e'_n)$ définie par $e'_{\sigma(m)} = e_m$, il envoie e'_j sur e'_i et les autres sur 0 : sa matrice est E_{ij}. Les matrices $E_{k\ell}$ et E_{ij} sont donc semblables.

4. Si $P^{-1}E_{11}P = E_{12}$, on aurait $\operatorname{tr} E_{11} = \operatorname{tr} E_{12}$ (proposition 14), soit $1 = 0$. Autre argument : $E_{11}^2 = E_{11}$ et $E_{12}^2 = 0$, et deux matrices semblables ont des carrés semblables.

$$\boxed{E_{11} \text{ et } E_{12} \text{ sont équivalentes mais pas semblables}}$$

EXERCICE 38 ⋆⋆

1. Si $(x, u(x))$ était liée, avec $x \neq 0$, on aurait $u(x) = \lambda x$ pour un réel λ, puis $-x = u^2(x) = \lambda^2 x$, soit $\lambda^2 = -1$: c'est impossible. La famille est libre, de cardinal $2 = \dim E$: c'est une base.

2. Dans la base $\mathcal{B} = (x, u(x))$, on a $u(x) = 0 \cdot x + 1 \cdot u(x)$ et $u\big(u(x)\big) = -x$.

$$\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

3. Supposons $\dim E = 3$ et $u^2 = -\mathrm{id}_E$. La question 1 montre qu'aucune droite n'est stable par u. Soit $x \neq 0$; le plan F engendré par x et $u(x)$ est stable par u, puisque $u(u(x)) = -x$. Soit $y \notin F$, et G le plan stable engendré par y et $u(y)$. Par la formule de Grassmann (chapitre 15), $\dim(F \cap G) \geqslant 2 + 2 - 3 = 1$. L'intersection $F \cap G$ est stable par u ; elle n'est pas une droite, donc c'est un plan, et $G = F$, ce qui contredit $y \notin F$.

$$\boxed{\text{aucun endomorphisme } u \text{ d'un } \mathbb{R}\text{-espace de dimension 3 ne vérifie } u^2 = -\mathrm{id}}$$

Le chapitre 17 donnera une preuve en une ligne : $\det(u)^2 = \det(-\mathrm{id}) = -1$.

EXERCICE 39 ⋆⋆

1. On pose $p = \dfrac{1}{\lambda - \mu}(u - \mu\,\mathrm{id})$ et $q = \dfrac{1}{\mu - \lambda}(u - \lambda\,\mathrm{id})$, de sorte que $p + q = \mathrm{id}$. Pour tout x, on a $x = p(x) + q(x)$, avec $(u - \lambda\,\mathrm{id})(p(x)) = 0$ et $(u - \mu\,\mathrm{id})(q(x)) = 0$, car les deux facteurs commutent. Ainsi $E = \operatorname{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id}) + \operatorname{Ker}(u - \mu\,\mathrm{id})$. Si x est dans l'intersection, alors $\lambda x = u(x) = \mu x$, et $x = 0$ puisque $\lambda \neq \mu$.

2. Une base adaptée à cette somme directe (chapitre 15), formée d'une base de chaque noyau, convient : u agit par λ sur les vecteurs du premier et par μ sur ceux du second.

$$\boxed{\operatorname{Mat}(u) = \operatorname{diag}(\underbrace{\lambda, \dots, \lambda}_{p}, \underbrace{\mu, \dots, \mu}_{n-p}), \qquad p = \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id})}$$

3. Pour $(\lambda, \mu) = (1, 0)$, la relation s'écrit $u^2 = u$: on retrouve qu'un projecteur a une matrice $\operatorname{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ dans une base adaptée à $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$. Pour $(\lambda, \mu) = (1, -1)$, elle s'écrit $u^2 = \mathrm{id}$: on retrouve qu'une symétrie a une matrice $\operatorname{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$.

EXERCICE 40 ⋆⋆

1. L'endomorphisme canoniquement associé à M est un projecteur. Par l'exercice 39, M est semblable à $\mathrm{diag}(1,\dots,1,0,\dots,0)$, avec r coefficients égaux à 1, et $r = \mathrm{rg}M$. La trace est invariante par similitude (proposition 14).

$$\boxed{M^2 = M \implies \mathrm{tr}\, M = \mathrm{rg}M \in \mathbb{N}}$$

2. De même, S est semblable à $\mathrm{diag}(1,\dots,1,-1,\dots,-1)$, avec p coefficients égaux à 1 et $q = n-p$ égaux à -1.

$$\boxed{\mathrm{tr}\, S = p - q = n - 2q \in \{-n, -n+2, \dots, n-2, n\}}$$

3. La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ a pour trace 1 et vérifie $2 \times (-1) - 3 \times (-1) = 1 \neq 0$, donc elle est inversible et de rang 2 (proposition 9). Ce n'est pas un projecteur, puisque $\mathrm{tr}\, M \neq \mathrm{rg}M$. Ce n'est pas une symétrie, puisque sa trace 1 n'a pas la parité de $n = 2$. On le confirme par le calcul : $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ n'est égale ni à M ni à I_2.

Piège. La condition sur la trace est nécessaire, mais pas suffisante : la matrice E_{12} a une trace nulle, donc paire, et n'est pas une symétrie.

EXERCICE 41 ⋆⋆

L'échelonnement de A par opérations sur les lignes conduit à la forme échelonnée réduite

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui a trois pivots : $r = 3$ (théorème 8). Elle donne aussi une base du noyau, de dimension $5 - 3 = 2$: $k_1 = (2,0,0,1,0)$ et $k_2 = (1,-1,1,0,1)$.

On suit la preuve du théorème 5. On complète (k_1, k_2) par e_1, e_2, e_3, et l'on note P la matrice de colonnes e_1, e_2, e_3, k_1, k_2, qui est inversible car ses deux dernières lignes forment I_2 dans les deux dernières colonnes. Les vecteurs Ae_1, Ae_2, Ae_3, colonnes de A, sont libres, puisque le rang vaut 3 ; on les complète par e_4 pour former Q. Alors $AP = QJ_3$, puisque AP a pour colonnes Ae_1, Ae_2, Ae_3, 0, 0.

$$\boxed{r = 3, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 0 \\ 2 & -6 & -6 & 0 \\ -3 & 12 & 12 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Un calcul direct confirme $QJ_3P^{-1} = A$ et $\mathrm{rg}Q = 4$.

EXERCICE 42 ⋆⋆⋆

1. Par la proposition 14, $\mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}(AB)$, soit $x + y = 25 + 5 = 30$.

2. D'une part, $\mathrm{tr}(ABAB) = \mathrm{tr}\left((AB)^2\right) = 25^2 + 11^2 + 11^2 + 5^2 = 892$. D'autre part, la proposition 14 appliquée à A et BAB donne $\mathrm{tr}(ABAB) = \mathrm{tr}(BABA) = \mathrm{tr}\left((BA)^2\right) = x^2 + 2 \times 14^2 + y^2$. Donc $x^2 + y^2 = 892 - 392 = 500$.

3. On en déduit $2xy = (x+y)^2 - (x^2+y^2) = 400$: x et y sont les racines de

$$t^2 - 30t + 200 = (t-10)(t-20).$$

$$\boxed{x = 10, \qquad y = 20}$$

À retenir. Les matrices AB et BA ne sont pas égales en général, mais elles ont la même trace, ainsi que leurs carrés. Pour des matrices d'ordre 2, cela suffit ici à déterminer les coefficients manquants.

EXERCICE 43 ⋆⋆⋆

1. Si $M = XY^T$ avec X, Y non nulles, la j-ième colonne de M est $y_j X$: toutes les colonnes sont proportionnelles à X, et l'une au moins est non nulle, donc $\mathrm{rg} M = 1$. Réciproquement, si $\mathrm{rg} M = 1$, l'image de M est une droite $\mathbb{K}X$, et chaque colonne s'écrit $y_j X$; la colonne $Y = (y_j)$ n'est pas nulle, puisque $M \neq 0$, et $M = XY^T$.

2. Le produit $Y^T X$ est un scalaire s, et $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(XY^T) = \mathrm{tr}(Y^T X) = s$ (proposition 14). Par associativité,

$$M^2 = X(Y^T X)Y^T = s\,XY^T, \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{M^2 = \mathrm{tr}(M)\,M}$$

3. Si $t = \mathrm{tr}\, M \neq 0$, la matrice $\dfrac{1}{t}M$ est un projecteur de rang 1 ; par l'exercice 40, elle est semblable à E_{11}, et M est semblable à tE_{11}. Si $\mathrm{tr}\, M = 0$, alors $M^2 = 0$. On reprend la méthode de l'exercice 35 : on choisit v_1 tel que $v_2 = Mv_1 \neq 0$; le vecteur v_2 appartient au noyau, de dimension $n-1$, et l'on complète v_2 en une base $(v_2, \dots, v_n)$ de ce noyau. La famille $(v_1, \dots, v_n)$ est une base, puisque $v_1 \notin \mathrm{Ker}\, M$, et la matrice de M y vaut E_{21}, elle-même semblable à E_{12} (exercice 37).

$$\boxed{\mathrm{rg} M = 1 \implies M \sim \mathrm{tr}(M)E_{11} \text{ si } \mathrm{tr}\, M \neq 0, \qquad M \sim E_{12} \text{ si } \mathrm{tr}\, M = 0}$$

À retenir. Une matrice de rang 1 est entièrement décrite, à similitude près, par un seul nombre : sa trace.

EXERCICE 44 ⋆⋆⋆

On note $\mathrm{Im}\, u = \mathbb{K}a$, avec $a \neq 0$.

Si $F \subset \mathrm{Ker}\, u$, alors $u(F) = \{0\} \subset F$. Si $\mathrm{Im}\, u \subset F$, alors $u(F) \subset \mathrm{Im}\, u \subset F$. Dans les deux cas, F est stable.

Réciproquement, soit F stable par u, et supposons $F \not\subset \mathrm{Ker}\, u$. Il existe $x \in F$ tel que $u(x) \neq 0$. Le vecteur $u(x)$ appartient à F, par stabilité, et à la droite $\mathrm{Im}\, u$, dont il est un vecteur non nul ; il l'engendre, donc $\mathrm{Im}\, u = \mathbb{K}u(x) \subset F$.

$$\boxed{F \text{ stable par } u \iff F \subset \mathrm{Ker}\, u \quad \text{ou} \quad \mathrm{Im}\, u \subset F}$$

À retenir. Pour un endomorphisme de rang 1, il n'y a que deux façons d'être stable : être écrasé sur 0, ou contenir la seule direction que u produit.

EXERCICE 45 ⋆⋆⋆

1. L'application Θ est linéaire, car la trace et le produit le sont. Elle est injective par l'exercice 5 : si $\mathrm{tr}(AM) = 0$ pour toute M, alors $A = 0$. Comme $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2 = \dim \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ (chapitre 15), c'est un isomorphisme.

2. Un hyperplan H est le noyau d'une forme linéaire φ non nulle (chapitre 15). Par la question 1, $\varphi = \Theta(A)$ pour une matrice A, non nulle puisque φ ne l'est pas.

$$\boxed{H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(AM) = 0\}, \qquad A \neq 0}$$

3. Soit $r = \mathrm{rg} A \geqslant 1$. Par le théorème 5, on écrit $A = QJ_rP^{-1}$, avec P, Q inversibles. Soit C la matrice de permutation associée au cycle $(1\ 2\ \cdots\ n)$, qui envoie e_j sur e_{j+1} et e_n sur e_1. Comme $n \geqslant 2$, elle n'a aucun coefficient diagonal non nul, et J_rC non plus, puisque J_rC est formée des r premières lignes de C complétées par des lignes nulles. On pose $M = PCQ^{-1}$, inversible. Alors

$$\mathrm{tr}(AM) = \mathrm{tr}(QJ_rP^{-1}PCQ^{-1}) = \mathrm{tr}(QJ_rCQ^{-1}) = \mathrm{tr}(J_rC) = 0.$$

$$\boxed{\text{tout hyperplan de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ (n \geqslant 2) \text{ contient une matrice inversible}}$$

Piège. Pour $n = 1$, le résultat est faux : le seul hyperplan de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$ est $\{0\}$. C'est là qu'intervient l'existence d'une permutation sans point fixe, qui exige $n \geqslant 2$.

EXERCICE 46 ⋆

On place les vecteurs en lignes et l'on échelonne : les opérations sur les lignes ne changent pas l'espace engendré (proposition 17), et le rang est le nombre de pivots (théorème 8).

(i) On note $v_1 = (1,2,5,4)$ et $v_2 = (2,4,10,7)$. Alors $v_2 - 2v_1 = (0,0,0,-1)$: deux pivots, la famille est libre, de rang 2, et n'engendre pas $\mathbb{R}^4$. Les lignes v_1, $(0,0,0,-1)$, e_2, e_3 forment, après permutation, une matrice échelonnée à quatre pivots.

$$\boxed{\text{rg} = 2, \quad \text{libre}; \quad (v_1, v_2, e_2, e_3) \text{ base de } \mathbb{R}^4}$$

(ii) Le second vecteur vaut -5 fois le premier.

$$\boxed{\text{rg} = 1, \quad \text{ni libre ni génératrice}}$$

(iii) La famille est déjà échelonnée, avec trois pivots 1, -12, 2.

$$\boxed{\text{rg} = 3, \quad \text{base de } \mathbb{R}^3}$$

(iv) L'échelonnement donne les lignes $(3,1,-4,6)$, $(0,2,16,6)$ et $(0,0,0,6a-6)$, à un facteur non nul près. Si $a \neq 1$, il y a trois pivots, dans les colonnes 1, 2, 4 : la famille est libre et on la complète par e_3. Si $a = 1$, le rang vaut 2, et l'on trouve la relation $2v_3 = v_1 - v_2$.

$$\boxed{\text{rg} = 3 \text{ si } a \neq 1, \quad \text{rg} = 2 \text{ si } a = 1; \quad \text{jamais génératrice de } \mathbb{R}^4}$$

EXERCICE 47 ⋆⋆

On applique les mêmes opérations sur les lignes à A et à I_3, jusqu'à transformer A en I_3 ; la matrice obtenue à droite est alors A^{-1}, puisque le produit des matrices d'opérations élémentaires utilisées vaut A^{-1} (proposition 16). Pour A, les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ font apparaître les pivots 1, 1, -4, et la remontée conduit à

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Pour B, on échange d'abord L_1 et L_2, le premier coefficient de L_1 étant nul :

$$\boxed{B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Pour C, l'échelonnement fait apparaître une ligne nulle à la troisième étape : C est de rang 2, et ses colonnes vérifient $C_1 - 2C_2 + C_3 = 0$.

$$\boxed{C \text{ non inversible}, \quad \text{rg}C = 2, \quad \text{Ker}\, C = \mathbb{K}(1,-2,1)}$$

Pour D, on prend comme premier pivot le coefficient -1 de la troisième ligne, pour éviter les divisions par i :

$$\boxed{D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3\mathrm{i}}{4} & \frac{\mathrm{i}}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

Chaque inverse a été contrôlé par le calcul du produit avec la matrice de départ.

Piège. L'erreur la plus répandue dans la méthode de Gauss-Jordan est de mélanger opérations sur les lignes et opérations sur les colonnes : on n'utilise que des opérations sur les lignes, appliquées simultanément aux deux matrices.

EXERCICE 48 ⋆⋆

1. Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - mL_1$, puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, donnent la matrice échelonnée

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & (1-m)(2+m) \end{pmatrix}.$$

Si $m = 1$, toutes les lignes sont égales et le rang vaut 1. Sinon, la matrice est inversible si et seulement si le troisième pivot est non nul.

$$\boxed{\text{inversible} \iff m \notin \{1, -2\}}$$

Pour $m = -2$, on voit d'ailleurs que la somme des trois lignes est nulle.

2. Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, donnent les pivots 1, 1, $1 + 2t$. La méthode de Gauss-Jordan donne ensuite l'inverse.

$$\boxed{A_t \text{ inversible} \iff t \neq -\frac{1}{2}, \qquad A_t^{-1} = \frac{1}{2t+1}\begin{pmatrix} 1 & t & -t \\ -2 & 1 & 2t \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

EXERCICE 49 ⋆⋆

1. La méthode de Gauss-Jordan donne

$$\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

2. Le système s'écrit $MX = (m, 1, 2m)$, donc $X = M^{-1}(m, 1, 2m)$: c'est un système de Cramer (théorème 9).

$$\boxed{(x, y, z) = (5m - 1,\ 1 - 2m,\ 4m - 1)}$$

On vérifie : $x - z = m$, $-2x + 3y + 4z = -10m + 2 + 3 - 6m + 16m - 4 = 1$, et $y + z = 2m$.

EXERCICE 50 ⋆⋆

1. Les deuxième et troisième lignes L_2 et L_3 ne sont pas proportionnelles, par exemple à cause des coefficients des colonnes 2 et 3 : le rang vaut au moins 2. Il vaut exactement 2 si et seulement si $L_1 \in \text{Vect}(L_2, L_3)$. On cherche $L_1 = \alpha L_2 + \beta L_3$: la deuxième colonne donne $2 = 4\beta$, la troisième $-1 = \alpha - \beta$, d'où $\beta = \dfrac{1}{2}$ et $\alpha = -\dfrac{1}{2}$; les deux autres colonnes imposent alors $a = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2}$ et $b = 2 + 1$.

$$\boxed{\text{rg}A = 2 \iff (a, b) = (1, 3)}$$

2. On échange L_1 et L_2, puis on effectue $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1$, ce qui donne les lignes $(0, -6, a - 6, -1)$ et $(0, -9, -13, -8)$. Avec la ligne $(0, 1, 1, 1)$ comme deuxième pivot, $L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 + 9L_2$ donnent $(0, 0, a, 5)$ et $(0, 0, -4, 1)$. On prend $(0, 0, -4, 1)$ comme troisième pivot, et la dernière ligne devient $(0, 0, 0, 5 + \dfrac{a}{4})$.

$$\boxed{\text{rg}C = 4 \text{ si } a \neq -20, \qquad \text{rg}C = 3 \text{ si } a = -20}$$

EXERCICE 51 ⋆⋆

Première matrice. On note L_i la i-ième ligne. Pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, la différence $L_{i+1} - L_i$ vaut 1 dans les colonnes $j \leqslant i$ et 0 ailleurs, puisque $\max(i+1, j) - \max(i, j)$ vaut 1 si $j \leqslant i$ et 0 si $j \geqslant i+1$. Ces $n-1$ différences sont échelonnées, et engendrent $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$. La ligne $L_1 = (1, 2, \dots, n)$ a une dernière coordonnée non nulle, donc n'appartient pas à ce sous-espace. Les opérations élémentaires conservant le rang (proposition 17) :

$$\boxed{\mathrm{rg}(\max(i,j)) = n}$$

Seconde matrice. La formule $\sin(i+j) = \sin i \cos j + \cos i \sin j$ montre que la j-ième colonne vaut $\cos j \cdot S + \sin j \cdot C$, avec $S = (\sin i)_i$ et $C = (\cos i)_i$. Le rang vaut donc au plus 2. Les deux premières colonnes sont libres : la matrice $\begin{pmatrix} \cos 1 & \cos 2 \\ \sin 1 & \sin 2 \end{pmatrix}$ de leurs coordonnées sur (S, C) vérifie $\cos 1 \sin 2 - \cos 2 \sin 1 = \sin 1 \neq 0$, et (S, C) est libre, puisque $\sin 1 \cos 2 - \sin 2 \cos 1 = -\sin 1 \neq 0$.

$$\boxed{\mathrm{rg}(\sin(i+j)) = 2 \qquad (n \geqslant 2)}$$

À retenir. Une matrice dont le coefficient s'écrit $\sum_{k=1}^{q} f_k(i) g_k(j)$ est somme de q matrices de rang au plus 1, donc de rang au plus q.

EXERCICE 52 ⋆⋆⋆

1. La i-ième équation de $AX = 0$ donne $a_{ii} x_i = -\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j$, d'où, par l'inégalité triangulaire et le choix de i,

$$|a_{ii}|\,|x_i| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\,|x_j| \leqslant \Big(\sum_{j \neq i} |a_{ij}|\Big)|x_i| < |a_{ii}|\,|x_i|,$$

la dernière inégalité étant stricte car $|x_i| > 0$, puisque $X \neq 0$. C'est une contradiction.

2. Le noyau de A est donc réduit à $\{0\}$, et A est inversible (théorème 3).

$$\boxed{A \text{ à diagonale strictement dominante } \implies A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})}$$

3. La matrice $I_n + t(N + N^T)$ a des 1 sur la diagonale, des t sur la sur-diagonale et la sous-diagonale, et des 0 ailleurs. Sur chaque ligne, la somme des modules des coefficients non diagonaux vaut au plus $2|t| < 1$. Elle est à diagonale strictement dominante, donc inversible.

EXERCICE 53 ⋆⋆⋆

1. La matrice AB est de rang 2. Comme $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rg}A, \mathrm{rg}B)$ et que $\mathrm{rg}A \leqslant 2$, $\mathrm{rg}B \leqslant 2$ (ce sont des matrices à deux colonnes, resp. deux lignes) :

$$\boxed{\mathrm{rg}AB = \mathrm{rg}A = \mathrm{rg}B = 2}$$

2. On lit $\mathrm{Ker}\,(AB) = \mathbb{R}e_1$ et $\mathrm{Im}(AB) = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$. On a $\mathrm{Ker}\,B \subset \mathrm{Ker}\,(AB)$; par le théorème du rang (chapitre 15), $\dim \mathrm{Ker}\,B = 3-2 = 1$, donc les deux noyaux sont égaux. De même, $\mathrm{Im}(AB) \subset \mathrm{Im}\,A$, et les deux sont de dimension 2.

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,B = \mathbb{R}e_1, \qquad \mathrm{Im}\,A = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)}$$

3. La matrice AB est diagonale à coefficients 0 ou 1, donc $(AB)^2 = AB$, soit $A(BA - I_2)B = 0$. Comme $\mathrm{rg}B = 2$, l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ associée à B est surjective : tout $Y \in \mathbb{R}^2$ s'écrit BX, et $A(BA - I_2)Y = 0$. Comme $\mathrm{rg}A = 2$ est le nombre de colonnes de A, celle-ci est injective, donc $(BA - I_2)Y = 0$ pour tout Y.

$$\boxed{BA = I_2}$$

À retenir. Une matrice injective se simplifie à gauche, une matrice surjective à droite. C'est ce qui remplace, pour des matrices rectangulaires, la simplification par une matrice inversible.

Exercices de synthèse

EXERCICE 54 ⋆⋆

1. Faux. Les matrices E_{11} et E_{22} sont non nulles, et leur produit est nul (proposition 4).

2. Faux. Pour $A = E_{11}$ et $B = E_{12} + E_{21}$, symétriques, le produit $AB = E_{12}$ ne l'est pas. Par l'exercice 7, le produit de deux matrices symétriques est symétrique si et seulement si elles commutent.

3. Vrai. On a $n = \mathrm{rg} I_n = \mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{rg} A \leqslant p$.

4. Faux. Les matrices I_2 et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont toutes deux le rang 2 et la trace 2. Mais la seule matrice semblable à I_2 est $P^{-1} I_2 P = I_2$.

5. Vrai. Si $A^s = 0$, l'exercice 13 appliqué à $-A$ donne $(I_n + A)^{-1} = \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k A^k$.

6. Vrai. On a $\mathrm{Im}(A+B) \subset \mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B$, et la dimension d'une somme est au plus la somme des dimensions (chapitre 15).

7. Vrai. C'est l'exercice 6 : $\mathrm{tr}(A^T A)$ est la somme des carrés des coefficients.

8. Vrai. Si $B = P^{-1} A P$, alors $B^2 = P^{-1} A P P^{-1} A P = P^{-1} A^2 P$.

9. Faux. Les colonnes $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(1,1,0)$ sont deux à deux non colinéaires, mais la troisième est la somme des deux premières : la matrice est de rang 2.

10. Vrai. Si A est inversible et $A^2 = A$, on multiplie par A^{-1} : $A = I_n$.

À retenir. Les affirmations 1, 2 et 4 sont fausses parce que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est ni intègre, ni commutatif, et que le rang et la trace ne suffisent pas à classer les matrices à similitude près. L'affirmation 9 rappelle qu'une famille de vecteurs deux à deux non colinéaires n'est pas forcément libre.

EXERCICE 55 ⋆⋆

1. Si $f = \beta \circ \alpha$, alors $\mathrm{Im}\, f = \beta(\alpha(E)) \subset \mathrm{Im}\, \beta$, donc $\mathrm{rg} f \leqslant \mathrm{rg}\beta \leqslant \dim V$.

2. On prend $V = \mathrm{Im}\, f$, $\alpha : x \mapsto f(x)$, vue comme application de E dans $\mathrm{Im}\, f$, et β l'injection canonique de $\mathrm{Im}\, f$ dans F. Alors $f = \beta \circ \alpha$ et $\dim V = \mathrm{rg} f$.

$$\boxed{\min\{\dim V \mid f \text{ se factorise à travers } V\} = \mathrm{rg} f}$$

3. Par le théorème 5, $A = Q J_r P^{-1}$, et la matrice $J_r \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ se factorise en

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K}), \quad \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K}).$$

On pose $B = Q \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. Si l'on avait $A = BC$ avec $B \in \mathcal{M}_{n,s}(\mathbb{K})$ et $s < r$, on aurait $r = \mathrm{rg} A \leqslant \mathrm{rg} B \leqslant s$, ce qui est absurde.

$$\boxed{A = BC, \quad B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K}), \quad r = \mathrm{rg} A \text{ minimal}}$$

Pour $r = 1$, on retrouve l'écriture $A = XY^T$ de l'exercice 43.

À retenir. Le rang est la dimension du plus petit « goulot » par lequel l'information doit passer : c'est ainsi qu'on compresse une grande matrice de petit rang, en ne stockant que B et C.

EXERCICE 56 ⋆⋆

1. En prenant la trace, $\operatorname{tr} X + \operatorname{tr}(X)\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$, soit $\operatorname{tr}(X)(1+\operatorname{tr} A) = \operatorname{tr} B$. Si $\operatorname{tr} A \neq -1$, on en tire $\operatorname{tr} X$, puis $X = B - \operatorname{tr}(X)A$. Réciproquement, la matrice obtenue convient : sa trace est $\operatorname{tr} B - \dfrac{\operatorname{tr} B \operatorname{tr} A}{1+\operatorname{tr} A} = \dfrac{\operatorname{tr} B}{1+\operatorname{tr} A}$.

$$\boxed{\operatorname{tr} A \neq -1 : \quad X = B - \frac{\operatorname{tr} B}{1+\operatorname{tr} A} A \text{ est l'unique solution}}$$

2. Si $\operatorname{tr} A = -1$, l'égalité des traces donne $0 = \operatorname{tr} B$: c'est une condition nécessaire. Si $\operatorname{tr} B = 0$, toute solution s'écrit $X = B - \lambda A$, avec $\lambda = \operatorname{tr} X$. Réciproquement, pour tout λ, la matrice $X = B - \lambda A$ a pour trace $0 + \lambda$, et $X + \lambda A = B$.

$$\boxed{\operatorname{tr} A = -1 : \quad \text{solutions} = \begin{cases} \varnothing & \text{si } \operatorname{tr} B \neq 0 \\ \{B - \lambda A \mid \lambda \in \mathbb{K}\} & \text{si } \operatorname{tr} B = 0 \end{cases}}$$

3. L'application Φ est linéaire. Si $\operatorname{tr} A \neq -1$, la question 1 dit que tout B a un unique antécédent : Φ est bijectif. Si $\operatorname{tr} A = -1$, alors $\Phi(A) = A - A = 0$ et $A \neq 0$; toute $X \in \operatorname{Ker}\Phi$ vérifie $X = -\operatorname{tr}(X)A$, donc $\operatorname{Ker}\Phi = \mathbb{K}A$. Comme $\operatorname{tr}\Phi(X) = \operatorname{tr}(X)(1+\operatorname{tr} A) = 0$, l'image est contenue dans l'hyperplan $\mathcal{H}$ des matrices de trace nulle.

$$\boxed{\operatorname{tr} A = -1 : \quad \operatorname{Ker}\Phi = \mathbb{K}A, \qquad \operatorname{Im}\Phi = \{M \mid \operatorname{tr} M = 0\}}$$

Le théorème du rang donne $\operatorname{rg}\Phi = n^2 - 1 = \dim \mathcal{H}$, d'où l'égalité de l'image avec $\mathcal{H}$, ce que confirme la question 2.

À retenir. On retrouve la structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire (théorème 9) : vide, ou solution particulière plus noyau. Ici, le noyau est la droite $\mathbb{K}A$.

EXERCICE 57 ⋆⋆

On pose $P = V^T U^{-1}$, inversible comme produit de matrices inversibles (proposition 8). Alors $PA = V^T U^{-1} U J_r V = V^T J_r V$, et, par la proposition 5,

$$(PA)^T = V^T\, {J_r}^T\, V = V^T J_r V = PA,$$

puisque la matrice carrée J_r est symétrique.

$$\boxed{P = V^T U^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad PA = V^T J_r V \text{ est symétrique}}$$

À retenir. La forme réduite J_r permet de démontrer pour toute matrice ce qui est évident pour J_r : ici, être symétrique. Le passage de A à J_r se fait au prix de deux matrices inversibles, qu'on « recolle » ensuite.

EXERCICE 58 ⋆⋆

1. Une matrice inversible n'a pas de ligne nulle : chaque ligne contient au moins un 1, d'où au moins p coefficients égaux à 1. La matrice I_p atteint ce minimum.

2. Deux lignes égales rendraient la matrice non inversible, puisque ses lignes seraient liées : au plus une ligne est formée uniquement de 1. Les $p-1$ autres contiennent au plus $p-1$ coefficients égaux à 1 chacune.

$$\text{nombre de } 1 \leqslant p + (p-1)^2 = p^2 - p + 1.$$

3. La matrice M décrite a pour première ligne $(1, \dots, 1)$ et, pour $i \geqslant 2$, une i-ième ligne égale à la première moins ${e_i}^T$. Les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \geqslant 2$ remplacent ces lignes par $-{e_i}^T$, puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + \cdots + L_p$ remplace la première par ${e_1}^T$. On obtient une matrice inversible ; comme les opérations élémentaires conservent le rang (proposition 17), M est inversible. Elle contient $p^2 - (p-1)$ coefficients égaux à 1.

$$\boxed{\min = p, \qquad \max = p^2 - p + 1}$$

Une recherche exhaustive par ordinateur confirme, pour $p = 3$, que le maximum vaut 7.

EXERCICE 59 ⋆⋆⋆

1. On vérifie que $AP = PD$ en calculant les images des colonnes de P : $A(1,1,1) = (1,1,1)$, $A(-1,1,0) = -\frac{1}{2}(-1,1,0)$ et $A(-1,0,1) = -\frac{1}{2}(-1,0,1)$. La méthode de Gauss-Jordan donne P^{-1}, et $A^n = PD^nP^{-1}$.

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \operatorname{diag}\Big(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\Big), \qquad A^n = P\operatorname{diag}\Big(1, \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n, \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n\Big)P^{-1}}$$

2. Par récurrence immédiate, $X_{n+1} = AX_n$ donne $X_n = A^nX_0$.

3. Quand $n \to +\infty$, $(-\frac{1}{2})^n \to 0$, donc chaque coefficient de A^n tend vers le coefficient correspondant de $P\operatorname{diag}(1,0,0)P^{-1}$. Cette matrice est le produit de la première colonne $(1,1,1)$ de P par la première ligne $\frac{1}{3}(1,1,1)$ de P^{-1} : c'est $\frac{1}{3}J$.

$$\boxed{\lim u_n = \lim v_n = \lim w_n = \frac{u_0 + v_0 + w_0}{3}}$$

Interprétation. En additionnant les trois relations, on voit que la somme $u_n + v_n + w_n$ est constante. À chaque étape, chacun remplace sa valeur par la moyenne de celles des deux autres : les écarts sont divisés par -2, et les trois valeurs convergent vers la moyenne initiale. C'est un modèle de consensus.

EXERCICE 60 ⋆⋆⋆

1. L'ensemble $\mathcal{A}(f)$ est l'intersection des noyaux des applications linéaires $g \mapsto g \circ f$ et $g \mapsto f \circ g$: c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

2. On a $g \circ f = 0$ si et seulement si g s'annule sur $\operatorname{Im} f$, et $f \circ g = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$.

3. Soit $r = \operatorname{rg} f$ et $n = \dim E$. Par le théorème 5, il existe deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E telles que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = J_r$. On associe à g la matrice $M = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g)$; l'application $g \mapsto M$ est un isomorphisme (théorème 2). Par composition,

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = MJ_r, \qquad \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(f \circ g) = J_rM.$$

La matrice MJ_r est formée des r premières colonnes de M complétées par des zéros, et J_rM des r premières lignes. Les deux sont nulles si et seulement si $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix}$, avec $M' \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$ quelconque.

$$\boxed{\dim \mathcal{A}(f) = (n-r)^2 = (\dim \operatorname{Ker} f)^2}$$

EXERCICE 61 ⋆⋆⋆

1. Supposons que (x, Ax) soit liée pour tout x. Pour tout $x \neq 0$, il existe alors λ_x tel que $Ax = \lambda_x x$. Si x et y sont libres, $A(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y$, et la liberté de (x,y) donne $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$. Si x et y sont colinéaires non nuls, $\lambda_x = \lambda_y$ directement. Ainsi $A = \lambda I_n$ est scalaire. Par contraposée, si A n'est pas scalaire, il existe x tel que (x, Ax) soit libre.

2. La matrice nulle convient. Si $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \neq 0$, les matrices semblables à A sont réduites à A, et $[A]_{11} = \lambda \neq 0$. Si A n'est pas scalaire, on choisit x comme à la question 1 et l'on complète $(x, x + Ax)$, qui est libre, en une base $(v_1, \dots, v_n)$ avec $v_1 = x$ et $v_2 = x + Ax$. Alors $Av_1 = v_2 - v_1$, et la matrice M dans cette base vérifie $[M]_{11} = -1$.

$$\boxed{(\forall M \sim A,\ [M]_{11} = 0) \iff A = 0}$$

3. Les matrices scalaires conviennent, puisqu'elles ne sont semblables qu'à elles-mêmes. Si A n'est pas scalaire, on choisit x comme à la question 1 et l'on complète (Ax, x) en une base $(v_1, \dots, v_n)$, avec $v_1 = Ax$ et $v_2 = x$. Alors $Av_2 = v_1$, et la matrice dans cette base a un coefficient $[M]_{12} = 1$.

$$\boxed{(\forall M \sim A,\ [M]_{12} = 0) \iff A \text{ est scalaire}}$$

À retenir. Une matrice non scalaire a toujours un vecteur qu'elle « fait tourner » hors de sa droite ; on construit alors une base sur mesure pour placer un coefficient non nul où l'on veut.

EXERCICE 62 ⋆⋆⋆

1. L'application $A \mapsto A_0A$ envoie G dans G, puisque G est un groupe, et admet pour réciproque $A \mapsto A_0^{-1}A$: c'est une bijection de G. Le changement d'indice $A' = A_0A$ donne

$$A_0B = \frac{1}{m}\sum_{A\in G} A_0A = \frac{1}{m}\sum_{A'\in G} A' = B.$$

2. Par la question 1, $B^2 = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{A_0\in G} A_0B = \frac{1}{m}\sum_{A_0\in G} B = B$.

3. La matrice B est donc celle d'un projecteur. Par l'exercice 40, sa trace est son rang, un entier naturel. Par linéarité de la trace :

$$\frac{1}{m}\sum_{A\in G} \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = \operatorname{rg} B \in \mathbb{N}, \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{m \text{ divise } \sum_{A\in G} \operatorname{tr}(A)}$$

Par exemple, pour $G = \{I_2, -I_2\}$, la somme des traces vaut $2 - 2 = 0$, divisible par 2, et $B = 0$.
À retenir. Faire la moyenne sur un groupe fini fabrique un projecteur. Le chapitre 21 retrouvera cette idée de moyenne sur un ensemble fini en probabilités.

EXERCICE 63 ⋆⋆⋆

1. Les sous-espaces $\{0\}$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ conviennent évidemment. Le vecteur $P_\sigma U = \displaystyle\sum_j e_{\sigma(j)}$ est encore U, car σ est une bijection, donc D convient. Enfin, $P_\sigma X = \displaystyle\sum_j x_j e_{\sigma(j)}$ a les mêmes coefficients que X, dans un autre ordre, donc la même somme : H convient.

2. Les vecteurs $e_i - e_j$ appartiennent à H. Réciproquement, si $X \in H$, alors

$$X = \sum_j x_j e_j - \Big(\sum_j x_j\Big) e_1 = \sum_{j\geqslant 2} x_j(e_j - e_1).$$

3. Soit $X \in F$, non colinéaire à U : deux de ses coefficients diffèrent, $x_i \neq x_j$. Soit τ la transposition qui échange i et j. Le vecteur $P_\tau X$ s'obtient en échangeant les coefficients d'indices i et j, donc

$$P_\tau X - X = (x_j - x_i)(e_i - e_j) \in F, \qquad \text{d'où} \qquad e_i - e_j \in F.$$

Pour $k \neq \ell$ quelconques, on choisit une permutation σ telle que $\sigma(i) = k$ et $\sigma(j) = \ell$: alors $P_\sigma(e_i - e_j) = e_k - e_\ell \in F$. Par la question 2, $H \subset F$. Comme H est un hyperplan, il ne reste que $F = H$ ou $F = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

4. Si $F \subset D$, alors $F = \{0\}$ ou $F = D$, puisque D est une droite. Ces quatre sous-espaces sont distincts, car $U \notin H$, la somme de ses coefficients valant $n \neq 0$.

$$\boxed{\text{les sous-espaces stables par toutes les } P_\sigma \text{ sont } \{0\},\ D,\ H,\ \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$$

À retenir. Un sous-espace qui contient un vecteur « non symétrique » contient, par permutations et différences, toutes les directions $e_i - e_j$. Les symétries de la situation réduisent à quatre les possibilités, et la décomposition $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = D \oplus H$ est la seule qui les respecte.

EXERCICE 64 ⋆⋆⋆

1. Pour $n = 1$, une matrice de trace nulle est la matrice nulle, qui convient. Si $A = \lambda I_n$, alors $\operatorname{tr} A = n\lambda = 0$, donc $\lambda = 0$ et $A = 0$ convient encore.

2. Si A n'est pas scalaire, l'exercice 61 fournit x tel que (x, Ax) soit libre. On complète en une base $(x, Ax, v_3, \dots, v_n)$. Dans cette base, l'image du premier vecteur est le deuxième : la première colonne de la matrice M de u_A est $(0, 1, 0, \dots, 0)$. En particulier $[M]_{11} = 0$, et M a la forme annoncée, avec $C = (1, 0, \dots, 0)$. Par la proposition 14, $\operatorname{tr} A_1 = \operatorname{tr} M - 0 = \operatorname{tr} A = 0$.

3. Par hypothèse de récurrence, il existe $Q \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ telle que $D_1 = Q^{-1}A_1Q$ ait une diagonale nulle. On pose $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$. Le produit par blocs donne

$$R^{-1}MR = \begin{pmatrix} 0 & LQ \\ Q^{-1}C & Q^{-1}A_1Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & LQ \\ Q^{-1}C & D_1 \end{pmatrix},$$

dont la diagonale est nulle. Cette matrice est semblable à M, donc à A.

4. La réciproque est vraie : une matrice semblable à une matrice de diagonale nulle a la même trace, nulle.

$$\boxed{\operatorname{tr} A = 0 \iff A \text{ est semblable à une matrice de diagonale nulle}}$$

Piège. La récurrence porte sur une matrice A_1 que l'on ne contrôle pas, d'où la nécessité de l'hypothèse « de trace nulle » transmise par la proposition 14. Le cas scalaire doit être traité à part, car l'exercice 61 ne s'y applique pas.

EXERCICE 65 ⋆⋆⋆

1. L'ensemble $\mathcal{H}$ est le noyau de l'application linéaire $\Psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{(n-2)^2}$ qui associe à M la famille des $4m_{ij} - m_{i-1,j} - m_{i+1,j} - m_{i,j-1} - m_{i,j+1}$, pour i, $j \in [\![2\,;n-1]\!]$. C'est un sous-espace vectoriel, et le théorème du rang donne

$$\dim \mathcal{H} = n^2 - \operatorname{rg}\Psi \geqslant n^2 - (n-2)^2 = 4n - 4.$$

2. Soit m le plus grand coefficient de M, et (i, j) un indice tel que $m_{ij} = m$, avec i minimal. Si (i, j) était intérieur, $4m = 4m_{ij}$ serait la somme de quatre voisins tous inférieurs ou égaux à m ; ils seraient donc tous égaux à m, en particulier $m_{i-1,j}$, ce qui contredit la minimalité de i. L'indice (i, j) est donc sur le bord.

3. Si M et M' sont harmoniques de même bord, $N = M - M'$ est harmonique, de bord nul. Par la question 2, son plus grand coefficient est atteint sur le bord, donc il vaut 0 : tous les coefficients de N sont négatifs ou nuls. Appliqué à $-N$, le même argument montre qu'ils sont positifs ou nuls. Ainsi $N = 0$.

4. L'application $\beta : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^{4n-4}$ qui associe à M son bord est linéaire, et injective par la question 3. Donc $\dim \mathcal{H} \leqslant 4n - 4$, et la question 1 donne l'égalité. Une application linéaire injective entre espaces de même dimension est bijective.

$$\boxed{\dim \mathcal{H} = 4n - 4, \qquad \text{tout bord prescrit est celui d'une unique matrice harmonique}}$$

Un calcul de rang par ordinateur confirme $\dim \mathcal{H} = 4n - 4$ pour $n = 3, 4, 5, 6$.

À retenir. L'unicité vient de l'analyse (un principe du maximum), l'existence vient de l'algèbre linéaire (un argument de dimension) : on n'a jamais résolu le système. C'est le modèle discret de la température d'équilibre d'une plaque dont on fixe la température au bord.

EXERCICE 66 ⋆⋆⋆

1. Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 40 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 : il y en a $m = 12$. Chaque a_k s'écrit $\prod_{i=1}^{12} p_i^{v_{ik}}$, avec $v_{ik} \in \mathbb{N}$ (chapitre 12), et

$$\prod_{k=1}^{13} a_k^{\alpha_k} = \prod_{i=1}^{12} p_i^{\sum_k v_{ik}\alpha_k}.$$

En regroupant les exposants positifs d'un côté et les négatifs de l'autre, l'unicité de la décomposition en facteurs premiers montre que ce produit vaut 1 si et seulement si tous les exposants sont nuls :

$$\sum_{k=1}^{13} v_{ik}\alpha_k = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant 12).$$

2. Ce système homogène a 12 équations et 13 inconnues. La méthode du pivot (théorème 8) le met sous forme échelonnée avec au plus 12 pivots : il reste au moins une inconnue non principale. Toutes les opérations effectuées sont des additions, soustractions, multiplications et divisions de rationnels, de sorte que les coefficients restent rationnels. En donnant la valeur 1 à une inconnue non principale et 0 aux autres, la remontée fournit une solution non nulle à coefficients rationnels.

3. On multiplie cette solution par le produit des dénominateurs : on obtient des entiers α_1, …, α_{13} non tous nuls, solutions du système, donc tels que $\prod a_k^{\alpha_k} = 1$.

4. Non : pour les douze nombres premiers $a_k = p_k$, l'égalité $\prod p_k^{\alpha_k} = 1$ impose $\alpha_k = 0$ pour tout k, par unicité de la décomposition.

> 13 entiers de $[\![1\,;40]\!]$ vérifient toujours une relation $\prod a_k^{\alpha_k} = 1$ non triviale ; 12 ne suffisent pas

À retenir. La décomposition en facteurs premiers transforme les produits en sommes d'exposants, et une question multiplicative devient un système linéaire. Le nombre 13 est exactement le nombre de premiers jusqu'à 40 plus un : c'est la dimension qui compte.

Les cinq derniers exercices sont des problèmes en autonomie ; le corrigé commence par l'idée directrice.

EXERCICE 67 ⋆⋆⋆⋆

Idée. On traduit le tournoi en une égalité matricielle $M + M^T = J - I_n$, où M est somme de m matrices de rang 1. Une matrice de rang petit a un gros noyau, dans lequel la forme $X \mapsto X^T(J - I_n)X$ devrait être nulle, alors qu'elle y est strictement négative.

On note b_k et r_k les colonnes indicatrices de B_k et R_k ; alors $M_k = b_k {r_k}^T$. Pour $i \neq j$, les joueurs i et j se sont affrontés exactement une fois, l'un étant bleu et l'autre rouge, donc exactement un des coefficients (i, j) et (j, i) de M vaut 1, l'autre 0. Les coefficients diagonaux de M sont nuls, puisque les équipes sont disjointes. Ainsi

$$M + M^T = J - I_n.$$

Supposons $m < n - 1$. Le système homogène ${r_k}^T X = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant m$, et $U^T X = 0$, où U est la colonne de 1, a $m + 1 < n$ équations et n inconnues : il admet une solution $X \in \mathbb{R}^n$ non nulle (théorème 9). Alors $MX = \sum_k b_k({r_k}^T X) = 0$, donc

$$X^T(M + M^T)X = 2\,X^T M X = 0.$$

Mais $X^T J X = (U^T X)^2 = 0$, de sorte que $X^T(J - I_n)X = -\sum_i x_i^2 < 0$. C'est une contradiction, donc $m \geqslant n - 1$.

La valeur $n-1$ est atteinte : au k-ième match, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, le joueur k seul en bleu affronte les joueurs $k + 1$, …, n en rouge. Deux joueurs $i < j$ se rencontrent alors au match i et à lui seul.

$$\boxed{m_{\min} = n - 1}$$

Remarque. Graham et Pollak ont établi ce résultat en 1971 pour décomposer un graphe complet en graphes bipartis complets ; la seule preuve connue passe par l'algèbre linéaire.

EXERCICE 68 ⋆⋆⋆⋆

Idée. Le rang d'une somme est au plus la somme des rangs, et au plus n. Pour atteindre la borne, on se ramène par équivalence à $A = J_r$ et $B = J_s$, puis on « tourne » les deux matrices pour que leurs coefficients non nuls ne se gênent pas.

Majoration. Comme U et V sont inversibles, $\mathrm{rg}(UA) = r$ et $\mathrm{rg}(BV) = s$, donc

$$\mathrm{rg}(UA + BV) \leqslant \min(n, r + s).$$

Réduction. On écrit $A = Q_1 J_r P_1$ et $B = Q_2 J_s P_2$, avec des matrices inversibles (théorème 5). Pour $U = Q_2 U' Q_1^{-1}$ et $V = P_2^{-1} V' P_1$, avec U', V' inversibles, on obtient

$$UA + BV = Q_2(U' J_r + J_s V')P_1,$$

de même rang que $U' J_r + J_s V'$.

Construction. Soit $W = \sum_{i=1}^{n} E_{i,n+1-i}$ la matrice de permutation « anti-diagonale ». La matrice WJ_r est formée des r premières colonnes de W, soit $\sum_{j=1}^{r} E_{n+1-j,j}$, et $J_s W$ des s premières lignes, soit $\sum_{i=1}^{s} E_{i,n+1-i}$. Avec $U' = V' = W$, la somme est une matrice anti-diagonale dont les coefficients non nuls, égaux à 1 ou 2, occupent les colonnes $j \leqslant r$ et les colonnes $j \geqslant n + 1 - s$. Il y en a $\min(n, r + s)$, dans des lignes et des colonnes distinctes : c'est le rang de la somme.

$$\boxed{\max\left\{\mathrm{rg}(UA + BV) \mid U, V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\right\} = \min(n, r + s)}$$

EXERCICE 69 ⋆⋆⋆⋆

Idée. Les matrices élémentaires E_{ij} suffisent : une forme linéaire est déterminée par ses valeurs sur une base, et des similitudes simples relient ces matrices entre elles.

Les formes λ tr conviennent (proposition 14). Réciproquement, soit φ une forme invariante par similitude. Pour $i \neq j$, la matrice inversible $D = I_n + E_{ii}$ multiplie la i-ième ligne par 2 et D^{-1} multiplie la i-ième colonne par $\dfrac{1}{2}$; comme $j \neq i$, on obtient $DE_{ij}D^{-1} = 2E_{ij}$. Donc $\varphi(E_{ij}) = \varphi(2E_{ij}) = 2\varphi(E_{ij})$, et $\varphi(E_{ij}) = 0$. Par l'exercice 37, les matrices E_{ii} sont toutes semblables, donc $\varphi(E_{ii}) = \lambda$ ne dépend pas de i. Par linéarité,

$$\varphi(M) = \sum_{i,j} m_{ij}\varphi(E_{ij}) = \lambda \sum_{i} m_{ii}, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\varphi = \lambda\ \mathrm{tr}, \quad \lambda \in \mathbb{K}}$$

EXERCICE 70 ⋆⋆⋆⋆

Idée. L'inégalité appliquée avec des matrices inversibles montre que f est constante sur les classes d'équivalence, donc ne dépend que du rang ; appliquée aux matrices J_r, elle montre que cette dépendance est croissante.

Si P et Q sont inversibles, on a

$$f(PAQ) \leqslant f(AQ) \leqslant f(A) \qquad \text{et} \qquad f(A) = f(P^{-1}(PAQ)Q^{-1}) \leqslant f(PAQ).$$

Ainsi f est constante sur chaque classe d'équivalence, c'est-à-dire, par le théorème 6, sur chaque ensemble de matrices de même rang : il existe $\varphi : [\![0\,;n]\!] \to \mathbb{R}$ telle que $f = \varphi \circ \mathrm{rg}$. Pour $r \leqslant s$, on a $J_r = J_r J_s$, donc $\varphi(r) = f(J_r) \leqslant f(J_s) = \varphi(s)$: φ est croissante.

Réciproquement, si $f = \varphi \circ \mathrm{rg}$ avec φ croissante, l'inégalité $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rg}A, \mathrm{rg}B)$ donne $f(AB) \leqslant \min\left(f(A), f(B)\right)$.

$$\boxed{f = \varphi \circ \mathrm{rg}, \qquad \varphi : [\![0\,;n]\!] \to \mathbb{R} \text{ croissante}}$$

EXERCICE 71 ⋆⋆⋆⋆

Idée. C'est un algorithme d'Euclide matriciel : multiplier à gauche par D^{-1} ou G^{-1} retranche une ligne à l'autre. La condition $ad-bc=1$ impose que l'une des lignes domine l'autre, et la somme des coefficients diminue à chaque étape.

On a $D^{-1}M = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{pmatrix}$ et $G^{-1}M = \begin{pmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{pmatrix}$, et ces deux matrices vérifient encore $(a-c)d-(b-d)c = ad-bc = 1$, de même pour la seconde.

Étape clé. Soit $M \in \mathcal{S}$, $M \neq I_2$. Montrons que les lignes de M sont comparables coefficient par coefficient. Si l'on avait $a > c$ et $b < d$, alors $ad-bc \geqslant (c+1)(b+1)-bc = b+c+1$; l'égalité $ad-bc=1$ forcerait $b=c=0$, puis $ad=1$, soit $M=I_2$, exclu. Si l'on avait $a<c$ et $b>d$, alors $ad-bc \leqslant (c-1)d-(d+1)c = -c-d < 1$, exclu. Les deux lignes ne sont pas égales, sinon $ad-bc=0$. Donc exactement l'une des deux matrices $D^{-1}M$, $G^{-1}M$ appartient à $\mathcal{S}$, et la somme de ses coefficients est strictement inférieure à celle de M, puisqu'on a retranché une ligne non nulle.

Existence. On répète l'étape clé ; la somme des coefficients, entier naturel, décroît strictement, donc on aboutit à I_2 en un nombre fini d'étapes, et M est le produit des facteurs D ou G retranchés.

Unicité. Si $M = M_1 M_2 \cdots M_r$ avec $r \geqslant 1$ et $M_k \in \{D, G\}$, la matrice $M_1^{-1}M = M_2 \cdots M_r$ est à coefficients entiers naturels : par l'étape clé, M_1 est imposé. De plus, $M \neq I_2$, car multiplier à gauche par D ou G une matrice de $\mathcal{S}$ augmente strictement la somme de ses coefficients. Une récurrence sur la somme des coefficients conclut.

tout $M \in \mathcal{S}$ s'écrit de façon unique comme produit de facteurs D et G

Par exemple, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = DG$ et $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = DDG$. La suite des facteurs code le développement en fraction continue de $\dfrac{a}{c}$, ce que l'on pourra relier à l'algorithme d'Euclide du chapitre 12.