EXERCICES – CHAPITRE 16

MATRICES

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Dans toute la feuille, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n, p, q des entiers naturels non nuls, et E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On note E_{ij} les matrices élémentaires, J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1, et l'on identifie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^n$.

Calcul matriciel

EXERCICE 1 ⋆

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A+B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$. Les comparer.
2. Calculer $A^2 + AB + BA + B^2$, et expliquer le résultat de la question 1.
3. À quelle condition sur deux matrices A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a-t-on $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

EXERCICE 2 ⋆

1. Déterminer les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Même question avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, où a, b sont réels et $b \neq 0$. Que se passe-t-il si $b = 0$?
3. L'ensemble des matrices qui commutent avec une matrice A donnée est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$? Est-il stable par produit ?

EXERCICE 3 ⋆

1. Trouver deux matrices A, $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que $AB = 0$ et $BA \neq 0$.
2. On pose
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Calculer AB et AC. La matrice A peut-elle être inversible ?
3. Déterminer toutes les matrices $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telles que $AF = 0$.

EXERCICE 4 ⋆⋆

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *stochastique en colonnes* si la somme des coefficients de chacune de ses colonnes vaut 1. On note $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que A est stochastique en colonnes si et seulement si $LA = L$.
2. En déduire que le produit de deux matrices stochastiques en colonnes l'est encore, ainsi que l'inverse d'une matrice stochastique en colonnes inversible.
3. Énoncer et démontrer le résultat analogue pour les matrices dont la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1.

EXERCICE 5 ⋆⋆

1. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer $E_{ij}AE_{k\ell}$ et $\mathrm{tr}(AE_{ij})$.
2. En déduire que si $\mathrm{tr}(AM) = 0$ pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $A = 0$.
3. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pourra utiliser les matrices E_{ij}.

EXERCICE 6 ⋆⋆

1. Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, exprimer $\mathrm{tr}(A^TA)$ à l'aide des coefficients de A.
2. En déduire que, pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à coefficients réels, $A^TA = 0$ entraîne $A = 0$.
3. Le résultat subsiste-t-il pour des matrices à coefficients complexes ? On pourra chercher une matrice symétrique non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de carré nul.

EXERCICE 7 ⋆⋆

1. Soit A, $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. Montrer que AB est symétrique si et seulement si $AB = BA$.
2. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A^2 est symétrique et que les coefficients diagonaux de A sont nuls.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à coefficients réels. Montrer que $X^TAX = 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si A est antisymétrique.

Matrices carrées

EXERCICE 8 ⋆

Calculer A^2 et A^3, conjecturer puis démontrer une expression de A^n pour $n \geqslant 1$, dans les deux cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 9 ⋆

On considère les suites définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $c_0 = 7$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = 3a_n + b_n, \qquad b_{n+1} = 3b_n + c_n, \qquad c_{n+1} = 3c_n.$$

1. Déterminer une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$, où $X_n = (a_n, b_n, c_n)$, et exprimer X_n en fonction de A, n et X_0.
2. On pose $N = A - 3I_3$. Calculer N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis A^n.
3. En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de n.

EXERCICE 10 ⋆⋆

Soit $d \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ la matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients situés sur et au-dessus de la diagonale valent 1. On pose $N = E_{12} + E_{23} + \cdots + E_{d-1,d}$.

1. Calculer N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, et montrer que $A = \sum_{k=0}^{d-1} N^k$.
2. Calculer $(I_d - N)A$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
3. Calculer A^2, puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pourra écrire $A = (I_d - N)^{-1}$ et chercher les coefficients de A^n sur chaque « diagonale ».

EXERCICE 11 ⋆⋆

Soit $U = J - I_4 \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, matrice dont les coefficients valent 0 sur la diagonale et 1 ailleurs.

1. Calculer U^2 et trouver deux réels α, β tels que $U^2 = \alpha U + \beta I_4$.
2. Montrer qu'il existe deux suites (α_k) et (β_k) telles que $U^k = \alpha_k I_4 + \beta_k U$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et donner des relations de récurrence qu'elles vérifient.
3. Montrer que $\beta_{k+2} = 2\beta_{k+1} + 3\beta_k$, puis exprimer β_k et α_k en fonction de k.
4. En déduire que U est inversible et retrouver U^{-1} à partir de la question 1.

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$ et en déduire que A est inversible, et son inverse.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $B^3 - B$, et en déduire B^{-1}.
3. Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $C^2 - 3C + 2I_3$ et en déduire C^{-1}.
4. Montrer qu'il existe deux suites (u_n), (v_n) telles que $C^n = u_n C + v_n I_3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et calculer C^n.

EXERCICE 13 ⋆⋆

1. Soit A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotentes et qui commutent. Montrer que AB et $A + B$ sont nilpotentes.
2. Montrer par un exemple que le résultat tombe en défaut si A et B ne commutent pas.
3. Soit A nilpotente, avec $A^s = 0$. Montrer que $I_n - A$ est inversible et donner son inverse. Quel calcul sur les nombres réels reconnaît-on ?

EXERCICE 14 ⋆⋆

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $M(a,b)M(a',b')$, et exprimer le résultat sous la forme $M(a'',b'')$.
2. Pour quels couples (a,b) la matrice $M(a,b)$ est-elle inversible ? Donner alors son inverse.
3. Interpréter ces résultats à l'aide des nombres complexes $a + ib$.

EXERCICE 15 ⋆⋆⋆

Pour $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, on pose

$$M(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix},$$

et l'on note $\mathbb{H}$ l'ensemble de ces matrices. On pose enfin

$$I = M(0,1,0,0), \qquad J' = M(0,0,1,0), \qquad K = M(0,0,0,1).$$

1. Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et en donner une base et la dimension.
2. Calculer tous les produits XY pour $X, Y \in \{I, J', K\}$. En déduire que $\mathbb{H}$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, non commutatif.
3. Calculer $M^T M$ pour $M = M(a,b,c,d)$. En déduire que tout élément non nul de $\mathbb{H}$ est inversible, et que son inverse appartient à $\mathbb{H}$.
4. Montrer que l'équation $X^2 = -I_4$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{H}$. Comparer avec ce que l'on sait des racines d'un polynôme de degré 2 à coefficients dans un corps (chapitre 13).

EXERCICE 16 ⋆⋆⋆

Soit $A = \left(\min(i,j)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients situés sur et au-dessus de la diagonale valent 1, déjà rencontrée à l'exercice 10.

1. Montrer que $A = U^T U$.
2. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.
3. Vérifier le résultat pour $n = 3$.

EXERCICE 17 ⋆⋆⋆

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs ou nuls dont la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1.

1. Montrer que $\mathcal{D}$ est stable par produit.
2. Montrer qu'une *matrice de permutation*, c'est-à-dire une matrice dont chaque ligne et chaque colonne contient exactement un coefficient égal à 1, les autres étant nuls, appartient à $\mathcal{D}$, est inversible et a son inverse dans $\mathcal{D}$.
3. Réciproquement, soit $A \in \mathcal{D}$ inversible, d'inverse $B \in \mathcal{D}$. En étudiant les coefficients de $AB = I_n$, montrer que chaque ligne de A ne contient qu'un coefficient non nul, puis que A est une matrice de permutation.

Matrices et applications linéaires

EXERCICE 18 ⋆

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z) = (x-z, y, y)$.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.
2. Calculer A^2, A^3 et A^4, conjecturer une expression de A^n pour $n \geqslant 1$, puis la démontrer.
3. En déduire l'expression de $f^n(x,y,z)$.

EXERCICE 19 ⋆

Montrer que les applications suivantes sont linéaires, et déterminer leurs matrices dans les bases canoniques.

(i) $u : \mathbb{K}_3[X] \to \mathbb{K}^2$, $P \mapsto (P(-1), P'(0) + P''(1))$.

(ii) $v : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X]$, $P \mapsto XP'$.

(iii) $w : \mathbb{K}_3[X] \to \mathbb{K}_3[X]$, $P \mapsto 2P + (X-1)P'$.

Lesquelles sont injectives ? surjectives ?

EXERCICE 20 ⋆

1. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer A^{-1}.
2. Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $\Delta(P) = P + P'$. Déterminer sa matrice dans la base canonique.
3. En déduire que Δ est un automorphisme, et résoudre l'équation $\Delta(P) = 1 + X + 2X^2$.

EXERCICE 21 ⋆

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_3$?
2. Existe-t-il $C \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que $CA = I_2$? Si oui, déterminer toutes ces matrices.

EXERCICE 22 ⋆⋆

Soit $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$.

1. Donner une base $\mathcal{B}$ de F.
2. Montrer que $T : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est un endomorphisme de F.
3. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T)$ et en déduire que T est un automorphisme de F.

EXERCICE 23 ⋆⋆

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$. Pour $k \in [\![0\,;n]\!]$, on note $f_k : x \mapsto x^k \mathrm{e}^{\alpha x}$, et $E = \mathrm{Vect}(f_0, \ldots, f_n)$.

1. Quelle est la dimension de E ?
2. Montrer que la dérivation $D : f \mapsto f'$ induit un endomorphisme de E, et donner sa matrice dans la base $(f_0, \ldots, f_n)$.
3. Montrer que D est un automorphisme de E si et seulement si $\alpha \neq 0$.
4. Application : déterminer une primitive de $x \mapsto x^2 \mathrm{e}^x$ sans intégrer par parties.

EXERCICE 24 ⋆⋆

1. Montrer que $f : P \mapsto X^2P'' + 2XP'$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_3[X]$. Déterminer sa matrice dans la base canonique, et en déduire $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
2. L'application $g : P \mapsto (X^2-1)P' - (2X+1)P$ est-elle un automorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$?

EXERCICE 25 ⋆⋆

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

1. On note L_A l'endomorphisme $M \mapsto AM$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Déterminer sa matrice dans la base $(E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$.
2. Généraliser à $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, en ordonnant convenablement la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Quel est le rang de L_A ?
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer le rang de $v \mapsto u \circ v$, endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

EXERCICE 26 ⋆⋆

Soit $a \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, et τ_a l'endomorphisme $P \mapsto P(X+a)$ de $\mathbb{K}_n[X]$.

1. Déterminer la matrice A_a de τ_a dans la base canonique.
2. Calculer $\tau_a \circ \tau_b$. En déduire que A_a est inversible et donner A_a^{-1}, puis A_1^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
3. Écrire A_1 et A_1^{-1} pour $n = 3$. Quelle identité sur les coefficients binomiaux le produit $A_1 A_1^{-1} = I_4$ exprime-t-il ?

EXERCICE 27 ⋆⋆

Soit $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.

1. Montrer que $\varphi : P \mapsto (P(x_0), \dots, P(x_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.
2. En déduire que la *matrice de Vandermonde* $V = (x_i^j)_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ est inversible.
3. Que représentent les colonnes de V^{-1} ? On pourra penser à l'interpolation de Lagrange (chapitre 13).

EXERCICE 28 ⋆⋆⋆

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où $\dim E = n \geqslant 1$, tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

1. Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.
2. Écrire $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, et en déduire le rang de f.
3. Montrer que deux endomorphismes vérifiant ces hypothèses ont des matrices semblables.

EXERCICE 29 ⋆⋆⋆

Soit $n = \dim E$. Un *drapeau complet* de E est une suite de sous-espaces

$$\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n = E$$

telle que $\dim F_i = i$ pour tout i. Un endomorphisme u *stabilise* ce drapeau si $u(F_i) \subset F_i$ pour tout i.

1. Montrer que u stabilise un drapeau complet si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure à diagonale nulle. Montrer que $u_A(F_i) \subset F_{i-1}$ pour un drapeau que l'on précisera, et en déduire que $A^n = 0$.

Changements de bases, équivalence et similitude

EXERCICE 30 ⋆

1. Montrer que $\mathcal{B} = ((1,0,0,0),(0,0,1,1),(1,1,1,1),(1,0,0,1))$ et $\mathcal{C} = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ sont des bases de $\mathbb{R}^4$ et de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées de $u = (1,-2,5,6)$ dans la base $\mathcal{B}$, en résolvant un système, puis à l'aide d'une matrice de passage.
3. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z,t) = (x - 2y + 2z + 5t,\ x - 2y + 3z + 4t,\ -x + 2z - 3t).$$

Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques, puis $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

EXERCICE 31 ⋆⋆

Soit E muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

dans $\mathcal{B}$. On pose $e'_1 = e_2 + e_3$, $e'_2 = e_1 - e_2 + e_3$ et $e'_3 = e_1 - e_2$.

1. Vérifier que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E, et calculer $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
2. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et son inverse. Exprimer A en fonction de D et P.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 32 ⋆⋆

Soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$f(x,y,z) = (3x - 4y - 2z,\ 4x - 7y - 4z,\ -5x + 10y + 6z),$$

$$g(x,y,z) = (5x - 8y - 4z,\ 8x - 15y - 8z,\ -10x + 20y + 11z).$$

1. Montrer que f est un projecteur, et trouver une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.
2. Montrer que g est une symétrie, et trouver une base dans laquelle sa matrice est diagonale. Quel lien y a-t-il entre f et g ?

EXERCICE 33 ⋆⋆

Déterminer la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la projection sur le plan d'équation $x - 2y + z = 0$ parallèlement à la droite $\mathrm{Vect}((-1,1,2))$. Vérifier le résultat par deux calculs indépendants.

EXERCICE 34 ⋆⋆

Soit $\varphi : P \mapsto (X^2+2)P'' + (X+1)P' + P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner sa matrice dans la base canonique.
2. Déterminer les réels λ tels que $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}$ ne soit pas injectif, et pour chacun d'eux le noyau de $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}$.
3. En déduire une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

EXERCICE 35 ⋆⋆

1. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à $\mathrm{diag}(0,1,3)$.
2. Montrer que $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à E_{21}.

EXERCICE 36 ⋆⋆

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\theta \mapsto R(\theta)$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\times)$, et déterminer son noyau.
2. Calculer $R(\theta)^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
3. On suppose $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.
   (a) Montrer qu'il n'existe aucun vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $R(\theta)v$ soit colinéaire à v. En déduire que $R(\theta)$ n'est semblable à aucune matrice diagonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $R(\theta)$, vue comme une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, est semblable à une matrice diagonale, et expliciter une matrice de passage.

EXERCICE 37 ⋆⋆

On considère les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geqslant 2$.

1. Deux matrices élémentaires sont-elles toujours équivalentes ?
2. Montrer que E_{ii} et E_{jj} sont semblables, en explicitant une matrice de passage.
3. Montrer que, pour $i \neq j$ et $k \neq \ell$, les matrices E_{ij} et $E_{k\ell}$ sont semblables.
4. Les matrices E_{11} et E_{12} sont-elles semblables ?

EXERCICE 38 ⋆⋆

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = -\mathrm{id}_E$.

1. Montrer que, pour tout $x \neq 0$, la famille $(x, u(x))$ est une base de E.
2. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Existe-t-il un tel endomorphisme sur un $\mathbb{R}$-espace de dimension 3 ?

EXERCICE 39 ⋆⋆

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec $\dim E = n$, et $\lambda \neq \mu$ deux scalaires tels que $(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \circ (u - \mu\,\mathrm{id}_E) = 0$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(u - \mu\,\mathrm{id}_E)$.
2. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\mathrm{diag}(\lambda,\ldots,\lambda,\mu,\ldots,\mu)$.
3. Que retrouve-t-on pour $(\lambda,\mu) = (1,0)$, puis pour $(\lambda,\mu) = (1,-1)$?

EXERCICE 40 ⋆⋆

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M^2 = M$. Montrer que $\mathrm{tr}(M)$ est un entier naturel, et qu'il est égal au rang de M.
2. Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $S^2 = I_n$. Montrer que $\mathrm{tr}(S)$ est un entier de même parité que n, compris entre $-n$ et n.
3. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ peut-elle être la matrice d'un projecteur ? d'une symétrie ?

EXERCICE 41 ⋆⋆

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & -2 & -2 \\ 2 & -6 & -6 & -4 & -2 \\ -3 & 12 & 12 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le rang r de A, puis des matrices inversibles Q et P telles que $A = QJ_rP^{-1}$.

EXERCICE 42 ⋆⋆⋆

On suppose qu'il existe A, $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et deux réels $x \leqslant y$ tels que

$$AB = \begin{pmatrix} 25 & 11 \\ 11 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad BA = \begin{pmatrix} x & 14 \\ 14 & y \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $x + y = 30$.
2. En calculant de deux façons $\mathrm{tr}(ABAB)$, montrer que $x^2 + y^2 = 500$.
3. En déduire x et y.

EXERCICE 43 ⋆⋆⋆

1. Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement s'il existe deux colonnes non nulles $X \in \mathbb{K}^n$ et $Y \in \mathbb{K}^p$ telles que $M = XY^T$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Montrer que $M^2 = \mathrm{tr}(M)\, M$.
3. En déduire que M est semblable à $\mathrm{tr}(M)E_{11}$ si $\mathrm{tr}(M) \neq 0$, et à E_{12} sinon.

EXERCICE 44 ⋆⋆⋆

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer qu'un sous-espace F de E est stable par u si et seulement si $F \subset \mathrm{Ker}\, u$ ou $\mathrm{Im}\, u \subset F$.

EXERCICE 45 ⋆⋆⋆

1. Montrer que l'application $\Theta : A \mapsto (M \mapsto \mathrm{tr}(AM))$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$. On pourra utiliser l'exercice 5.
2. En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour $n \geqslant 2$, est de la forme $\{M \mid \mathrm{tr}(AM) = 0\}$ avec $A \neq 0$.
3. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour $n \geqslant 2$, contient une matrice inversible. On pourra chercher une matrice de permutation, au sens de l'exercice 17, convenable.

Opérations élémentaires et systèmes linéaires

EXERCICE 46 ⋆

Calculer le rang des familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ ou de $\mathbb{R}^4$. Sont-elles libres ? génératrices ? Compléter celles qui sont libres en des bases, et extraire une base de celles qui sont génératrices.

(i) $\big((1,2,5,4),(2,4,10,7)\big)$;

(ii) $\big((1,2,3),(-5,-10,-15)\big)$;

(iii) $\big((1,-2,7),(0,-12,35),(0,0,2)\big)$;

(iv) $\big((3,1,-4,6),(1,1,4,4),(1,0,-4,a)\big)$, en fonction du réel a.

EXERCICE 47 ⋆⋆

Dire si les matrices suivantes sont inversibles, et calculer leur inverse le cas échéant, par la méthode de Gauss-Jordan.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&2\\0&2&3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}\mathrm{i}&-1&2\mathrm{i}\\2&0&2\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

EXERCICE 48 ⋆⋆

1. Pour quelles valeurs du réel m la matrice $\begin{pmatrix}1&1&m\\1&m&1\\m&1&1\end{pmatrix}$ est-elle inversible ?
2. Pour quelles valeurs du réel t la matrice $A_t=\begin{pmatrix}1&0&t\\2&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Calculer alors A_t^{-1}.

EXERCICE 49 ⋆⋆

1. Montrer que $M=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&3&4\\0&1&1\end{pmatrix}$ est inversible et calculer M^{-1}.
2. En déduire, pour tout réel m, la solution du système

$$\begin{cases}x-z&=&m\\-2x+3y+4z&=&1\\y+z&=&2m\end{cases}$$

EXERCICE 50 ⋆⋆

1. Soit a, $b \in \mathbb{C}$. Montrer que le rang de

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

est au moins 2. Pour quelles valeurs de a et b vaut-il exactement 2 ?

2. Soit $a \in \mathbb{C}$. Déterminer le rang de

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & a & 3 \\ -4 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 51 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$. Déterminer le rang des matrices $\big(\max(i,j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\big(\sin(i+j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

EXERCICE 52 ⋆⋆⋆

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à *diagonale strictement dominante*, c'est-à-dire telle que, pour tout i,

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|.$$

1. Soit $X \in \operatorname{Ker} A$ non nul, et i un indice tel que $|x_i| = \max_k |x_k|$. En écrivant la i-ième équation de $AX = 0$, aboutir à une contradiction.
2. En déduire que A est inversible.
3. Application : montrer que, pour tout réel t tel que $|t| < \frac{1}{2}$, la matrice $I_n + t(N + N^T)$ est inversible, où $N = E_{12} + E_{23} + \cdots + E_{n-1,n}$.

EXERCICE 53 ⋆⋆⋆

Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de AB, et en déduire ceux de A et de B.
2. Déterminer $\operatorname{Ker}(AB)$ et $\operatorname{Im}(AB)$. En déduire $\operatorname{Ker} B$ et $\operatorname{Im} A$.
3. Calculer $(AB)^2$, et en déduire que $BA = I_2$.

Exercices de synthèse

EXERCICE 54 ⋆⋆

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Les matrices considérées sont carrées d'ordre $n \geqslant 2$.

1. Si $AB = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.
2. Le produit de deux matrices symétriques est symétrique.
3. S'il existe $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telles que $AB = I_n$, alors $n \leqslant p$.
4. Deux matrices qui ont le même rang et la même trace sont semblables.
5. Si A est nilpotente, alors $I_n + A$ est inversible.
6. Pour toutes matrices A et B, $\mathrm{rg}(A+B) \leqslant \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$.
7. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $\mathrm{tr}(A^T A) = 0$, alors $A = 0$.
8. Si A et B sont semblables, alors A^2 et B^2 sont semblables.
9. Une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont deux à deux non colinéaires est inversible.
10. Si $A^2 = A$, alors $A = I_n$ ou A n'est pas inversible.

EXERCICE 55 ⋆⋆

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On dit que f *se factorise à travers* un espace vectoriel V de dimension finie s'il existe $\alpha \in \mathcal{L}(E,V)$ et $\beta \in \mathcal{L}(V,F)$ telles que $f = \beta \circ \alpha$.

1. Montrer que si f se factorise à travers V, alors $\dim V \geqslant \mathrm{rg} f$.
2. Déterminer la dimension minimale d'un espace à travers lequel f se factorise.
3. Traduire ce résultat matriciellement : montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang $r \geqslant 1$ s'écrit $A = BC$ avec $B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$, et qu'une telle écriture est impossible avec un entier strictement inférieur à r à la place de r. Comparer avec l'exercice 43.

EXERCICE 56 ⋆⋆

Soit A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On cherche les matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$X + \mathrm{tr}(X)\, A = B.$$

1. En prenant la trace des deux membres, résoudre cette équation lorsque $\mathrm{tr}\, A \neq -1$.
2. On suppose $\mathrm{tr}\, A = -1$. Montrer que l'équation n'a de solution que si $\mathrm{tr}\, B = 0$, et décrire alors l'ensemble des solutions.
3. Interpréter ces résultats à l'aide de l'endomorphisme $\Phi : X \mapsto X + \mathrm{tr}(X)\, A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: quand est-il bijectif ? Lorsque $\mathrm{tr}\, A = -1$, déterminer son noyau et son image, et vérifier le théorème du rang.

EXERCICE 57 ⋆⋆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de rang r. En partant de l'écriture $A = UJ_rV$, où U et V sont inversibles, montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que la matrice PA soit symétrique.

EXERCICE 58 ⋆⋆

Soit $p \geqslant 1$. On considère les matrices inversibles de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 0 ou 1.

1. Montrer qu'une telle matrice comporte au moins p coefficients égaux à 1, et que ce minimum est atteint.
2. Montrer qu'une telle matrice comporte au plus $p^2 - p + 1$ coefficients égaux à 1.
3. Montrer que la matrice obtenue à partir de la matrice dont tous les coefficients valent 1 en remplaçant par 0 les coefficients diagonaux d'indices $(2,2)$, …, (p,p) est inversible. Conclure.

EXERCICE 59 ⋆⋆⋆

On considère trois suites réelles (u_n), (v_n), (w_n) telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{v_n + w_n}{2}, \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + w_n}{2}, \qquad w_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

On pose $X_n = (u_n, v_n, w_n)$, $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}. Calculer $D = P^{-1}AP$, puis A^n.
2. Exprimer X_n en fonction de A, n et X_0.
3. Montrer que les trois suites convergent vers une même limite, que l'on exprimera à l'aide de u_0, v_0 et w_0. Interpréter ce résultat.

EXERCICE 60 ⋆⋆⋆

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{A}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g = 0\}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que $g \in \mathcal{A}(f)$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$.
3. En déduire que $\dim \mathcal{A}(f) = (\dim \operatorname{Ker} f)^2$. On pourra utiliser une base adaptée, ou la forme J_r.

EXERCICE 61 ⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $[M]_{ij}$ le coefficient d'indice (i,j) d'une matrice M.

1. Montrer que si A n'est pas une matrice scalaire, il existe $x \in \mathbb{K}^n$ tel que la famille (x, Ax) soit libre.
2. Déterminer les matrices A telles que $[M]_{11} = 0$ pour toute matrice M semblable à A.
3. Déterminer les matrices A telles que $[M]_{12} = 0$ pour toute matrice M semblable à A.

EXERCICE 62 ⋆⋆⋆

Soit G un sous-groupe fini de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$, de cardinal m, et $B = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{A \in G} A$.

1. Montrer que, pour tout $A_0 \in G$, l'application $A \mapsto A_0 A$ est une bijection de G sur lui-même. En déduire que $A_0 B = B$.
2. Montrer que $B^2 = B$.
3. En déduire que m divise $\displaystyle\sum_{A \in G} \operatorname{tr}(A)$.

EXERCICE 63 ⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$. Pour une permutation σ de $[\![1\,;n]\!]$, on note P_σ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice (i,j) vaut 1 si $i = \sigma(j)$ et 0 sinon, de sorte que $P_\sigma e_j = e_{\sigma(j)}$ pour tout vecteur e_j de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On cherche les sous-espaces F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $P_\sigma F \subset F$ pour toute permutation σ.

1. On note U le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1, $D = \mathbb{K}U$ et H l'ensemble des vecteurs colonnes dont la somme des coefficients est nulle. Vérifier que $\{0\}$, D, H et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ conviennent.
2. Montrer que H est engendré par les vecteurs $e_i - e_j$, pour $i \neq j$.
3. Soit F un sous-espace qui convient et qui n'est pas inclus dans D. Montrer que F contient un vecteur $e_i - e_j$ avec $i \neq j$, puis tous ces vecteurs. En déduire que $F = H$ ou $F = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
4. Conclure.

EXERCICE 64 ⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de trace nulle. On veut montrer que A est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls, par récurrence sur n.

1. Traiter le cas $n = 1$, puis le cas où A est une matrice scalaire.
2. On suppose $n \geqslant 2$ et A non scalaire. En utilisant la première question de l'exercice 61, montrer que A est semblable à une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A_1 \end{pmatrix}, \qquad L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K}), \quad C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}), \quad A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}),$$
et que $\operatorname{tr} A_1 = 0$.
3. Conclure en conjuguant par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$.
4. La réciproque est-elle vraie ?

EXERCICE 65 ⋆⋆⋆

Problème de Dirichlet discret. Soit $n \geqslant 3$. On dit qu'une matrice $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *harmonique* si chacun de ses coefficients intérieurs est la moyenne de ses quatre voisins, c'est-à-dire si
$$m_{ij} = \frac{m_{i-1,j} + m_{i+1,j} + m_{i,j-1} + m_{i,j+1}}{4} \quad \text{pour tous } i,j \in [\![2\,;n-1]\!].$$
On appelle *bord* de M la famille de ses coefficients m_{ij} tels que $i \in \{1,n\}$ ou $j \in \{1,n\}$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{H}$ des matrices harmoniques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et que $\dim \mathcal{H} \geqslant 4n-4$.
2. *Principe du maximum.* Soit M harmonique. Montrer que le plus grand coefficient de M est atteint sur le bord. On pourra considérer un coefficient maximal m_{ij} avec i minimal.
3. En déduire que deux matrices harmoniques qui ont le même bord sont égales.
4. Montrer enfin que, pour toute famille de $4n-4$ réels prescrits sur le bord, il existe une unique matrice harmonique ayant ce bord.

EXERCICE 66 ⋆⋆⋆

Soit $a_1, \ldots, a_{13}$ treize entiers compris entre 1 et 40. On veut montrer qu'il existe des entiers relatifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_{13}$, non tous nuls, tels que

$$a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_{13}^{\alpha_{13}} = 1.$$

1. Combien y a-t-il de nombres premiers inférieurs ou égaux à 40 ? On les note $p_1, \ldots, p_m$. Traduire l'égalité cherchée en un système linéaire homogène à coefficients entiers, dont les inconnues sont $\alpha_1, \ldots, \alpha_{13}$, à l'aide des exposants des p_i dans la décomposition des a_k.
2. Montrer que ce système admet une solution non nulle à coefficients rationnels. On pourra observer que la méthode du pivot de Gauss n'utilise que les quatre opérations.
3. Conclure.
4. Le résultat subsiste-t-il avec douze entiers ?

Les cinq derniers exercices sont des problèmes à traiter en autonomie : l'énoncé fixe le but, et c'est à vous de trouver le chemin.

EXERCICE 67 ⋆⋆⋆⋆

Théorème de Graham et Pollak. Lors d'un tournoi de ballon prisonnier entre $n \geqslant 2$ joueurs, on dispute m matchs ; au k-ième match, une équipe bleue B_k affronte une équipe rouge R_k, ces deux équipes étant non vides et disjointes, mais pas forcément de même effectif. À l'issue du tournoi, chaque joueur a affronté chaque autre joueur exactement une fois. Montrer que $m \geqslant n-1$, et que cette valeur peut être atteinte. On pourra introduire la matrice M_k dont le coefficient (i,j) vaut 1 si le joueur i était bleu et le joueur j rouge au k-ième match, et 0 sinon, puis étudier $M = \sum_k M_k$ et $M + M^T$.

EXERCICE 68 ⋆⋆⋆⋆

Soit A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de rangs r et s. Déterminer

$$\max\{\mathrm{rg}(UA + BV) \mid U, V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\}.$$

EXERCICE 69 ⋆⋆⋆⋆

Déterminer les formes linéaires φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\varphi(A) = \varphi(B)$ dès que A et B sont semblables.

EXERCICE 70 ⋆⋆⋆⋆

Déterminer les fonctions $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telles que, pour toutes matrices A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$f(AB) \leqslant \min\big(f(A), f(B)\big).$$

EXERCICE 71 ⋆⋆⋆⋆

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers naturels a, b, c, d telles que $ad - bc = 1$, et l'on pose

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que toute matrice de $\mathcal{S}$ s'écrit de façon unique comme un produit de facteurs égaux à D ou à G, le produit vide étant I_2.