CORRIGÉ – CHAPITRE 17

GROUPE SYMÉTRIQUE ET DÉTERMINANTS

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Les renvois « proposition n », « théorème n » désignent les énoncés du chapitre 17 du cours ; ceux des chapitres antérieurs sont précisés. Comme dans le cours, $\sigma\sigma'$ désigne la composée $\sigma \circ \sigma'$, la permutation écrite à droite s'appliquant en premier : pour calculer un produit de cycles, on lit donc les facteurs de droite à gauche. On note A^T la transposée de A, ε la signature et $\mathrm{Inv}(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ.

Le groupe symétrique

EXERCICE 1 ⋆

On applique la méthode du cours : on part du plus petit élément non fixé, on suit ses images successives jusqu'à revenir à lui, puis on recommence avec le plus petit élément non encore rencontré. Pour σ_1, on lit $1 \mapsto 5 \mapsto 2 \mapsto 4 \mapsto 6 \mapsto 8 \mapsto 1$, puis $3 \mapsto 9 \mapsto 3$, et 7 est fixe. Les trois autres se traitent de même. La signature s'obtient alors par la proposition 5 (ii) : un cycle de longueur p contribue par $(-1)^{p-1}$.

$$\boxed{\sigma_1 = (1\ 5\ 2\ 4\ 6\ 8)(3\ 9), \quad \varepsilon(\sigma_1) = 1} \qquad \boxed{\sigma_2 = (1\ 7\ 5\ 3)(2\ 9)(4\ 6), \quad \varepsilon(\sigma_2) = -1}$$

$$\boxed{\sigma_3 = (2\ 7\ 4\ 8\ 9)(3\ 6\ 5), \quad \varepsilon(\sigma_3) = 1} \qquad \boxed{\sigma_4 = (1\ 2)(3\ 5)(8\ 9), \quad \varepsilon(\sigma_4) = -1}$$

Ainsi $\varepsilon(\sigma_1) = (-1)^5(-1)^1$, $\varepsilon(\sigma_2) = (-1)^3(-1)(-1)$, $\varepsilon(\sigma_3) = (-1)^4(-1)^2$ et $\varepsilon(\sigma_4) = (-1)^3$. Le comptage des inversions, plus long, donne respectivement 22, 21, 18 et 5 inversions, et confirme les quatre signatures ✓. Les décompositions donnent aussi l'ordre de chaque permutation, qui est le ppcm des longueurs des cycles (exercice 7) : 6, 4, 15 et 2.

Piège. L'erreur la plus répandue est d'attribuer à un cycle de longueur p la signature $(-1)^p$: le cycle $(3\ 6\ 5)$ de σ_3 est pair, puisqu'il s'écrit avec deux transpositions.

EXERCICE 2 ⋆

La signature est un morphisme (théorème 2) : la signature d'un produit de cycles, disjoints ou non, est le produit de leurs signatures, et l'on n'a pas besoin de calculer le produit.

(i) Les deux transpositions contribuent chacune par -1, et le 3-cycle par 1.

$$\boxed{\varepsilon\big((1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2)\big) = (-1) \times 1 \times (-1) = 1}$$

Vérifions-le en calculant le produit, de droite à gauche. L'élément 1 est envoyé sur 2 par $(1\ 2)$, puis 2 sur 3 par $(1\ 2\ 3)$, et 3 est fixé par $(1\ 2)$: l'image de 1 est 3. De même, $3 \mapsto 3 \mapsto 1 \mapsto 2$ et $2 \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto 1$, tandis que les éléments de $[\![4\,;9]\!]$ sont fixes.

$$\boxed{(1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3\ 2)}$$

C'est un 3-cycle, donc une permutation paire ✓. On retrouvera ce résultat à l'exercice 8 : conjuguer $(1\ 2\ 3)$ par $(1\ 2)$ revient à échanger les noms 1 et 2 dans l'écriture du cycle, ce qui donne $(2\ 1\ 3) = (1\ 3\ 2)$.

(ii) C'est un cycle de longueur 8.

$$\boxed{\varepsilon\big((2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)\big) = (-1)^7 = -1}$$

(iii) Le produit contient deux transpositions, (1 2) et (2 5), deux 4-cycles, (2 4 6 5) et (3 5 6 1), qui sont impairs, et trois 3-cycles, qui sont pairs. Il y a donc quatre facteurs impairs.

$$\boxed{\varepsilon = (-1)^4 = 1}$$

Le calcul effectif, plus long, donne le 7-cycle (1 4 3 6 7 2 5), qui est bien pair ✓.

(iv) Les cycles (1 2 3), (1 6 7 8 9) et (1 5 9), de longueurs impaires, sont pairs ; seule la transposition (4 5) est impaire.

$$\boxed{\varepsilon = -1}$$

Le produit vaut (1 4 5 2 3)(6 7 8 9), de signature $1 \times (-1) = -1$ ✓.

À retenir. Les cycles d'un produit quelconque ne sont pas à supports disjoints : on ne peut pas y lire la décomposition de la permutation. On peut en revanche toujours y lire sa signature, parce que la signature est un morphisme.

EXERCICE 3 ⋆

1. En suivant les images, $1 \mapsto 3 \mapsto 6 \mapsto 2 \mapsto 5 \mapsto 1$ et $4 \mapsto 7 \mapsto 4$. La proposition 3 écrit ensuite chaque cycle comme un produit de transpositions :

$$\boxed{\sigma = (1\ 3\ 6\ 2\ 5)(4\ 7) = (1\ 3)(3\ 6)(6\ 2)(2\ 5)(4\ 7), \qquad \varepsilon(\sigma) = (-1)^5 = -1}$$

La suite des images $3, 5, 6, 7, 1, 2, 4$ compte $2+3+3+3 = 11$ inversions, nombre impair ✓.

2. Notons $c = (1\ 3\ 6\ 2\ 5)$ et $\tau = (4\ 7)$. Ces cycles commutent (proposition 2), donc $\sigma^k = c^k\tau^k$, et ces deux permutations agissent sur des supports disjoints : $\sigma^k = \mathrm{id}$ si et seulement si $c^k = \mathrm{id}$ et $\tau^k = \mathrm{id}$, c'est-à-dire si et seulement si 5 et 2 divisent k. Comme $2001 = 200 \times 10 + 1$, on a $\sigma^{2001} = (\sigma^{10})^{200}\sigma = \sigma$.

$$\boxed{\text{l'ordre de } \sigma \text{ est } 10, \qquad \sigma^{2001} = \sigma = (1\ 3\ 6\ 2\ 5)(4\ 7)}$$

3. On simplifie d'abord les facteurs : $(1\ 5\ 3)^{-1} = (3\ 5\ 1) = (1\ 3\ 5)$, et $(5\ 7\ 6)^2$ envoie 5 sur 6, 6 sur 7 et 7 sur 5, donc $(5\ 7\ 6)^2 = (5\ 6\ 7)$. Ainsi $\sigma' = (1\ 3\ 2)(1\ 3\ 5)(5\ 6\ 7)(1\ 3\ 4\ 2)$, que l'on applique de droite à gauche. Par exemple, 7 est fixé par (1 3 4 2), envoyé sur 5 par (5 6 7), puis sur 1 par (1 3 5), puis sur 3 par (1 3 2) : $\sigma'(7) = 3$. On trouve de même la suite des images $5, 2, 4, 1, 6, 7, 3$.

$$\boxed{\sigma' = (1\ 5\ 6\ 7\ 3\ 4) = (1\ 5)(5\ 6)(6\ 7)(7\ 3)(3\ 4), \qquad \varepsilon(\sigma') = (-1)^5 = -1}$$

Le contrôle par les facteurs donne $1 \times 1 \times 1 \times (-1) = -1$ ✓, seul le 4-cycle étant impair. Un 6-cycle a pour ordre 6 ; comme $100 = 16 \times 6 + 4$, on a $\sigma'^{100} = \sigma'^4$. Si $\sigma' = (a_1\ \cdots\ a_6)$, la puissance σ'^4 envoie a_i sur a_{i+4}, les indices étant lus modulo 6 : elle se décompose en $(a_1\ a_5\ a_3)(a_2\ a_6\ a_4)$.

$$\boxed{\text{l'ordre de } \sigma' \text{ est } 6, \qquad \sigma'^{100} = \sigma'^4 = (1\ 3\ 6)(4\ 7\ 5)}$$

Ce résultat est pair, comme il se doit : $\varepsilon(\sigma'^4) = \varepsilon(\sigma')^4 = 1$ ✓.

Piège. L'inverse d'un cycle se lit à l'envers, $(1\ 5\ 3)^{-1} = (3\ 5\ 1)$, et non $(1\ 5\ 3)$; seules les transpositions sont leur propre inverse.

EXERCICE 4 ⋆

1. On applique d'abord $(d\ a)$, puis $(c\ d)$, puis $(a\ b)$. L'élément a devient d, puis c, puis reste c ; l'élément c reste c, devient d, puis reste d ; l'élément d devient a, reste a, puis devient b ; enfin b est fixé par les deux premiers facteurs, puis envoyé sur a. Les autres éléments sont fixes.

$$\boxed{(a\ b)(c\ d)(d\ a) = (a\ c\ d\ b)}$$

Avec $(a, b, c, d) = (1, 2, 3, 4)$, on obtient $(1\ 3\ 4\ 2)$, ce que confirme le calcul direct ✓.

2. Soit σ une permutation ayant au moins $n-1$ points fixes, et i un élément tel que tous les autres soient fixes. Si l'on avait $\sigma(i) = j \neq i$, alors $\sigma(j) = j = \sigma(i)$ contredirait l'injectivité de σ. Donc $\sigma(i) = i$.

$$\boxed{\text{la seule permutation ayant au moins } n-1 \text{ points fixes est id}}$$

Autrement dit, une permutation différente de l'identité déplace au moins deux éléments, et les transpositions sont celles qui en déplacent exactement deux.

3. La réponse est non. La permutation $s = (1\ 2)(3\ 4)$, qui existe puisque $n \geqslant 4$, est produit de deux transpositions à supports disjoints, qui commutent : $s^2 = (1\ 2)^2(3\ 4)^2 = \mathrm{id}$. Elle est différente de l'identité, et elle déplace quatre éléments, donc n'est pas une transposition.

$$\boxed{s = (1\ 2)(3\ 4) \text{ vérifie } s^2 = \mathrm{id},\ s \neq \mathrm{id},\ \text{et n'est pas une transposition}}$$

L'exercice 7 montrera que $s^2 = \mathrm{id}$ et $s \neq \mathrm{id}$ équivaut à : tous les cycles de s sont des transpositions.

4. On classe les permutations selon la forme de leur décomposition en cycles, et l'on garde celles dont la signature vaut 1 (proposition 5). Dans $\mathfrak{S}_3$, les trois transpositions sont impaires, l'identité et les deux 3-cycles sont pairs. Dans $\mathfrak{S}_4$, les 24 permutations se répartissent en l'identité, 6 transpositions (impaires), 8 cycles de longueur 3 (pairs : 4 choix du point fixe, et 2 cycles sur les trois autres éléments), 6 cycles de longueur 4 (impairs) et 3 produits de deux transpositions disjointes (pairs) ; on vérifie que $1 + 6 + 8 + 6 + 3 = 24$.

$$\boxed{\mathfrak{A}_3 = \{\mathrm{id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathfrak{A}_4 : & \mathrm{id}\ ; \\ & (1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2),\ (1\ 2\ 4),\ (1\ 4\ 2),\ (1\ 3\ 4),\ (1\ 4\ 3),\ (2\ 3\ 4),\ (2\ 4\ 3)\ ; \\ & (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3) \end{array}}$$

On retrouve $\dfrac{4!}{2} = 12$ éléments, comme l'annonce la remarque du cours sur le groupe alterné ✓.

EXERCICE 5 ⋆⋆

1. La permutation envoie 1 sur n et k sur $k-1$ pour $k \geqslant 2$. En suivant les images de 1, on obtient $1 \mapsto n \mapsto n-1 \mapsto \cdots \mapsto 2 \mapsto 1$: c'est un cycle de longueur n.

$$\boxed{\varepsilon = (-1)^{n-1}}$$

Le comptage des inversions le confirme : les couples $(1, j)$, avec $j \geqslant 2$, sont des inversions, puisque l'image de 1 est n, et ce sont les seules, car la suite des images $1, 2, \ldots, n-1$ des éléments 2, …, n est croissante. Il y a $n-1$ inversions ✓.

2. La première permutation échange $2k-1$ et $2k$ pour chaque $k \in [\![1\,;n]\!]$: c'est le produit des n transpositions $(2k-1\ \ 2k)$.

$$\boxed{\varepsilon\big((1\ 2)(3\ 4)\cdots(2n-1\ \ 2n)\big) = (-1)^n}$$

Pour la seconde, notée σ, on a $\sigma(i) = 2i-1$ et $\sigma(n+k) = 2k$ pour $i,\ k \in [\![1\,;n]\!]$. Deux éléments d'une même moitié ne forment pas d'inversion, puisque σ est croissante sur $[\![1\,;n]\!]$ et sur $[\![n+1\,;2n]\!]$. Pour

$i \leqslant n$ et $j = n+k$, le couple (i,j) est une inversion si et seulement si $2i-1 > 2k$, c'est-à-dire $i \geqslant k+1$: il y a $n-k$ tels indices i. Au total,

$$\mathrm{Inv}(\sigma) = \sum_{k=1}^{n}(n-k) = \frac{n(n-1)}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n(n-1)/2}}$$

Pour $n=2$, la permutation $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$ est la transposition $(2\ 3)$, de signature $-1 = (-1)^1$ ✓.

À retenir. Pour une famille de permutations dépendant de n, on choisit la méthode selon la forme : une décomposition en cycles évidente donne la signature immédiatement, sinon on compte les inversions par paquets, ici selon l'élément j de la seconde moitié.

EXERCICE 6 ⋆⋆

On note $c_k = (k \ \ k+1 \ \ k+2)$, de sorte que $\sigma = c_1 c_2 \cdots c_{n-2}$, et l'on calcule $\sigma(x)$ en appliquant d'abord c_{n-2}, puis c_{n-3}, et ainsi de suite jusqu'à c_1. On utilise que c_k fixe tout élément hors de $\{k, k+1, k+2\}$.

- Pour $3 \leqslant x \leqslant n-2$, les facteurs c_k avec $k > x$ fixent x. Puis c_x envoie x sur $x+1$, c_{x-1} envoie $x+1$ sur $x-1$, et c_{x-2} envoie $x-1$ sur x. Les facteurs restants, d'indices $k \leqslant x-3$, fixent x : on obtient $\sigma(x) = x$.
- Pour $x = 1$, seul c_1 agit, et $\sigma(1) = 2$. Pour $x = 2$, le facteur c_2 envoie 2 sur 3, puis c_1 envoie 3 sur 1 : $\sigma(2) = 1$.
- Pour $x = n-1$, le facteur c_{n-2} envoie $n-1$ sur n, que tous les autres fixent : $\sigma(n-1) = n$. Pour $x = n$, le facteur c_{n-2} envoie n sur $n-2$, puis c_{n-3} envoie $n-2$ sur $n-1$, que les facteurs suivants fixent : $\sigma(n) = n-1$.

Comme $n \geqslant 5$, les ensembles $\{1,2\}$ et $\{n-1, n\}$ sont disjoints, et l'on obtient une décomposition en cycles à supports disjoints.

$$\boxed{\sigma = (1\ 2)(n-1 \ \ n), \qquad \text{d'ordre } 2, \qquad \varepsilon(\sigma) = 1}$$

La signature se contrôle sans calcul : σ est un produit de 3-cycles, tous pairs, donc $\varepsilon(\sigma) = 1$ par le théorème 2 ✓. Pour $n = 5$, on vérifie directement que $(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4)(3\ 4\ 5) = (1\ 2)(4\ 5)$.
Piège. Le produit de cycles qui se chevauchent n'a aucune raison de ressembler à ses facteurs : ici, $n-2$ cycles de longueur 3 se compensent presque entièrement et ne laissent que deux transpositions aux extrémités.

EXERCICE 7 ⋆⋆

1. Commençons par un cycle $c = (a_1 \ \cdots \ a_p)$, dont on lit les indices modulo p. Par récurrence, $c^k(a_i) = a_{i+k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$; donc c^k fixe a_1 si et seulement si p divise k, et dans ce cas c^k fixe tous les a_i, donc $c^k = \mathrm{id}$. Ainsi $c^k = \mathrm{id}$ si et seulement si p divise k.

Soit maintenant $\sigma = c_1 \cdots c_r$ la décomposition de σ, où c_i est de longueur p_i. Les c_i commutent (théorème 1), donc $\sigma^k = c_1^k \cdots c_r^k$. Chaque c_j^k fixe les éléments hors du support de c_j et envoie ce support dans lui-même ; pour x dans le support de c_i, tous les facteurs sauf c_i^k fixent donc x et $c_i^k(x)$, et $\sigma^k(x) = c_i^k(x)$. Par conséquent $\sigma^k = \mathrm{id}$ si et seulement si $c_i^k = \mathrm{id}$ pour tout i, c'est-à-dire si et seulement si k est un multiple commun des p_i, ou encore un multiple de leur ppcm (chapitre 12). Le plus petit tel $k \geqslant 1$ est ce ppcm.

$$\boxed{\text{ordre de } \sigma = \mathrm{ppcm}(p_1, \ldots, p_r)}$$

2. Soit p_1, …, p_r les longueurs des cycles de σ, avec $p_1 + \cdots + p_r \leqslant 10$ puisque les supports sont disjoints. Le nombre premier 7 divise leur ppcm 14, donc divise l'un des p_i ; comme $p_i \leqslant 10$, ce p_i vaut 7. De même, l'un des p_j est pair ; ce n'est pas le précédent, et il vaut au plus $10-7 = 3$, donc $p_j = 2$.

Il reste au plus un élément, qui ne peut porter aucun autre cycle. Ainsi σ est le produit d'un 7-cycle et d'une transposition disjoints.

$$\boxed{\varepsilon(\sigma) = (-1)^6(-1)^1 = -1}$$

3. Par la question 1, il s'agit de maximiser le ppcm d'entiers $p_1, \ldots, p_r \geqslant 2$ de somme au plus 10. On majore ce ppcm par le produit des p_i, et l'on discute selon le nombre r de cycles, qui vaut au plus 5.

— Si $r = 1$, l'ordre vaut au plus 10. Si $r = 2$, l'inégalité $4p_1p_2 \leqslant (p_1 + p_2)^2$, qui équivaut à $(p_1 - p_2)^2 \geqslant 0$, donne un ordre au plus égal à $p_1p_2 \leqslant 25$.

— Si $r = 3$, les triplets $p_1 \leqslant p_2 \leqslant p_3$ possibles sont $(2, 2, k)$ pour $2 \leqslant k \leqslant 6$, $(2, 3, k)$ pour $3 \leqslant k \leqslant 5$, $(2, 4, 4)$, $(3, 3, 3)$ et $(3, 3, 4)$. Seuls $(2, 4, 4)$ et $(3, 3, 4)$ ont un produit supérieur à 30, mais leurs ppcm valent 4 et 12. Le maximum, 30, est atteint pour $(2, 3, 5)$.

— Si $r \geqslant 4$, les seules possibilités sont $(2, 2, 2, 2)$, $(2, 2, 2, 3)$, $(2, 2, 2, 4)$, $(2, 2, 3, 3)$ et $(2, 2, 2, 2, 2)$, de ppcm au plus 6.

$$\boxed{\text{l'ordre maximal d'un élément de } \mathfrak{S}_{10} \text{ est 30, atteint par exemple par } (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8)(9\ 10)}$$

Piège. L'ordre n'est pas la somme des longueurs, ni leur produit : deux cycles de longueurs 4 et 6 donnent une permutation d'ordre 12, et non 24. C'est pourquoi on a intérêt à choisir des longueurs premières entre elles.

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. Notons $\rho = \sigma(a\ b)\sigma^{-1}$ et calculons $\rho(y)$ en écrivant $y = \sigma(x)$, ce qui est possible puisque σ est bijective. On a $\rho(\sigma(x)) = \sigma((a\ b)(x))$. Donc ρ envoie $\sigma(a)$ sur $\sigma(b)$ et $\sigma(b)$ sur $\sigma(a)$, et si $y \notin \{\sigma(a), \sigma(b)\}$, alors $x \notin \{a, b\}$ et $\rho(y) = \sigma(x) = y$.

$$\boxed{\sigma(a\ b)\sigma^{-1} = (\sigma(a)\ \ \sigma(b))}$$

2. Le même calcul, avec $c = (a_1\ \cdots\ a_p)$ et $\rho = \sigma c\sigma^{-1}$, donne $\rho(\sigma(a_i)) = \sigma(a_{i+1})$ pour $i < p$, $\rho(\sigma(a_p)) = \sigma(a_1)$, et $\rho(y) = y$ si y n'est pas l'un des $\sigma(a_i)$. Comme les $\sigma(a_i)$ sont deux à deux distincts, ρ est le cycle annoncé.

$$\boxed{\sigma(a_1\ a_2\ \cdots\ a_p)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\ \ \sigma(a_2)\ \cdots\ \sigma(a_p))}$$

3. L'identité commute avec tout. Réciproquement, soit σ dans le centre, et supposons $\sigma \neq \mathrm{id}$: il existe a tel que $b = \sigma(a) \neq a$. Comme $n \geqslant 3$, on peut choisir $c \notin \{a, b\}$. Alors σ commute avec $(a\ c)$, et la question 1 donne

$$(a\ c) = \sigma(a\ c)\sigma^{-1} = (\sigma(a)\ \ \sigma(c)) = (b\ \ \sigma(c)).$$

Deux transpositions égales ont le même support, donc $b \in \{a, c\}$, ce qui contredit le choix de c. Pour $n = 2$, le groupe $\mathfrak{S}_2 = \{\mathrm{id}, (1\ 2)\}$ est commutatif, et son centre est $\mathfrak{S}_2$ tout entier.

$$\boxed{\text{le centre de } \mathfrak{S}_n \text{ est } \{\mathrm{id}\} \text{ pour } n \geqslant 3, \qquad \text{et } \mathfrak{S}_2 \text{ pour } n = 2}$$

À retenir. Conjuguer par σ, c'est renommer les éléments : on applique σ à chacun des nombres écrits dans le cycle. Deux permutations conjuguées ont donc des décompositions de même forme. On rapprochera la question 3 de l'exercice 5 du chapitre 16 : le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y était réduit aux matrices scalaires, et l'argument consistait de même à tester la commutation avec des éléments très simples.

EXERCICE 9 ⋆⋆

Par la proposition 3, toute permutation est un produit de transpositions ; il suffit donc, dans chaque cas, d'écrire toute transposition comme un produit d'éléments de la famille.

1. Soit $a \neq b$ dans $[\![2\,;n]\!]$. Par l'exercice 8, avec $\sigma = (1\ a)$, qui est son propre inverse, on obtient

$$\boxed{(1\ a)(1\ b)(1\ a) = (a\ b)}$$

car $\sigma(1) = a$ et $\sigma(b) = b$. Les transpositions qui contiennent 1 sont dans la famille, et les autres sont de la forme $(a\ b)$ ci-dessus : toutes sont des produits d'éléments de la famille.

2. On montre par récurrence sur $k \in [\![2\,;n]\!]$ que $(1\ k)$ est un produit des transpositions $(i\ \ i+1)$. C'est vrai pour $k = 2$. Si c'est vrai pour $k-1$, avec $k \geqslant 3$, l'exercice 8 appliqué avec $\sigma = (k-1\ \ k)$, qui fixe 1 et envoie $k-1$ sur k, donne

$$\boxed{(k-1\ \ k)(1\ \ k-1)(k-1\ \ k) = (1\ k)}$$

et $(1\ k)$ est encore un produit de transpositions $(i\ \ i+1)$. La question 1 conclut.

3. On a $c^k(i) = i + k$ dès que $i + k \leqslant n$. Pour $k \in [\![0\,;n-2]\!]$, l'exercice 8 donne donc

$$\boxed{c^k t c^{-k} = \big(c^k(1)\ \ c^k(2)\big) = (k+1\ \ k+2)}$$

Comme $c^n = \mathrm{id}$, on a $c^{-k} = c^{n-k}$, qui est un produit de facteurs égaux à c. Les transpositions $(1\ 2)$, …, $(n-1\ \ n)$ sont donc des produits de t et de c, et la question 2 conclut.

Piège. La définition de l'énoncé n'autorise que des produits d'éléments de la famille, pas de leurs inverses. Pour une transposition, cela ne change rien ; pour le cycle c, il faut remarquer que $c^{-1} = c^{n-1}$.

À retenir. La question 2 dit que l'on peut ranger n'importe quelle suite par des échanges successifs de termes voisins : c'est le tri que représente la figure des croisements du cours, où chaque croisement est l'échange de deux voisins.

EXERCICE 10 ⋆⋆

1. L'ensemble Γ_ρ contient id. Si $\sigma' \in \Gamma_\rho$, en multipliant $\rho\sigma' = \sigma'\rho$ à gauche et à droite par σ'^{-1}, on obtient $\sigma'^{-1}\rho = \rho\sigma'^{-1}$. Si de plus $\sigma \in \Gamma_\rho$, alors

$$\rho\sigma\sigma'^{-1} = \sigma\rho\sigma'^{-1} = \sigma\sigma'^{-1}\rho.$$

Par la proposition 7 du chapitre 11, Γ_ρ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

2. La condition $\sigma\rho = \rho\sigma$ s'écrit $\sigma\rho\sigma^{-1} = \rho$, soit, par l'exercice 8, $\big(\sigma(1)\ \ \sigma(2)\ \ \sigma(3)\big) = (1\ 2\ 3)$. Ces deux cycles ont alors le même support, et l'image de $\sigma(1)$ par $(1\ 2\ 3)$ doit être $\sigma(2)$, puis celle de $\sigma(2)$ doit être $\sigma(3)$: on peut choisir $\sigma(1) \in \{1,2,3\}$ librement, et $\sigma(2)$, $\sigma(3)$ en découlent. La restriction de σ à $\{1,2,3\}$ est donc celle de id, de ρ ou de ρ^2. Par bijectivité, σ envoie alors $\{4,5\}$ sur lui-même, de deux façons possibles.

$$\boxed{\Gamma_\rho = \{\mathrm{id},\ (1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2),\ (4\ 5),\ (1\ 2\ 3)(4\ 5),\ (1\ 3\ 2)(4\ 5)\},\quad 6 \text{ éléments}}$$

Posons $\theta = (1\ 2\ 3)(4\ 5)$. Ses deux cycles commutent, donc $\theta^k = \rho^k(4\ 5)^k$, où ρ^k ne dépend que du reste de k modulo 3 et $(4\ 5)^k$ du reste modulo 2. On obtient successivement

$$\theta^0 = \mathrm{id},\quad \theta = (1\ 2\ 3)(4\ 5),\quad \theta^2 = (1\ 3\ 2),\quad \theta^3 = (4\ 5),\quad \theta^4 = (1\ 2\ 3),\quad \theta^5 = (1\ 3\ 2)(4\ 5).$$

$$\boxed{\Gamma_\rho = \{\theta^k \mid 0 \leqslant k \leqslant 5\},\qquad \theta = (1\ 2\ 3)(4\ 5) \text{ d'ordre } 6}$$

3. Par l'exercice 8, appliqué à chacun des deux cycles,

$$\sigma\rho\sigma^{-1} = \sigma(1\ 2\ 3)\sigma^{-1}\,\sigma(4\ 5\ 6)\sigma^{-1} = \big(\sigma(1)\ \ \sigma(2)\ \ \sigma(3)\big)\big(\sigma(4)\ \ \sigma(5)\ \ \sigma(6)\big),$$

produit de deux 3-cycles à supports disjoints. Par l'unicité de la décomposition (théorème 1), il est égal à ρ si et seulement si ses deux cycles sont $(1\ 2\ 3)$ et $(4\ 5\ 6)$, dans un ordre ou dans l'autre. Deux cas se présentent.

— Si $(\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)) = (1\ 2\ 3)$ et $(\sigma(4)\ \sigma(5)\ \sigma(6)) = (4\ 5\ 6)$: comme à la question 2, il y a 3 choix pour $\sigma(1)$ et 3 choix pour $\sigma(4)$, soit 9 permutations, qui stabilisent chacun des deux cycles.

— Si $(\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)) = (4\ 5\ 6)$ et $(\sigma(4)\ \sigma(5)\ \sigma(6)) = (1\ 2\ 3)$: de même 9 permutations, qui échangent les deux cycles, comme $(1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$.

$$\boxed{\operatorname{card}\Gamma_\rho = 9 + 9 = 18}$$

Un dénombrement exhaustif des 720 éléments de $\mathfrak{S}_6$ confirme ce résultat ✓.
À retenir. Pour déterminer les permutations qui commutent avec ρ, on traduit $\sigma\rho\sigma^{-1} = \rho$ par l'exercice 8 : σ doit envoyer les cycles de ρ sur des cycles de ρ de même longueur. L'exercice 15 traitera de même le cas d'un cycle de longueur n.

EXERCICE 11 ⋆⋆

1. On lit les indices modulo p : $c(a_i) = a_{i+1}$, donc $c^2(a_i) = a_{i+2}$. Si p est impair, la suite a_1, a_3, …, a_p, $a_{p+2} = a_2$, a_4, …, a_{p-1}, puis $a_{p+1} = a_1$, parcourt tous les a_i avant de revenir à a_1. Si p est pair, les indices impairs et les indices pairs forment deux orbites séparées.

$$\boxed{p \text{ impair : } c^2 = (a_1\ a_3\ \cdots\ a_p\ a_2\ a_4\ \cdots\ a_{p-1}) \qquad p \text{ pair : } c^2 = (a_1\ a_3\ \cdots\ a_{p-1})(a_2\ a_4\ \cdots\ a_p)}$$

Pour p impair, c^2 est donc un cycle de longueur p ; pour p pair, c'est le produit de deux cycles disjoints de longueur $\dfrac{p}{2}$, et l'identité si $p = 2$.

2. Si p est impair, l'entier $m = \dfrac{p+1}{2}$ vérifie $(c^m)^2 = c^{p+1} = c^p c = c$, puisque $c^p = \mathrm{id}$. Pour la seconde permutation, la question 1 appliquée au 4-cycle $(1\ 3\ 2\ 4)$, avec $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 3, 2, 4)$, donne $(a_1\ a_3)(a_2\ a_4)$.

$$\boxed{c = \left(c^{(p+1)/2}\right)^2 \text{ pour } p \text{ impair}, \qquad (1\ 2)(3\ 4) = (1\ 3\ 2\ 4)^2}$$

3. Supposons $f^2 = \tau$, avec τ une transposition. Alors $f \neq \mathrm{id}$; soit $f = c_1 \cdots c_r$ sa décomposition, où c_i est de longueur p_i. Les c_i commutent, donc $f^2 = c_1^2 \cdots c_r^2$. Par la question 1, chaque c_i^2 est un cycle de longueur impaire p_i, ou le produit de deux cycles disjoints de même longueur $\dfrac{p_i}{2}$, ou l'identité ; ces cycles ont leurs supports dans celui de c_i, donc sont tous à supports disjoints. Par l'unicité du théorème 1, on obtient ainsi la décomposition de f^2, dans laquelle les cycles de longueur paire vont par paires de même longueur. Or τ a un seul cycle, de longueur paire 2 : c'est impossible.

$$\boxed{\text{une transposition n'est pas le carré d'une permutation}}$$

La signature donne une preuve plus courte : $\varepsilon(f^2) = \varepsilon(f)^2 = 1$, alors que $\varepsilon(\tau) = -1$.

4. D'après l'exercice 3, σ et σ' sont toutes deux impaires. Or un carré est toujours pair, comme on vient de le voir.

$$\boxed{f^2 = \sigma \text{ et } f^2 = \sigma' \text{ n'ont pas de solution}}$$

Le critère de la question 3 le confirme : $\sigma = (1\ 3\ 6\ 2\ 5)(4\ 7)$ a un seul cycle de longueur paire, et σ' est un 6-cycle isolé.
À retenir. La signature ne fournit qu'une condition nécessaire : $(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6)$ est paire, mais n'est pas un carré, car ses deux cycles de longueur paire ont des longueurs différentes. Le critère des cycles est en revanche une condition nécessaire et suffisante : deux cycles disjoints de même longueur m s'écrivent $(a_1\ \cdots\ a_m)(b_1\ \cdots\ b_m) = (a_1\ b_1\ a_2\ b_2\ \cdots\ a_m\ b_m)^2$ par la question 1, les cycles de longueur impaire sont des carrés par la question 2, et les racines ainsi obtenues, à supports disjoints, commutent.

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. Soit $\tau = (a\ b)$ une transposition. Il existe une permutation ρ telle que $\rho(1) = a$ et $\rho(2) = b$: on complète par une bijection quelconque de $[\![3\,;n]\!]$ sur $[\![1\,;n]\!] \setminus \{a,b\}$, ces deux ensembles ayant $n-2$ éléments. Par l'exercice 8, $\tau = \rho(1\ 2)\rho^{-1}$, et comme Φ est un morphisme à valeurs dans le groupe commutatif $\mathbb{C}^*$,

$$\Phi(\tau) = \Phi(\rho)\,\Phi\big((1\ 2)\big)\,\Phi(\rho)^{-1} = \Phi\big((1\ 2)\big).$$

$$\boxed{\Phi(\tau) = \Phi\big((1\ 2)\big) = -1 \text{ pour toute transposition } \tau}$$

2. Le calcul de la question 1 n'a pas utilisé l'hypothèse $\Phi\big((1\ 2)\big) = -1$: toutes les transpositions ont la même image $\lambda = \Phi\big((1\ 2)\big)$. Comme $(1\ 2)^2 = \mathrm{id}$, on a $\lambda^2 = \Phi(\mathrm{id}) = 1$ (proposition 10 du chapitre 11), donc $\lambda \in \{-1,1\}$. Soit $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$ une écriture de σ comme produit de transpositions (proposition 3) ; alors $\Phi(\sigma) = \lambda^k$. Si $\lambda = 1$, Φ est constant égal à 1 ; si $\lambda = -1$, $\Phi(\sigma) = (-1)^k = \varepsilon(\sigma)$ par la proposition 5 (i). Réciproquement, ces deux applications sont des morphismes, la seconde par le théorème 2.

$$\boxed{\text{les morphismes de } \mathfrak{S}_n \text{ dans } \mathbb{C}^* \text{ sont } \sigma \mapsto 1 \text{ et } \sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)}$$

À retenir. Un morphisme vers un groupe commutatif prend la même valeur sur deux permutations conjuguées, et toutes les transpositions sont conjuguées entre elles. Bien que $\mathbb{C}^*$ soit très grand, $\mathfrak{S}_n$ n'y a que deux images possibles, $\{1\}$ et $\{-1,1\}$: c'est une autre façon de voir le point (iii) du théorème 2.

EXERCICE 13 ⋆⋆

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\tilde{\sigma}$ la permutation de $[\![1\,;n+2]\!]$ qui coïncide avec σ sur $[\![1\,;n]\!]$ et fixe $n+1$ et $n+2$, et $t = (n+1\ \ n+2)$. On pose

$$\boxed{\varphi(\sigma) = \tilde{\sigma} \ \text{ si } \varepsilon(\sigma) = 1, \qquad \varphi(\sigma) = \tilde{\sigma}\,t \ \text{ si } \varepsilon(\sigma) = -1}$$

ce qui s'écrit aussi $\varphi(\sigma) = \tilde{\sigma}t^{k(\sigma)}$, où $k(\sigma) \in \{0,1\}$ est défini par $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{k(\sigma)}$.

Les valeurs sont paires. Les inversions de $\tilde{\sigma}$ sont celles de σ, car un couple (i,j) avec $j \geqslant n+1$ n'en est jamais une, puisque $\tilde{\sigma}(i) \leqslant \widetilde{\sigma(j)}$ dans ce cas. Ainsi $\varepsilon(\tilde{\sigma}) = \varepsilon(\sigma)$, et $\varepsilon(\varphi(\sigma)) = \varepsilon(\sigma)(-1)^{k(\sigma)} = 1$.

C'est un morphisme. On a $\widetilde{\sigma\sigma'} = \tilde{\sigma}\tilde{\sigma}'$, ce qui se vérifie sur $[\![1\,;n]\!]$ et sur $\{n+1,n+2\}$ séparément. Le théorème 2 donne $(-1)^{k(\sigma\sigma')} = (-1)^{k(\sigma)+k(\sigma')}$, et comme $t^2 = \mathrm{id}$, on en déduit $t^{k(\sigma\sigma')} = t^{k(\sigma)}t^{k(\sigma')}$. Enfin t commute avec $\tilde{\sigma}'$, leurs supports étant disjoints (proposition 2) :

$$\varphi(\sigma)\varphi(\sigma') = \tilde{\sigma}\,t^{k(\sigma)}\,\tilde{\sigma}'\,t^{k(\sigma')} = \tilde{\sigma}\tilde{\sigma}'\,t^{k(\sigma)}t^{k(\sigma')} = \widetilde{\sigma\sigma'}\,t^{k(\sigma\sigma')} = \varphi(\sigma\sigma').$$

Il est injectif. La permutation t fixe les éléments de $[\![1\,;n]\!]$, donc la restriction de $\varphi(\sigma)$ à $[\![1\,;n]\!]$ est σ : on retrouve σ à partir de $\varphi(\sigma)$.

$$\boxed{\varphi : \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{A}_{n+2} \text{ est un morphisme de groupes injectif}}$$

À retenir. Les deux éléments ajoutés servent de « réserve de signe » : la transposition t corrige la parité sans toucher à l'action sur $[\![1\,;n]\!]$. Un seul élément supplémentaire ne suffirait pas, puisqu'il n'y aurait alors aucune transposition disponible hors de $[\![1\,;n]\!]$.

EXERCICE 14 ⋆⋆

On note $S(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} k\,\sigma(k)$.

1. La permutation $\sigma' = \sigma(i\ j)$ vérifie $\sigma'(i) = \sigma(j)$, $\sigma'(j) = \sigma(i)$, et coïncide avec σ ailleurs. Seuls les termes d'indices i et j changent :

$$S(\sigma') - S(\sigma) = i\sigma(j) + j\sigma(i) - i\sigma(i) - j\sigma(j) = (j-i)(\sigma(i) - \sigma(j)).$$

$$\boxed{S(\sigma(i\ j)) - S(\sigma) = (j-i)(\sigma(i) - \sigma(j)) > 0}$$

Échanger les images d'une inversion augmente donc strictement la somme. Le même calcul montre que, si $i < j$ et $\sigma(i) < \sigma(j)$, l'échange la diminue strictement.

2. L'ensemble $\mathcal{A}$ est fini, puisque $\mathfrak{S}_n$ l'est ; soit σ telle que $S(\sigma) = \max \mathcal{A}$. Si σ avait une inversion (i, j), la question 1 fournirait $S(\sigma(i\ j)) > S(\sigma)$, ce qui est impossible. Donc σ n'a aucune inversion : elle est croissante, et c'est l'identité. De même, si $S(\sigma) = \min \mathcal{A}$, aucun couple $i < j$ ne vérifie $\sigma(i) < \sigma(j)$, sinon l'échange diminuerait S : σ est strictement décroissante, et $\sigma(k) = n + 1 - k$ pour tout k. On calcule alors

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

$$\boxed{\max \mathcal{A} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \text{atteint pour } \sigma = \mathrm{id} \text{ seulement}}$$

$$\boxed{\min \mathcal{A} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6},\ \text{atteint pour } \sigma : k \mapsto n+1-k \text{ seulement}}$$

Pour $n = 3$, les six sommes valent 14, 13, 13, 11, 11 et 10 : on retrouve max = 14 et min = 10 ✓.

À retenir. C'est l'*inégalité de réarrangement* : pour deux suites de nombres, la somme des produits terme à terme est maximale quand on les range dans le même ordre, minimale quand on les range en ordre inverse. La preuve par échanges successifs est celle d'un algorithme de tri.

EXERCICE 15 ⋆⋆⋆

1. Comme γ et δ commutent, $\delta\gamma\delta^{-1} = \gamma$. Par l'exercice 8, $\delta\gamma\delta^{-1}$ est le cycle de support $\delta(\mathrm{Supp}\,\gamma)$; d'où $\delta(\mathrm{Supp}\,\gamma) = \mathrm{Supp}\,\gamma$. Supposons les supports non disjoints, et soit x un élément commun. L'ensemble $\mathrm{Supp}\,\gamma$ contient x et est stable par δ, donc contient tous les $\delta^k(x)$; comme δ est un cycle et que x appartient à son support, ces éléments parcourent tout $\mathrm{Supp}\,\delta$. Ainsi $\mathrm{Supp}\,\delta \subset \mathrm{Supp}\,\gamma$, et, les rôles de γ et δ étant symétriques, on a l'égalité.

$$\boxed{\gamma\delta = \delta\gamma \implies \mathrm{Supp}\,\gamma = \mathrm{Supp}\,\delta \quad \text{ou} \quad \mathrm{Supp}\,\gamma \cap \mathrm{Supp}\,\delta = \varnothing}$$

2. Si $\sigma\gamma = \gamma\sigma$, une récurrence immédiate donne $\sigma\gamma^k = \gamma^k\sigma$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $\gamma^k(1) = k+1$ pour $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, on obtient

$$\boxed{\sigma(k+1) = \sigma(\gamma^k(1)) = \gamma^k(\sigma(1)) \qquad (0 \leqslant k \leqslant n-1)}$$

Toutes les valeurs de σ sont donc déterminées par $\sigma(1)$.

3. Les puissances γ^k commutent avec γ. Réciproquement, soit σ qui commute avec γ, et $a = \sigma(1)$. La permutation γ^{a-1} commute avec γ et envoie 1 sur a ; par la question 2, deux permutations qui commutent avec γ et prennent la même valeur en 1 sont égales, donc $\sigma = \gamma^{a-1}$. Les n puissances γ^0, …, γ^{n-1} sont distinctes, puisqu'elles envoient 1 sur des éléments distincts.

$$\boxed{\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma\gamma = \gamma\sigma\} = \{\gamma^k \mid 0 \leqslant k \leqslant n-1\}, \quad n \text{ éléments}}$$

À retenir. Le contraste avec l'exercice 10 est instructif : le produit (1 2 3)(4 5 6) commute avec 18 permutations, alors qu'un 6-cycle ne commute qu'avec ses 6 puissances. Plus une permutation « mélange », moins elle a de permutations qui commutent avec elle.

EXERCICE 16 ⋆⋆⋆

1. La relation est réflexive, avec le produit vide id. Elle est symétrique : si $\sigma = t_1 \cdots t_m$ avec $t_i \in \mathcal{T}$ et $\sigma(i) = j$, alors $\sigma^{-1} = t_m \cdots t_1$ est encore un produit d'éléments de $\mathcal{T}$, chaque transposition étant son propre inverse, et $\sigma^{-1}(j) = i$. Elle est transitive : si $\sigma(i) = j$ et $\sigma'(j) = k$, le produit $\sigma'\sigma$ convient pour $i \sim k$.

$$\boxed{\sim \text{ est une relation d'équivalence sur } [\![1\,;n]\!]}$$

2. On raisonne par récurrence sur k. Si $k = 0$, le seul produit est id, et les classes sont les n singletons. Soit $k \geqslant 1$, $\mathcal{T}$ un ensemble de k transpositions, $\tau = (a\ b)$ l'une d'elles, et $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \setminus \{\tau\}$, de relation associée $\sim'$. Par hypothèse de récurrence, $\sim'$ a au moins $n - k + 1$ classes.

On considère la partition $\mathcal{P}$ de $[\![1\,;n]\!]$ obtenue à partir des classes de $\sim'$ en réunissant la classe de a et celle de b ; elle a au moins $n - k$ parties. Chaque élément de $\mathcal{T}'$ envoie toute classe de $\sim'$ dans elle-même, par définition de $\sim'$, donc envoie toute partie de $\mathcal{P}$ dans elle-même. La transposition τ fixe tous les éléments autres que a et b, et envoie la partie contenant a et b dans elle-même. Par conséquent, tout produit d'éléments de $\mathcal{T}$ envoie chaque partie de $\mathcal{P}$ dans elle-même : si $i \sim j$, alors i et j sont dans la même partie de $\mathcal{P}$. Chaque classe de $\sim$ est donc contenue dans une partie de $\mathcal{P}$, et chaque partie, non vide, en contient au moins une.

$$\boxed{\text{le nombre de classes de } \sim \text{ est au moins } \operatorname{card}\mathcal{P} \geqslant n - k}$$

3. Si $\mathcal{T}$ engendre $\mathfrak{S}_n$, alors pour tous $i \neq j$, la transposition $(i\ j)$ est un produit d'éléments de $\mathcal{T}$ qui envoie i sur j : la relation $\sim$ n'a qu'une classe. La question 2 donne $1 \geqslant n - k$.

$$\boxed{\operatorname{card}\mathcal{T} \geqslant n - 1, \text{ et ce minimum est atteint, par exemple par } (1\ 2), (2\ 3), \ldots, (n-1\ \ n)}$$

L'exemple est celui de l'exercice 9, question 2 ; la famille (1 2), …, (1 n) de la question 1 convient aussi.

À retenir. On peut dessiner les k transpositions comme les arêtes d'un graphe sur les sommets 1, …, n ; les classes de $\sim$ sont les « morceaux » connexes de ce dessin. Chaque arête réunit au plus deux morceaux, d'où la minoration, et il faut au moins $n - 1$ arêtes pour relier n sommets.

EXERCICE 17 ⋆⋆⋆

1. On applique d'abord $(a\ c)$, puis $(a\ b)$: l'élément a va en c, puis reste en c ; c va en a, puis en b ; b reste en b, puis va en a. Pour le second produit, on intercale $(b\ c)(b\ c) = \mathrm{id}$, et l'on applique deux fois la proposition 3, qui donne $(a\ b)(b\ c) = (a\ b\ c)$ et $(b\ c)(c\ d) = (b\ c\ d)$.

$$\boxed{(a\ b)(a\ c) = (a\ c\ b), \qquad (a\ b)(c\ d) = (a\ b)(b\ c)\,(b\ c)(c\ d) = (a\ b\ c)(b\ c\ d)}$$

Avec $(a, b, c, d) = (1, 2, 3, 4)$, on vérifie que (1 2 3)(2 3 4) envoie 1 sur 2, 2 sur 1, 3 sur 4 et 4 sur 3 ✓.

2. Soit σ une permutation paire. Par la proposition 5 (i), toute écriture de σ comme produit de transpositions en comporte un nombre pair, $\sigma = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_{2m-1}\tau_{2m}$, et l'on groupe les facteurs deux par deux. Pour chaque paire $\tau_{2i-1}\tau_{2i}$, trois cas se présentent : les deux transpositions sont égales, et leur produit vaut id ; elles ont exactement un élément commun, et on les écrit $(a\ b)(a\ c)$, ce qui est un 3-cycle par la question 1 ; elles sont à supports disjoints, et la question 1 en fait un produit de deux 3-cycles. Enfin, l'identité est le produit vide, ou $(1\ 2\ 3)^3$ puisque $n \geqslant 3$.

$$\boxed{\text{toute permutation paire est un produit de cycles de longueur 3}}$$

3. Un cycle de longueur 3 a pour signature $(-1)^2 = 1$ (proposition 5), et la signature est un morphisme (théorème 2) : un produit de 3-cycles est pair.

$$\boxed{\text{non : } \mathfrak{A}_n \text{ est exactement l'ensemble des produits de cycles de longueur 3}}$$

Piège. On aurait pu croire que les 3-cycles, plus « gros » que les transpositions, engendrent davantage de permutations ; c'est le contraire, puisqu'ils n'atteignent que la moitié de $\mathfrak{S}_n$. L'erreur vient encore de la confusion entre la longueur p d'un cycle et sa parité, qui est celle de $p - 1$.

EXERCICE 18 ⋆

1. Par le théorème 4, la famille est une base si et seulement si son déterminant dans la base canonique est non nul. On ajoute à la première colonne les deux autres, ce qui ne change pas le déterminant (proposition 10), et l'on factorise $t+2$ par linéarité ; on retranche ensuite la troisième ligne aux deux premières :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+2 & 1 & t \\ t+2 & t & 1 \\ t+2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (t+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (t+2)\begin{vmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Le développement par rapport à la première colonne (théorème 7) ne laisse que le terme du coefficient d'indice $(3,1)$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & t-1 \\ t-1 & 0 \end{vmatrix} = -(t-1)^2.$$

$$\boxed{\det(e_1,e_2,e_3) = -(t-1)^2(t+2), \qquad (e_1,e_2,e_3) \text{ base de } \mathbb{R}^3 \iff t \notin \{1,-2\}}$$

Pour $t=0$, la formule donne -2 ; la règle de Sarrus, appliquée aux colonnes $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ et $(0,1,1)$, donne $0+0+0-0-1-1=-2$ ✓.

2. Pour $t=1$, les trois vecteurs sont égaux à $(1,1,1)$, non nul. Pour $t=-2$, la somme $e_1+e_2+e_3$ est nulle, et $e_1=(1,1,-2)$, $e_2=(1,-2,1)$ ne sont pas colinéaires, la famille est donc de rang au moins 2.

$$\boxed{\operatorname{rg}(e_1,e_2,e_3) = 1 \text{ pour } t=1, \qquad \operatorname{rg}(e_1,e_2,e_3) = 2 \text{ pour } t=-2}$$

À retenir. Le déterminant détecte les valeurs exclues, mais ne donne pas le rang : un déterminant nul dit seulement que le rang est inférieur à 3. On remarquera que la racine double $t=1$ correspond à la chute de rang la plus forte ; c'est un phénomène fréquent, mais ce n'est pas une règle.

EXERCICE 19 ⋆⋆

On écrit $\det B$ comme déterminant d'une famille de colonnes, et l'on effectue des opérations sur les colonnes (proposition 10). On ajoute d'abord à la première colonne toutes les autres : elle devient $\sum_j (S - A_j) = nS - S = (n-1)S$, et l'on factorise $n-1$ par linéarité. On retranche ensuite cette première colonne, égale à S, à chacune des autres, puis on factorise les $n-1$ signes -1 :

$$\det B = (n-1)\det(S, S-A_2, \dots, S-A_n) = (n-1)\det(S, -A_2, \dots, -A_n),$$

$$\det B = (-1)^{n-1}(n-1)\det(S, A_2, \dots, A_n).$$

Enfin, on retranche $A_2+\cdots+A_n$ à la première colonne, ce qui ne change pas le déterminant (proposition 6 (iv)) et la remplace par A_1.

$$\boxed{\det B = (-1)^{n-1}(n-1)\det A}$$

Pour $n=2$, la matrice B a pour colonnes A_2 et A_1, et l'on retrouve $\det B = -\det A$ ✓.
À retenir. Matriciellement, $B = A(J-I_n)$, car la j-ième colonne de $A(J-I_n)$ est la somme des A_i pour $i \neq j$. Le théorème 6 donne alors $\det B = \det(A)\det(J-I_n)$, et le calcul ci-dessus, appliqué à $A=I_n$, fournit $\det(J-I_n) = (-1)^{n-1}(n-1)$. On reconnaît l'astuce, déjà rencontrée au chapitre 16 avec $J^2 = nJ$, qui consiste à faire apparaître la somme de toutes les colonnes.

EXERCICE 20 ⋆⋆

Les vecteurs $u_j + s$ appartiennent à $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$, dont $u = (u_1, \dots, u_n)$ est une base, puisque la famille est libre. Dans F, qui est de dimension n, une famille de n vecteurs est libre si et seulement si c'est une base, c'est-à-dire, par le théorème 4, si et seulement si son déterminant dans la base u est non nul.

On développe ce déterminant par linéarité par rapport à chaque place, chaque vecteur $u_j + s$ fournissant soit u_j, soit s. Les termes où s apparaît au moins deux fois sont nuls, la forme étant alternée. Il reste le terme où s n'apparaît pas, qui vaut $\det_u(u) = 1$, et les n termes où s occupe une seule place j. Dans ce dernier, on remplace s par $\sum_i \alpha_i u_i$: seul $\alpha_j u_j$ donne une contribution non nulle, les autres répétant un vecteur déjà présent.

$$\det_u(u_1 + s, \dots, u_n + s) = 1 + \sum_{j=1}^{n} \det_u(u_1, \dots, \underbrace{s}_{j}, \dots, u_n) = 1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j.$$

$$\boxed{(u_1 + s, \dots, u_n + s) \text{ est libre } \iff \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \neq -1}$$

On le vérifie directement dans le cas exclu : si $\sum \alpha_i = -1$, alors $\sum_i \alpha_i(u_i + s) = s + (\sum_i \alpha_i)s = 0$, et les α_i ne sont pas tous nuls, puisque leur somme vaut -1 ✓.

Piège. On ne peut pas calculer le déterminant de la famille dans E lui-même : E peut être de dimension infinie, ou de dimension différente de n, et le déterminant n'a de sens que pour n vecteurs d'un espace de dimension n. C'est pourquoi on se place dans le sous-espace F.

EXERCICE 21 ⋆⋆

La famille compte $n+1$ vecteurs de $\mathbb{C}_n[X]$, qui est de dimension $n+1$: par le théorème 4, il suffit de montrer que son déterminant dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ est non nul. La formule du binôme donne

$$(X - z_k)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-z_k)^{n-j} X^j,$$

de sorte que la matrice M de la famille, dont on numérote les lignes et les colonnes de 0 à n, a pour coefficients $m_{jk} = \binom{n}{j}(-z_k)^{n-j}$. On procède en trois étapes, avec $w_k = -z_k$.

- La ligne j contient le facteur $\binom{n}{j}$, que l'on sort par linéarité (proposition 10 et théorème 6 (iv)) : $\det M = \prod_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \times \det(w_k^{n-j})_{j,k}$.
- On renverse l'ordre des $n+1$ lignes. La permutation qui renverse l'ordre de $n+1$ éléments a pour signature $(-1)^{n(n+1)/2}$ (exemple du cours), d'où, par la proposition 6 (ii) appliquée aux lignes, $\det(w_k^{n-j})_{j,k} = (-1)^{n(n+1)/2} \det(w_k^j)_{j,k}$.
- La matrice $(w_k^j)_{j,k}$ est la transposée de la matrice de Vandermonde de w_0, …, w_n. Par la proposition 12, son déterminant vaut $\prod_{i<j}(w_j - w_i) = \prod_{i<j}(z_i - z_j)$, produit de $\dfrac{n(n+1)}{2}$ facteurs, égal à $(-1)^{n(n+1)/2} \prod_{i<j}(z_j - z_i)$.

Les deux signes $(-1)^{n(n+1)/2}$ se compensent.

$$\boxed{\det\left((X - z_0)^n, \dots, (X - z_n)^n\right) = \prod_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (z_j - z_i) \neq 0}$$

Il est non nul puisque les z_i sont deux à deux distincts : la famille est une base de $\mathbb{C}_n[X]$. Pour $n=1$, la matrice $\begin{pmatrix} -z_0 & -z_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a pour déterminant $z_1 - z_0$ ✓, et un calcul symbolique confirme la formule jusqu'à $n=4$.

À retenir. Tout polynôme de degré au plus n est donc combinaison de puissances n-ièmes de polynômes de degré 1. Par exemple, pour $n=2$ et $(z_0,z_1,z_2)=(0,1,-1)$, on a $X=\dfrac{1}{4}((X+1)^2-(X-1)^2)$. Le déterminant de Vandermonde intervient parce que les coordonnées de $(X-z_k)^n$ sont, aux coefficients binomiaux près, les puissances successives de $-z_k$.

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. Notons $T_k(x_1,\dots,x_n)$ le k-ième terme de la somme. Il est linéaire par rapport à x_k, par linéarité de u et de $\det_e$ par rapport à la k-ième place, et linéaire par rapport à chaque x_j avec $j\neq k$, par linéarité de $\det_e$. Chaque T_k, donc aussi la somme φ, est n-linéaire.

Supposons $x_i=x_j=x$, avec $i<j$. Si $k\notin\{i,j\}$, le terme T_k contient deux vecteurs égaux aux places i et j, et il est nul. Il reste

$$T_i+T_j=\det_e(\dots,\underbrace{u(x)}_{i},\dots,\underbrace{x}_{j},\dots)+\det_e(\dots,\underbrace{x}_{i},\dots,\underbrace{u(x)}_{j},\dots)=0,$$

car les deux familles se déduisent l'une de l'autre en échangeant les vecteurs des places i et j, ce qui change le déterminant en son opposé (proposition 6 (i)).

$$\boxed{\varphi \text{ est une forme } n\text{-linéaire alternée sur } E}$$

2. Par le théorème 3 (iii), $\varphi=\varphi(e_1,\dots,e_n)\det_e$. Soit $A=(a_{ij})$ la matrice de u dans la base e, de sorte que $u(e_k)=\sum_i a_{ik}e_i$. Dans $\det_e(e_1,\dots,u(e_k),\dots,e_n)$, seul le terme $a_{kk}e_k$ de $u(e_k)$ donne une contribution non nulle, les autres répétant un vecteur e_i déjà présent ; ce déterminant vaut donc a_{kk}.

$$\varphi(e_1,\dots,e_n)=\sum_{k=1}^{n}a_{kk}=\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(u),\qquad \text{d'où}\qquad \boxed{\varphi=\operatorname{tr}(u)\det_e}$$

La trace de u est celle de sa matrice dans n'importe quelle base (chapitre 16) ; le résultat ne dépend donc pas de la base e choisie. Un calcul symbolique pour $n=3$, avec u et x_1, x_2, x_3 quelconques, confirme l'identité ✓.

À retenir. Pour $t\in\mathbb{K}$, on développe par multilinéarité, en choisissant à chaque place x_k ou $tu(x_k)$; les termes où u apparaît exactement une fois forment $t\,\varphi(x_1,\dots,x_n)$:

$$\det_e\left(x_1+tu(x_1),\dots,x_n+tu(x_n)\right)=\det_e(x_1,\dots,x_n)+t\,\varphi(x_1,\dots,x_n)+\sum_{k=2}^{n}t^k(\cdots).$$

Avec $x=e$ et la proposition 8, on obtient que $\det(\mathrm{id}_E+tu)$ est un polynôme en t de la forme $1+\operatorname{tr}(u)\,t+\cdots$: la trace est le terme du premier ordre du déterminant au voisinage de l'identité.

EXERCICE 23 ⋆⋆

1. On note $f_k = f(x_k)$. Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ ne changent pas le déterminant, et le développement par rapport à la troisième colonne, qui ne contient plus qu'un coefficient non nul, en position $(1,3)$, donne

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & f_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & f_2 - f_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & f_3 - f_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & f_2 - f_1 \\ x_3 - x_1 & f_3 - f_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(f_3 - f_1) - (x_3 - x_1)(f_2 - f_1).$$

On met en facteur $(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)$, et l'on note $p_{1k} = \dfrac{f_k - f_1}{x_k - x_1}$ la pente de la corde $[M_1 M_k]$.

$$\boxed{D(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\,(p_{13} - p_{12})}$$

Pour $f(x) = x^2$ et $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 2)$, on trouve $p_{12} = 1$, $p_{13} = 2$ et $D = 1 \times 2 \times 1 = 2$, ce que confirme le calcul direct du déterminant ✓.

2. Comme $(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) > 0$, on a $D \geqslant 0$ si et seulement si $p_{12} \leqslant p_{13}$. Posons

$$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \in]0\,,1[, \qquad \text{de sorte que} \qquad x_2 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

En multipliant par $x_2 - x_1 > 0$, l'inégalité $p_{12} \leqslant p_{13}$ s'écrit $f_2 - f_1 \leqslant \lambda(f_3 - f_1)$, soit

$$f(x_2) \leqslant (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_3) :$$

c'est l'inégalité de convexité au point x_2 du segment $[x_1\,, x_3]$. Comme tout point intérieur d'un segment s'écrit ainsi, la condition pour tous $x_1 < x_2 < x_3$ équivaut à la convexité de f ; c'est la première inégalité du lemme des trois pentes (proposition 8 du chapitre 9).

$$\boxed{(\forall x_1 < x_2 < x_3 \text{ dans } I,\ D(x_1, x_2, x_3) \geqslant 0) \iff f \text{ est convexe sur } I}$$

3. Le déterminant d'ordre 2 obtenu à la question 1 est $\det\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right)$, calculé dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, puisque ces vecteurs ont pour coordonnées $(x_2 - x_1, f_2 - f_1)$ et $(x_3 - x_1, f_3 - f_1)$. D'après les remarques du cours qui suivent le théorème 4, son signe indique l'orientation de la base $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right)$, et sa valeur absolue est l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs, double de celle du triangle.

$$\boxed{D > 0 \iff \text{le triangle } M_1M_2M_3 \text{ est parcouru dans le sens trigonométrique}}$$

$$\boxed{|D| = 2 \times \text{aire du triangle } M_1M_2M_3}$$

Ainsi f est convexe si et seulement si, pour tous $x_1 < x_2 < x_3$, le triangle $M_1M_2M_3$ est direct ou aplati : le point M_2 est sous la corde $[M_1M_3]$, et l'on tourne vers la gauche en allant de M_1 à M_3 par M_2. Dans l'exemple de la question 1, le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,1)$ et $(2,4)$ est direct et d'aire 1.
À retenir. L'alignement de trois points s'écrit $D = 0$, et la convexité $D \geqslant 0$: le déterminant transforme une propriété géométrique en une inégalité algébrique, sans aucune hypothèse de dérivabilité.

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

On note $M(x_1,\dots,x_n)$ la matrice $\left(f_i(x_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, dont la ligne i contient les valeurs de f_i aux points x_1, …, x_n.

Sens réciproque. Soit x_1, …, x_n tels que $M = M(x_1,\dots,x_n)$ ait un déterminant non nul, et λ_1, …, λ_n des réels tels que $\sum_i \lambda_i f_i = 0$. En évaluant cette égalité de fonctions en chaque x_j, on obtient $\sum_i \lambda_i f_i(x_j) = 0$ pour tout j, c'est-à-dire $M^T\Lambda = 0$, où Λ est la colonne des λ_i. Or $\det M^T = \det M \neq 0$ (théorème 6), donc M^T est inversible et $\Lambda = 0$: la famille est libre.

Sens direct. On raisonne par récurrence sur n. Si $n = 1$, la famille (f_1) est libre, donc f_1 n'est pas la fonction nulle, et il existe x_1 tel que $f_1(x_1) \neq 0$. Soit $n \geqslant 2$, et supposons le résultat vrai pour $n-1$ fonctions. Si $(f_1,\dots,f_n)$ est libre, la sous-famille $(f_1,\dots,f_{n-1})$ l'est aussi, et l'hypothèse de récurrence fournit x_1, …, x_{n-1} tels que $\Delta = \det\left(f_i(x_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n-1} \neq 0$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \det M(x_1,\dots,x_{n-1},x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\,C_{in},$$

en développant par rapport à la dernière colonne (théorème 7). Les cofacteurs C_{in} ne dépendent pas de x, puisqu'on a supprimé la colonne qui le contient ; et $C_{nn} = (-1)^{2n}\Delta = \Delta \neq 0$. Ainsi $g = \sum_i C_{in} f_i$ est une combinaison linéaire des f_i dont le coefficient de f_n est non nul ; la famille étant libre, g n'est pas la fonction nulle, et il existe x_n tel que $g(x_n) \neq 0$.

$$\boxed{(f_1,\dots,f_n) \text{ libre} \iff \exists (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \det\left(f_i(x_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \neq 0}$$

Piège. Les points dépendent de la famille, et il ne suffit pas d'en prendre « au hasard ». Les fonctions sin et $x \mapsto \sin(2x)$ forment une famille libre, mais aux points 0 et π elles s'annulent toutes deux, et le déterminant est nul ; aux points $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{4}$, il vaut $1 \times 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 = 1$.

À retenir. Pour les fonctions 1, x, …, x^{n-1}, la matrice $\left(f_i(x_j)\right)$ est la transposée d'une matrice de Vandermonde (proposition 12), et tout choix de points distincts convient. Le résultat ramène une question en dimension infinie, la liberté dans l'espace des fonctions, à un calcul de déterminant en dimension n.

Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

EXERCICE 25 ⋆

1. Multiplier A à gauche par T agit sur ses lignes (proposition 16 du chapitre 16) : la première ligne est conservée, la deuxième devient $3L_1 + L_2$ et la troisième $-2L_2 + L_3$. Le produit est triangulaire supérieur, et la proposition 11 (i) donne son déterminant.

$$\boxed{B = TA = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 11 \\ 0 & -24 & 38 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \det B = 1 \times (-24) \times (-2) = 48}$$

2. La matrice T est triangulaire de diagonale $(1,1,1)$, donc $\det T = 1$. Le théorème 6 (i) donne $\det B = \det(T)\det(A) = \det A$.

$$\boxed{\det A = 48}$$

3. On compare les colonnes de C à celles de A :

$$C_1 = (3,-9,-18) = 3A_1, \qquad C_2 = (5,-3,-6) = -\frac{1}{2}A_2, \qquad C_3 = (55,25,40) = 5A_3.$$

Autrement dit, $C = A\,\mathrm{diag}(3, -\frac{1}{2}, 5)$, et la linéarité par rapport à chaque colonne (proposition 10 (ii)) donne

$$\boxed{\det C = 3 \times \Big(-\frac{1}{2}\Big) \times 5 \times \det A = -360}$$

À retenir. Une multiplication à gauche par une matrice triangulaire de diagonale 1 est une suite d'opérations $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$: elle ne change pas le déterminant. C'est exactement la méthode du pivot.

EXERCICE 26 ⋆

Les matrices A et I_3 commutent, et l'on peut développer comme dans un anneau commutatif :

$$(3A - 6I_3)^2 = 9A^2 - 36A + 36I_3 = 9(4A - 3I_3) - 36A + 36I_3 = 9I_3.$$

Par le théorème 6 (i), $\det(3A - 6I_3)^2 = \det(9I_3) = 9^3 = 729$, donc $\det(3A - 6I_3) \in \{-27, 27\}$, et l'hypothèse de signe conclut.

$$\boxed{\det(3A - 6I_3) = 27}$$

Piège. L'hypothèse de signe n'est pas décorative. La matrice $A = I_3$ vérifie $A^2 = 4A - 3I_3$, et $\det(3A - 6I_3) = \det(-3I_3) = -27$; la matrice $A = 3I_3$ la vérifie aussi, et donne $\det(3I_3) = 27$. On n'oubliera pas non plus que $\det(9I_3) = 9^3$, et non 9 : c'est l'erreur $\det(\lambda A) = \lambda \det A$ signalée dans le cours.

EXERCICE 27 ⋆

Condition nécessaire. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 = -I_n$, alors, par le théorème 6 (i),

$$(\det M)^2 = \det(-I_n) = (-1)^n.$$

Le nombre $\det M$ est réel, donc son carré est positif : $(-1)^n = 1$, et n est pair.

Condition suffisante. Si $n = 2m$, on pose $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, qui vérifie $R^2 = -I_2$, et l'on note M la matrice diagonale par blocs formée de m blocs égaux à R. Le produit par blocs (chapitre 16) donne M^2 diagonale par blocs, de blocs $R^2 = -I_2$, c'est-à-dire $M^2 = -I_n$.

$$\boxed{\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M^2 = -I_n \iff n \text{ pair}}$$

Cas complexe. Le résultat ne subsiste pas : la matrice $M = \mathrm{i}I_n$ vérifie $M^2 = -I_n$ pour tout n. L'argument précédent tombe, puisqu'un nombre complexe peut avoir un carré égal à -1.

$$\boxed{\text{dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ M = \mathrm{i}I_n \text{ convient pour tout } n \geqslant 1}$$

À retenir. La matrice R est celle de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, et l'on retrouve en une ligne le résultat de l'exercice 38 du chapitre 16, qui demandait tout un raisonnement sur les plans stables pour la dimension 3.

EXERCICE 28 ⋆

1. Dans chaque cas, u est linéaire et ne fait pas monter le degré ; on écrit sa matrice dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$, et l'on utilise la proposition 9 (ii) : $\det u$ est le déterminant de cette matrice.

(a) On a $u(X^k) = X^k + kX^{k-1}$: la matrice est triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux tous égaux à 1.

$$\boxed{\det u = 1}$$

(b) La formule du binôme donne $u(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$, de degré $k-1$: la matrice est triangulaire supérieure à diagonale nulle. On peut aussi remarquer que $u(1) = 0$, de sorte que u n'est pas injectif (théorème 5 (iii)).

$$\boxed{\det u = 0}$$

(c) On a $u(1) = 0 + 1 = 1$ et, pour $k \geqslant 1$, $u(X^k) = kX^k + 1$. La matrice a une première ligne formée de 1, des coefficients diagonaux $1, 1, 2, \dots, n$, et des zéros partout ailleurs : elle est triangulaire supérieure.

$$\boxed{\det u = 1 \times 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!}$$

2. L'application $\Phi : P \mapsto (x \mapsto P(x)\mathrm{e}^x)$, de $\mathbb{R}_n[X]$ dans l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est linéaire. Elle est injective : si $P(x)\mathrm{e}^x = 0$ pour tout réel x, le polynôme P a une infinité de racines, donc il est nul (chapitre 13). Son image E est donc un sous-espace vectoriel de dimension $n+1$, de base $(f_0, \dots, f_n)$ avec $f_k(x) = x^k \mathrm{e}^x$.

Pour $f = \Phi(P)$, on a $f'(x) = (P'(x) + P(x))\mathrm{e}^x$, donc $f' = \Phi(P + P') \in E$: la dérivation D, linéaire, est un endomorphisme de E, et $D \circ \Phi = \Phi \circ u$, où u est l'endomorphisme du cas (a). La matrice de D dans la base (f_k) est donc celle de u dans la base (X^k).

$$\boxed{\det D = 1}$$

À retenir. Un isomorphisme qui transporte un endomorphisme sur un autre transporte aussi sa matrice, donc son déterminant. Comme $\det D \neq 0$, la dérivation est bijective sur E : toute fonction $x \mapsto P(x)\mathrm{e}^x$ a une unique primitive de la même forme, ce que l'exercice 23 du chapitre 16 avait obtenu en inversant la matrice.

EXERCICE 29 ⋆⋆

1. L'application φ est linéaire, et $P(1-X)$ a le même degré que P : c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. On a $\varphi(\varphi(P)) = P(1-(1-X)) = P$, donc $\varphi^2 = \mathrm{id}$: φ est une symétrie (chapitre 14).

La formule du binôme donne $\varphi(X^j) = (1-X)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (-1)^i X^i$: la matrice de φ dans la base canonique est triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux $(-1)^j$, pour $j \in [\![0\,;n]\!]$. On en déduit

$$\boxed{\operatorname{tr}\varphi = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}, \qquad \det\varphi = \prod_{j=0}^{n} (-1)^j = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

2. Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $\psi(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k}$: l'application ψ est linéaire, envoie $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même, et vérifie $\psi(X^k) = X^{n-k}$. En l'appliquant deux fois, on revient à X^k : $\psi^2 = \mathrm{id}$, et ψ est une symétrie.

Base diagonalisante. Une symétrie est la symétrie par rapport à $F = \operatorname{Ker}(\psi - \mathrm{id})$ parallèlement à $G = \operatorname{Ker}(\psi + \mathrm{id})$, et $\mathbb{R}_n[X] = F \oplus G$ (chapitre 14). Dans une base adaptée à cette somme directe, la matrice de ψ est diagonale, de coefficients 1 (sur F) et -1 (sur G).

$$\boxed{\text{oui : dans une base adaptée à } F \oplus G,\ \operatorname{Mat}(\psi) = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)}$$

Valeurs a priori. Le premier exemple du cours après le théorème 5 donne alors $\det\psi = (-1)^{\dim G}$; on le voit aussi par $(\det\psi)^2 = \det(\psi^2) = 1$. A priori, $\det\psi \in \{-1, 1\}$.

Calcul. Les polynômes $X^k + X^{n-k}$, pour $0 \leqslant k < \dfrac{n}{2}$, et $X^{n/2}$ lorsque n est pair, sont dans F ; les polynômes $X^k - X^{n-k}$, pour $0 \leqslant k < \dfrac{n}{2}$, sont dans G. Ils engendrent tous les X^k, puisque $X^k = \dfrac{1}{2}[(X^k + X^{n-k}) + (X^k - X^{n-k})]$, et ils sont au nombre de $n+1$: ils forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$, adaptée à $F \oplus G$. On en compte $\lfloor \dfrac{n}{2} \rfloor + 1$ dans F, et $n - \lfloor \dfrac{n}{2} \rfloor = \lceil \dfrac{n}{2} \rceil$ dans G.

$$\boxed{\dim F = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \qquad \det\psi = (-1)^{\lceil n/2 \rceil} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

Contrôle. Dans la base canonique, la matrice de ψ est la matrice de la permutation qui renverse l'ordre des $n+1$ vecteurs de base. Par la formule du déterminant, seul le terme de cette permutation est non nul, et le cours a calculé sa signature : $(-1)^{(n+1)n/2}$. On vérifie aussi l'égalité des deux exposants modulo 2 pour $n = 0, 1, 2, 3$, qui donnent $0, 1, 3, 6$ et $0, 1, 1, 2$, puis la périodicité de période 4. ✓
À retenir. Pour une symétrie, $\det = (-1)^{\dim G}$ et $\mathrm{tr} = \dim F - \dim G$: la trace et le déterminant se lisent sur les dimensions des deux sous-espaces. Les symétries φ et ψ ont ici la même trace, 1 ou 0 selon la parité de n ; comme $\dim F + \dim G = n + 1$, elles ont les mêmes dimensions $\dim F$ et $\dim G$, donc le même déterminant.

EXERCICE 30 ⋆⋆

On note $T : A \mapsto A^T$, $L_M : A \mapsto MA$ et $R_M : A \mapsto AM$; ces trois applications sont linéaires.

Transposition. L'application T vérifie $T^2 = \mathrm{id}$: c'est la symétrie par rapport à $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, qui sont supplémentaires, de dimensions $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n(n-1)}{2}$ (proposition 7 du chapitre 16). Le calcul du déterminant d'une symétrie, fait dans le cours, donne $(-1)^{\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K})}$. On peut le voir aussi sur la base ordonnée $(E_{11}, \dots, E_{nn})$ suivie des couples (E_{ij}, E_{ji}) pour $i < j$: la matrice de T est diagonale par blocs, avec un bloc I_n et $\dfrac{n(n-1)}{2}$ blocs $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de déterminant -1.

$$\boxed{\det T = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

Multiplication à gauche. On range la base colonne par colonne :

$$(E_{11}, \dots, E_{n1},\ E_{12}, \dots, E_{n2},\ \dots,\ E_{1n}, \dots, E_{nn}).$$

La j-ième colonne de MA est M fois la j-ième colonne de A ; en coordonnées, $ME_{kj} = \sum_i m_{ik} E_{ij}$. La matrice de L_M est donc diagonale par blocs, avec n blocs égaux à M, et la proposition 11 (ii), appliquée $n-1$ fois, donne

$$\boxed{\det L_M = (\det M)^n}$$

Multiplication à droite. On range cette fois la base ligne par ligne : $(E_{11}, \dots, E_{1n}, E_{21}, \dots, E_{2n}, \dots)$. La i-ième ligne de AM est la i-ième ligne de A multipliée par M, et $E_{ik}M = \sum_j m_{kj} E_{ij}$. Dans le bloc associé à la ligne i, la colonne des coordonnées de $E_{ik}M$ est la k-ième ligne de M : ce bloc est M^T. Par le théorème 6 (iv),

$$\boxed{\det R_M = (\det M^T)^n = (\det M)^n}$$

On peut aussi écrire $R_M = T \circ L_{M^T} \circ T$, puisque $\left(M^T A^T\right)^T = AM$, et conclure par le théorème 5 (ii), avec $(\det T)^2 = 1$.
Piège. L'erreur la plus répandue est de répondre $\det M$: l'endomorphisme L_M agit sur un espace de dimension n^2, et M y apparaît n fois. Pour $M = \lambda I_n$, on trouve $L_M = \lambda\,\mathrm{id}$, de déterminant $\lambda^{n^2} = (\lambda^n)^n$. ✓

EXERCICE 31 ⋆⋆⋆

1. L'image de AB est contenue dans celle de A, donc $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{rg}A \leqslant p < n$ (chapitre 16). La matrice carrée AB n'est pas de rang n : elle n'est pas inversible, et le théorème 6 (ii) conclut.

$$\boxed{p < n \implies \det(AB) = 0}$$

2. Par la proposition 2 du chapitre 16, la j-ième colonne de AB est $\sum_{k=1}^{p} b_{kj} A_k$. On note det le déterminant de deux colonnes de $\mathbb{K}^2$ (proposition 9 (i)), bilinéaire alterné. En développant par bilinéarité,

$$\det(AB) = \det\Big(\sum_{k=1}^{p} b_{k1} A_k,\ \sum_{\ell=1}^{p} b_{\ell 2} A_\ell\Big) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{p} b_{k1} b_{\ell 2} \det(A_k, A_\ell).$$

Les termes tels que $k = \ell$ sont nuls, puisque la forme est alternée. On regroupe les termes d'indices (i,j) et (j,i), pour $i < j$, à l'aide de l'antisymétrie $\det(A_j, A_i) = -\det(A_i, A_j)$:

$$b_{i1}b_{j2}\det(A_i,A_j) + b_{j1}b_{i2}\det(A_j,A_i) = (b_{i1}b_{j2} - b_{j1}b_{i2})\det(A_i,A_j) = \det\left(B_{(i,j)}\right)\det\left(A^{(i,j)}\right).$$

$$\boxed{\det(AB) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant p} \det\left(A^{(i,j)}\right)\det\left(B_{(i,j)}\right)}$$

3. On applique la question 2 à la matrice $A \in \mathcal{M}_{2,p}(\mathbb{K})$ de lignes $(a_1,\dots,a_p)$ et $(b_1,\dots,b_p)$, et à $B = A^T$. Le produit vaut

$$AA^T = \begin{pmatrix} \sum_k a_k^2 & \sum_k a_k b_k \\ \sum_k a_k b_k & \sum_k b_k^2 \end{pmatrix},$$

dont le déterminant est le membre de gauche de l'identité. D'autre part, $B_{(i,j)}$ est la transposée de $A^{(i,j)}$, de sorte que $\det\left(A^{(i,j)}\right)\det\left(B_{(i,j)}\right) = (a_i b_j - a_j b_i)^2$.

$$\boxed{\Big(\sum_{k=1}^{p} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{p} b_k^2\Big) - \Big(\sum_{k=1}^{p} a_k b_k\Big)^2 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant p} (a_i b_j - a_j b_i)^2}$$

Le membre de droite est positif : on obtient au passage l'inégalité $\left(\sum a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum a_k^2\right)\left(\sum b_k^2\right)$, que l'on retrouvera avec les produits scalaires sous le nom d'inégalité de Cauchy–Schwarz.

4. Pour $p = 2$, l'identité s'écrit

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2,$$

et, si les a_k et les b_k sont entiers, les deux nombres élevés au carré à droite sont entiers. Avec $5 = 1^2 + 2^2$ et $13 = 2^2 + 3^2$, on obtient $(1\times 2 + 2\times 3)^2 + (1\times 3 - 2\times 2)^2 = 8^2 + 1^2$; avec $13 = 3^2 + 2^2$, on obtient $(1\times 3 + 2\times 2)^2 + (1\times 2 - 2\times 3)^2 = 7^2 + 4^2$.

$$\boxed{65 = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2}$$

À retenir. La question 2 est le cas $n = 2$ de la formule de Binet–Cauchy, qui exprime le déterminant d'un produit de matrices rectangulaires à l'aide des mineurs maximaux. Pour $p < n$, la question 1 dit que la somme est vide.

EXERCICE 32 ⋆⋆⋆

1. *Cas* $n = 1$. Le déterminant d'une matrice (a) est a, et $\det(A+B) = \det A + \det B$: la fonction $f(x,y) = x + y$ convient.

Cas $n \geqslant 2$. Supposons qu'une telle f existe. Les matrices E_{11} et $I_n - E_{11}$ sont diagonales, chacune avec au moins un coefficient diagonal nul puisque $n \geqslant 2$: leurs déterminants sont nuls. Le couple $(E_{11}, I_n - E_{11})$ donne $f(0,0) = \det I_n = 1$, et le couple (E_{11}, E_{11}) donne $f(0,0) = \det(2E_{11}) = 0$. C'est contradictoire.

$$\boxed{\text{une telle } f \text{ existe si et seulement si } n = 1}$$

2. Supposons $N \neq 0$, et soit $r = \mathrm{rg} N \geqslant 1$. Par le théorème 6 du chapitre 16, $N = QJ_rP$, avec P et Q inversibles. On choisit $M = Q(I_n - J_r)P$. Alors

$$M + N = QP, \qquad \det(M+N) = \det(Q)\det(P) \neq 0, \qquad \det M = \det(Q)\det(I_n - J_r)\det(P) = 0,$$

car $I_n - J_r$ est diagonale avec $r \geqslant 1$ coefficients diagonaux nuls. Cela contredit $\det(M+N) = \det M$.

$$\boxed{N = 0}$$

3. Soit A une telle matrice. Avec $B = A$, on obtient $\det(2A) = 2\det A$, soit $2^n \det A = 2\det A$, d'où $\det A = 0$ puisque $n \geqslant 2$. L'hypothèse devient $\det(B+A) = \det B$ pour toute B, et la question 2, appliquée à $N = A$, donne $A = 0$. Réciproquement, $A = 0$ convient.

$$\boxed{A = 0}$$

À retenir. Le déterminant est multiplicatif, mais il n'a aucune propriété additive dès que $n \geqslant 2$: le déterminant d'une somme ne dépend même pas des seuls déterminants des termes.

Calcul des déterminants

EXERCICE 33 ⋆

Calcul de Δ_1. Les opérations $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$ ne changent pas le déterminant (proposition 10 (i)) et laissent un seul coefficient non nul dans la première colonne, à la place $(2,1)$, de signe $-$ sur le damier. On développe par rapport à cette colonne, puis le déterminant d'ordre 3 par rapport à sa dernière colonne :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

$$\boxed{\Delta_1 = -1}$$

Calcul de Δ_2. On effectue $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$: chaque opération utilise une ligne qui n'a pas encore été modifiée. On développe ensuite par rapport à la première colonne, dont le seul coefficient non nul est en place $(4,1)$, de signe $(-1)^5 = -1$:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & b-a & c-b & d-c \\ 0 & 0 & a-b & b-c \\ 0 & 0 & 0 & a-b \\ a & a & a & a \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} b-a & c-b & d-c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = -a(b-a)(a-b)^2.$$

$$\boxed{\Delta_2 = a(a-b)^3}$$

Le résultat ne dépend ni de c ni de d. Pour $b = a$, il est nul, ce que l'on voit directement : les deux premières colonnes sont alors égales à (a,a,a,a). ✓

EXERCICE 34 ⋆

1. On remarque que 546, 273 et 169 se lisent dans les colonnes. L'opération $L_1 \leftarrow 100L_1+10L_2+L_3$ multiplie le déterminant D par 100 (proposition 10 (i) et (ii)), et la nouvelle première ligne est $(546, 273, 169) = 13 \times (42, 21, 13)$. Par linéarité par rapport à cette ligne,

$$100D = \begin{vmatrix} 546 & 273 & 169 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} 42 & 21 & 13 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix},$$

et le dernier déterminant est un entier, par la formule du déterminant. Ainsi 13 divise $100D$, et, comme 13 est premier avec 100, le lemme de Gauss (chapitre 12) montre que 13 divise D.

$$\boxed{13 \mid D}$$

On vérifie par la règle de Sarrus que $D = 195 = 13 \times 15$. ✓

2. L'opération $L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3$ remplace la première ligne par $(1+a+b+c)(1, 1, 1)$. On factorise, puis on effectue $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$:

$$\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = (1+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = (1+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

La dernière matrice est triangulaire de diagonale $(1, 1, 1)$.

$$\boxed{\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c}$$

3. On passe de A à B en multipliant la ligne i par $(-1)^i$ pour chaque i, puis la colonne j par $(-1)^j$ pour chaque j. Par la proposition 10 (ii), le déterminant est multiplié par

$$\prod_{i=1}^{n}(-1)^i \times \prod_{j=1}^{n}(-1)^j = \Big(\prod_{i=1}^{n}(-1)^i\Big)^2 = 1.$$

Autrement dit, $B = \Delta A \Delta$ avec $\Delta = \mathrm{diag}((-1)^i)$, et $\det B = (\det \Delta)^2 \det A$.

$$\boxed{\det B = \det A}$$

EXERCICE 35 ⋆

(i) L'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ donne la ligne $(a+b+c)(1, 1, 1)$, proportionnelle à L_1 : la famille des lignes est liée.

$$\boxed{\text{(i)} = 0}$$

(ii) L'opération $C_1 \leftarrow C_1 - aC_2$ donne la colonne $(1-a^2, 0, 0)$, et l'on développe par rapport à elle :

$$\begin{vmatrix} 1-a^2 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = (1-a^2)(1-a^2), \qquad \boxed{\text{(ii)} = (1-a^2)^2 = (1-a)^2(1+a)^2}$$

(iii) Les opérations $C_1 \leftarrow C_1+C_4$ et $C_2 \leftarrow C_2+C_3$, puis $L_4 \leftarrow L_4-L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3-L_2$, conduisent à une matrice triangulaire par blocs :

$$\begin{vmatrix} a+b & 2c & c & b \\ 2c & a+b & b & c \\ 2c & a+b & a & c \\ a+b & 2c & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & 2c & c & b \\ 2c & a+b & b & c \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

La proposition 11 (ii) donne le produit de $(a-b)^2$ par $(a+b)^2-4c^2$.

$$\boxed{\text{(iii)} = (a-b)^2(a+b-2c)(a+b+2c)}$$

(iv) Pour tout nombre x, on a la relation $(x+3)^2-3(x+2)^2+3(x+1)^2-x^2=0$, qui se vérifie en développant : les termes en x^2, en x et constants donnent $1-3+3-1=0$, $6-12+6=0$ et $9-12+3=0$. Appliquée à chaque colonne, elle donne $L_4-3L_3+3L_2-L_1=0$: les lignes sont liées.

$$\boxed{\text{(iv)} = 0}$$

On peut aussi dire que les quatre lignes sont combinaisons linéaires des trois lignes (a^2,b^2,c^2,d^2), (a,b,c,d) et $(1,1,1,1)$.

(v) La matrice $\sum_i a_i E_{i,n+1-i}$ n'a de coefficients non nuls que sur la seconde diagonale : sa colonne j contient a_{n+1-j} en ligne $n+1-j$. Dans la formule du déterminant, seul le terme de la permutation $\rho : j \mapsto n+1-j$ est non nul, et le cours a calculé $\varepsilon(\rho) = (-1)^{n(n-1)/2}$.

$$\boxed{\text{(v)} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n}$$

(vi) Pour $n \geqslant 3$, la deuxième ligne de la matrice est $(1,0,\dots,0)$, puisque $\min(2,j)=2$ est pair dès que $j \geqslant 2$. On développe par rapport à cette ligne : le coefficient 1 est en place $(2,1)$, de signe $-$, et il reste le déterminant obtenu en supprimant la ligne 2 et la colonne 1. Dans celui-ci, la première colonne, issue de la colonne 2 de D_n, est $(1,0,\dots,0)$, car $d_{i2}=0$ pour $i \geqslant 2$. Un second développement laisse le déterminant des d_{ij} pour $i,j \geqslant 3$. Or, pour $i,j \geqslant 3$, $\min(i,j)$ et $\min(i-2,j-2)$ ont la même parité : ce déterminant est D_{n-2}. Ainsi

$$D_n = -D_{n-2} \quad (n \geqslant 3), \qquad D_1 = 1, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

On obtient $D_1, D_2, D_3, D_4, \cdots = 1, -1, -1, 1, \dots$, suite de période 4, qui coïncide avec $(-1)^{n(n-1)/2}$ pour $n = 1,2,3,4$. Par récurrence, comme $\dfrac{n(n-1)}{2} - \dfrac{(n-2)(n-3)}{2} = 2n-3$ est impair,

$$\boxed{D_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

En particulier, $D_5 = 1$, ce que confirme un calcul direct.

EXERCICE 36 ⋆

Première matrice. Les opérations $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$, puis $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, donnent deux colonnes égales à $(1,1,1)$.

$$\boxed{\det = 0 : \text{la matrice n'est inversible pour aucune valeur de } x}$$

Deuxième matrice. On ajoute à la première colonne les trois autres, ce qui fait apparaître la colonne $(x+3)(1,1,1,1)$, puis, après factorisation, $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i = 2,3,4$:

$$\det = (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}, \qquad \boxed{\det = (x+3)(x-1)^3, \quad \text{inversible} \iff x \notin \{1,-3\}}$$

Troisième matrice. Chaque ligne a pour somme $a-2$: l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ fait apparaître la colonne $(a-2)(1,1,1,1)$. On factorise, on effectue $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i = 2,3,4$, et l'on développe par rapport à la première colonne, puis par rapport à la deuxième ligne :

$$\det = (a-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & a+1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 & a+1 \end{vmatrix} = (a-2)\begin{vmatrix} a+1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & -1 & a+1 \end{vmatrix} = (a-2) \times a \times \left((a+1)^2 - 1\right).$$

$$\boxed{\det = a^2(a-2)(a+2), \quad \text{inversible} \iff a \notin \{0, 2, -2\}}$$

Quatrième matrice. L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$ donne la ligne $(0, -1, -m, m^2 - m)$; la première colonne n'a plus qu'un coefficient non nul, en place $(4, 1)$, de signe $-$. On développe, puis on effectue $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ dans le déterminant d'ordre 3, et l'on développe par rapport à sa première ligne :

$$\det = -\begin{vmatrix} m & m & m^2-m \\ -1 & -m & m^2-m \\ m & m & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & m(m-1) \\ -1 & -m & m(m-1) \\ m & m & 0 \end{vmatrix},$$

$$\det = -m(m-1)\begin{vmatrix} -1 & -m \\ m & m \end{vmatrix} = -m(m-1)(m^2-m).$$

$$\boxed{\det = -m^2(m-1)^2, \quad \text{inversible} \iff m \notin \{0, 1\}}$$

Piège. Avant de développer, on cherche toujours une opération qui fait apparaître un facteur commun ou des zéros : une colonne de sommes égales, comme dans les deuxième et troisième matrices, est le cas le plus fréquent. Le développement brutal d'un déterminant d'ordre 4 comporte 24 termes, et le résultat factorisé, seul utile ici, serait difficile à retrouver.

EXERCICE 37 ⋆⋆

1. On développe Δ_{n+2} par rapport à sa première ligne, qui a deux coefficients non nuls : 3 en place $(1, 1)$ et 1 en place $(1, 2)$, de signe $-$. Le premier mineur est Δ_{n+1}. Le second a pour première colonne $(2, 0, \dots, 0)$, et son développement par rapport à cette colonne donne $2\Delta_n$. Ainsi

$$\boxed{\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n \quad (n \geqslant 1)}$$

avec $\Delta_1 = 3$ et $\Delta_2 = 9 - 2 = 7$. L'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2) = 0$ (chapitre 7) donne $\Delta_n = \lambda + \mu 2^n$; les conditions $\lambda + 2\mu = 3$ et $\lambda + 4\mu = 7$ donnent $\mu = 2$ et $\lambda = -1$.

$$\boxed{\Delta_n = 2^{n+1} - 1}$$

2. Le même développement donne, en notant E_n ce déterminant, $E_{n+2} = (1 + x^2)E_{n+1} - x^2 E_n$, le produit des deux coefficients non diagonaux voisins valant $(-x)(-x) = x^2$. On a $E_1 = 1 + x^2$ et $E_2 = (1 + x^2)^2 - x^2 = 1 + x^2 + x^4$. Montrons par récurrence double que $E_n = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}$. Si c'est vrai aux rangs n et $n + 1$, alors $E_{n+1} - E_n = x^{2n+2}$, et

$$E_{n+2} = E_{n+1} + x^2(E_{n+1} - E_n) = \sum_{k=0}^{n+1} x^{2k} + x^{2n+4} = \sum_{k=0}^{n+2} x^{2k}.$$

$$\boxed{E_n = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} = \begin{cases} \dfrac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1} & \text{si } x^2 \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } x^2 = 1 \end{cases}}$$

Pour $x = 1$, on retrouve l'exemple du cours, $D_n = n + 1$. ✓

3. On note F_n ce déterminant. Pour garder intact le premier coefficient, on développe F_{n+2} par rapport à sa *dernière* ligne : le coefficient $2\cos\theta$ donne $2\cos\theta\, F_{n+1}$, et le coefficient 1 en place $(n+2, n+1)$, de signe $-$, a un mineur dont la dernière colonne est $(0, \dots, 0, 1)$; son développement donne F_n. Ainsi

$$F_{n+2} = 2\cos\theta\, F_{n+1} - F_n, \qquad F_1 = \cos\theta, \qquad F_2 = 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta.$$

La formule de trigonométrie $\cos\big((n+2)\theta\big) + \cos(n\theta) = 2\cos\theta\cos\big((n+1)\theta\big)$ (chapitre 4) montre que la suite $\big(\cos(n\theta)\big)$ vérifie la même relation et les mêmes conditions initiales ; une récurrence double conclut.

$$\boxed{F_n = \cos(n\theta)}$$

À retenir. Pour un déterminant tridiagonal, le développement par rapport à une ligne extrême conduit toujours à une récurrence linéaire d'ordre 2, dont le coefficient de F_n est le produit des deux coefficients voisins de la diagonale, changé de signe. On la résout comme au chapitre 7, ou l'on vérifie une formule conjecturée.

EXERCICE 38 ⋆⋆

1. On effectue $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ pour $i = n$, puis $n-1$, …, jusqu'à 2 : en commençant par le bas, chaque opération utilise une ligne qui n'a pas encore été modifiée. Le coefficient (i,j) devient $s_{\min(i,j)} - s_{\min(i-1,j)}$, qui vaut $s_j - s_j = 0$ si $j \leqslant i-1$, et $s_i - s_{i-1}$ si $j \geqslant i$. La matrice obtenue est triangulaire supérieure.

$$\boxed{\det\left(s_{\min(i,j)}\right) = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2)\cdots(s_n - s_{n-1})}$$

2. Avec $s_k = k$, tous les facteurs valent 1 ; avec $s_k = S_k$, on a $S_k - S_{k-1} = k$.

$$\boxed{\det\left(\min(i,j)\right) = 1, \qquad \det\left(S_{\min(i,j)}\right) = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!}$$

3. On effectue cette fois $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$ pour $i = 1$, puis 2, …, jusqu'à $n-1$, en commençant par le haut. Le coefficient (i,j) devient $\max(i,j) - \max(i+1,j)$, qui vaut $i - (i+1) = -1$ si $j \leqslant i$, et $j - j = 0$ si $j \geqslant i+1$. La dernière ligne, inchangée, est $(n, n, \ldots, n)$. La matrice obtenue est triangulaire inférieure, de diagonale $(-1, \ldots, -1, n)$.

$$\boxed{\det\left(\max(i,j)\right) = (-1)^{n-1}n}$$

Les mêmes opérations sur $\left(a^{\max(i,j)}\right)$ donnent, pour $i \leqslant n-1$, les coefficients $a^i - a^{i+1} = a^i(1-a)$ si $j \leqslant i$, et $a^j - a^j = 0$ si $j > i$; la dernière ligne est $(a^n, \ldots, a^n)$. Le produit des coefficients diagonaux vaut $a^{1+2+\cdots+(n-1)}(1-a)^{n-1}a^n$.

$$\boxed{\det\left(a^{\max(i,j)}\right) = a^{\frac{n(n+1)}{2}}(1-a)^{n-1}}$$

Piège. L'ordre des opérations compte : si l'on effectuait $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ avant $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ dans la question 1, la seconde opération utiliserait la ligne L_2 déjà modifiée, et le résultat ne serait plus triangulaire. Une suite d'opérations élémentaires ne change jamais le déterminant, mais seul le bon ordre produit la matrice annoncée.

EXERCICE 39 ⋆⋆

Premier déterminant. On effectue $L_i \leftarrow L_i - L_n$ pour $i \leqslant n-1$. La ligne i devient $(i-n)$ fois le i-ième vecteur de la base canonique, puisque ses autres coefficients valent $n - n = 0$; la dernière ligne reste $(n, \ldots, n)$. La matrice est triangulaire inférieure, de diagonale $(1-n, 2-n, \ldots, -1, n)$.

$$\boxed{\det = (-1)^{n-1}(n-1)! \times n = (-1)^{n-1}n!}$$

Deuxième déterminant. Si $z \neq 0$, l'opération $C_1 \leftarrow C_1 - \dfrac{y}{z}(C_2 + \cdots + C_n)$ annule les coefficients 2 à n de la première colonne et remplace le premier par $a - (n-1)\dfrac{xy}{z}$. La matrice devient triangulaire supérieure, de diagonale $\left(a-(n-1)\dfrac{xy}{z}, z, \ldots, z\right)$, et le déterminant vaut $\left(a-(n-1)\dfrac{xy}{z}\right)z^{n-1}$. Si $z = 0$ et $n \geqslant 3$, les colonnes C_2 et C_3 sont égales à $(x, 0, \ldots, 0)$, et le déterminant est nul ; si $z = 0$ et $n = 2$, il vaut $-xy$. Dans tous les cas,

$$\boxed{\det = z^{n-2}(az - (n-1)xy)}$$

avec la convention $z^0 = 1$.

Troisième déterminant. On effectue $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$, dans cet ordre. Le coefficient (i,j) devient $|i-j| - |i+1-j|$, qui vaut -1 si $j \leqslant i$ et $+1$ si $j \geqslant i+1$; la dernière ligne reste

$(n-1, n-2, \dots, 1, 0)$. On effectue ensuite $C_j \leftarrow C_j + C_1$ pour $j \geqslant 2$: pour $i \leqslant n-1$, la ligne i devient $(-1, -2, \dots, -2, 0, \dots, 0)$, avec $i-1$ coefficients égaux à -2, et le dernier coefficient de la dernière ligne devient $0 + (n-1)$. La matrice est triangulaire inférieure, de diagonale $(-1, -2, \dots, -2, n-1)$.

$$\boxed{\det\left(|i-j|\right) = (-1)(-2)^{n-2}(n-1) = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}}$$

Pour $n = 2$, on retrouve $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, et pour $n = 3$, la règle de Sarrus donne $0+2+2-0-0-0 = 4$. ✓

EXERCICE 40 ⋆⋆

1. On note A_1, …, A_n les colonnes de A et $U = (1, \dots, 1)$, de sorte que les colonnes de $A(x)$ sont les $A_j + xU$. Les opérations $C_j \leftarrow C_j - C_1$, pour $j \geqslant 2$, remplacent ces colonnes par $A_j - A_1$, qui ne dépendent plus de x. Par linéarité par rapport à la première colonne,

$$\det A(x) = \det(A_1, A_2 - A_1, \dots, A_n - A_1) + x \det(U, A_2 - A_1, \dots, A_n - A_1).$$

$$\boxed{\det A(x) = \det A + cx, \quad \text{avec } c \text{ indépendant de } x}$$

2. Soit M la matrice de l'énoncé et $g(x) = \det(M + xJ)$, de la forme $g(x) = p + qx$ par la question 1, avec $p = \det M$. Pour $x = -a$, la matrice $M - aJ$ est triangulaire inférieure de diagonale $(\alpha_i - a)$, donc $g(-a) = f(a)$; de même, $M - bJ$ est triangulaire supérieure, et $g(-b) = f(b)$. Le système

$$p - aq = f(a), \qquad p - bq = f(b)$$

donne, par différence, $(b-a)q = f(a) - f(b)$, puis $p = f(a) + aq = \dfrac{(b-a)f(a) + af(a) - af(b)}{b-a}$.

$$\boxed{\det M = \frac{bf(a) - af(b)}{b-a}}$$

3. Lorsque $a = b$, la matrice est $D + bJ$, de colonnes $D_j + bU$, avec $D_j = (\alpha_j - b)e_j$. On développe par multilinéarité : chaque terme choisit, dans chaque colonne, D_j ou bU. Les termes où bU apparaît au moins deux fois sont nuls, car la forme est alternée. Il reste $\det D$ et les n termes où bU occupe une seule place i. Dans ce dernier, on écrit $bU = b\sum_k e_k$: pour $k \neq i$, la colonne e_k est colinéaire à D_k, et la famille est liée (proposition 6 (iii)) ; il ne reste que $k = i$, qui donne $b\prod_{j \neq i}(\alpha_j - b)$.

$$\boxed{\det(D + bJ) = \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i - b) + b\sum_{i=1}^{n}\prod_{j \neq i}(\alpha_j - b)}$$

On peut aussi obtenir ce résultat comme limite de celui de la question 2 quand a tend vers b : c'est la dérivée en b de $x \mapsto xf(b) - bf(x)$, à savoir $f(b) - bf'(b)$.

4. On applique la question 3 avec tous les α_i égaux au coefficient diagonal a (cette lettre ne désigne plus ici le coefficient au-dessus de la diagonale) :

$$(a-b)^n + nb(a-b)^{n-1} = (a-b)^{n-1}(a - b + nb).$$

$$\boxed{\det = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}}$$

Pour $a = x$ et $b = 1$, on retrouve la deuxième matrice de l'exercice 36, de déterminant $(x+3)(x-1)^3$ pour $n = 4$. ✓

5. On a $A(x)^T = A^T + xJ = -A + xJ = -A(-x)$. Par le théorème 6 (iv) et (i), et puisque n est pair,

$$\det A(x) = \det\left(A(x)^T\right) = (-1)^n \det A(-x) = \det A(-x).$$

La fonction affine $x \mapsto \det A + cx$ prend donc la même valeur en x et en $-x$: $c = 0$.

$$\boxed{\det A(x) = \det A \quad (x \in \mathbb{R})}$$

À retenir. L'idée de la question 2 est de considérer le déterminant comme une fonction d'un paramètre ajouté, de forme connue (ici affine), puis de l'évaluer là où il est facile. La même idée reviendra aux exercices 46 et 56.

EXERCICE 41 ⋆⋆

On utilise la formule de Pascal $\binom{k}{\ell} = \binom{k-1}{\ell} + \binom{k-1}{\ell-1}$, valable pour $k \geqslant 1$ et tout entier ℓ, avec la convention $\binom{k}{\ell} = 0$ si $\ell < 0$ ou $\ell > k$ (chapitre 3) ; on l'emploie sous la forme d'une différence, en isolant l'un ou l'autre des deux termes de droite.

1. On note $D_p(m)$ ce déterminant, dont les indices vont de 0 à p. On effectue les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ pour i allant de p à 1, en commençant par la dernière ligne. Pour $i \geqslant 1$, le coefficient (i, j) devient

$$\binom{m+i}{j} - \binom{m+i-1}{j} = \binom{m+i-1}{j-1},$$

nul pour $j = 0$. La première colonne devient $(1, 0, \ldots, 0)$, et le développement par rapport à elle laisse le déterminant des coefficients $\binom{m+i-1}{j-1}$, pour i et j compris entre 1 et p. En posant $i' = i - 1$ et $j' = j - 1$, c'est $D_{p-1}(m)$. Ainsi $D_p(m) = D_{p-1}(m) = \cdots = D_0(m) = \binom{m}{0}$.

$$\boxed{\det\left(\binom{m+i}{j}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant p} = 1}$$

2. En posant $i' = i-1$ et $j' = j-1$, le premier déterminant est $\det\left(\binom{1+i'}{j'}\right)_{0 \leqslant i', j' \leqslant n-1} = D_{n-1}(1)$.

Pour le second, noté P_n, on effectue $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ pour $i = n, \ldots, 2$: pour $i \geqslant 2$, le coefficient devient $\binom{i+j-2}{i-1} - \binom{i+j-3}{i-2} = \binom{i+j-3}{i-1}$, nul pour $j = 1$. On effectue ensuite $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$ pour $j = n, \ldots, 2$: la première ligne $(1, 1, \ldots, 1)$ devient $(1, 0, \ldots, 0)$, et, pour $i, j \geqslant 2$, le coefficient devient

$$\binom{i+j-3}{i-1} - \binom{i+j-4}{i-1} = \binom{i+j-4}{i-2},$$

qui est le coefficient d'indice $(i-1, j-1)$ de la matrice d'ordre $n-1$ de même forme. La matrice est diagonale par blocs, de blocs (1) et la matrice de P_{n-1}, et $P_n = P_{n-1} = \cdots = P_1 = 1$.

$$\boxed{\det\left(\binom{i}{j-1}\right) = 1, \qquad \det\left(\binom{i+j-2}{i-1}\right) = 1}$$

3. L'application $\Phi : Q \mapsto (Q(1), \ldots, Q(n))$, de $\mathbb{R}_{n-2}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$, est linéaire. La j-ième colonne de la matrice est $\Phi(Q_j)$, avec $Q_j = P(X + j - 1) \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Les n polynômes Q_1, …, Q_n appartiennent à un espace de dimension $n-1$: ils sont liés (chapitre 15), et leurs images par Φ le sont aussi. La famille des colonnes est liée.

$$\boxed{\det\left(P(i+j-1)\right) = 0}$$

Piège. Il ne suffit pas de remarquer que les coefficients sont des valeurs de P : avec $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, le résultat est faux, puisque $P = X^{n-1}$ donne pour $n = 2$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, de déterminant -1. C'est la comparaison entre n colonnes et la dimension $n-1$ qui fait tout.

EXERCICE 42 ⋆⋆

1. On factorise i dans la ligne i (proposition 10 (ii)) : il reste la matrice de Vandermonde (i^{j-1}), et la proposition 12 donne

$$\det\left(i^j\right) = n! \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (j-i) = n! \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (j-i) = n! \prod_{j=2}^{n} (j-1)!.$$

$$\boxed{\det\left(i^j\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 1! \times 2! \times \cdots \times n!}$$

Les premières valeurs sont 1, 2, 12, 288, 34 560.

2. On écrit $P_{j-1} = \sum_{k=1}^{j} t_{kj} X^{k-1}$, avec $t_{jj} = c_{j-1}$, et l'on pose $t_{kj} = 0$ pour $k > j$. La matrice $T = (t_{kj})$ est triangulaire supérieure de diagonale $(c_0, \ldots, c_{n-1})$, et, si V est la matrice de Vandermonde (x_i^{k-1}),

$$(VT)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_i^{k-1} t_{kj} = P_{j-1}(x_i).$$

Par le théorème 6 (i) et la proposition 11 (i),

$$\boxed{\det\left(P_{j-1}(x_i)\right) = c_0 c_1 \cdots c_{n-1}\, V(x_1, \ldots, x_n)}$$

Autrement dit, on peut remplacer chaque colonne par la colonne des valeurs de $c_{j-1}X^{j-1}$, par des opérations $C_j \leftarrow C_j - \lambda C_k$ avec $k < j$.

3. On définit les polynômes T_k par

$$T_0 = 1, \qquad T_1 = X, \qquad T_{k+2} = 2XT_{k+1} - T_k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

La formule $\cos\left((k+2)\theta\right) + \cos(k\theta) = 2\cos\theta\cos\left((k+1)\theta\right)$ (chapitre 4) montre, par récurrence double, que $\cos(k\theta) = T_k(\cos\theta)$ pour tout k. On a $T_1 = X$, de coefficient dominant $1 = 2^0$, et $T_2 = 2X^2 - 1$. Si T_{k+1} est de degré $k+1$ et de coefficient dominant 2^k, et T_k de degré k, alors $2XT_{k+1}$ est de degré $k+2$ et de coefficient dominant 2^{k+1}, et la soustraction de T_k ne le modifie pas.

$$\boxed{\cos(k\theta) = T_k(\cos\theta), \qquad \deg T_k = k, \qquad \text{coefficient dominant } 2^{k-1}\ (k \geqslant 1)}$$

Ces polynômes sont les *polynômes de Tchebychev*.

4. Le coefficient (i,j) est $T_{j-1}(\cos\theta_i)$, et l'on applique la question 2 avec $c_0 = 1$ et $c_k = 2^{k-1}$: le produit des c_k vaut $2^{0+1+\cdots+(n-2)}$.

$$\boxed{\det\left(\cos((j-1)\theta_i)\right) = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\cos\theta_j - \cos\theta_i)}$$

Pour $n = 3$,

$$\boxed{\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 \\ 1 & \cos\theta_3 & \cos 2\theta_3 \end{vmatrix} = 2(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)(\cos\theta_3 - \cos\theta_1)(\cos\theta_3 - \cos\theta_2)}$$

Le déterminant est nul si et seulement si deux des $\cos\theta_i$ sont égaux.

EXERCICE 43 ⋆⋆

1. Dans la formule du déterminant, chaque terme est un produit de coefficients égaux à ± 1, multiplié par une signature : c'est un entier, et $\det A$, somme de $n!$ entiers, est un entier.

2. On effectue $L_i \leftarrow L_i + L_1$ pour $i \geqslant 2$, ce qui ne change pas le déterminant. Chaque coefficient des lignes 2 à n devient $a_{ij} + a_{1j} \in \{-2, 0, 2\}$: il est pair. On factorise 2 dans chacune de ces $n-1$ lignes (proposition 10 (ii)) : $\det A = 2^{n-1} \det A'$, où A' est à coefficients entiers, donc $\det A' \in \mathbb{Z}$ par la question 1.

$$\boxed{2^{n-1} \mid \det A}$$

À retenir. La borne est atteinte : pour $n = 2$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$. La divisibilité limite fortement les valeurs possibles : pour $n = 3$, $\det A$ est un multiple de 4 compris entre -6 et 6, d'après la formule à six termes, donc $|\det A| \leqslant 4$.

EXERCICE 44 ⋆⋆

On pose

$$Q(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0.$$

Pour $n = 1$, on a directement $\det(A - xI_1) = a_0 - x = -Q(x)$. On suppose $n \geqslant 2$ et l'on effectue l'opération

$$L_1 \leftarrow L_1 + xL_2 + x^2 L_3 + \cdots + x^{n-1} L_n,$$

qui ne change pas le déterminant. Pour $j \leqslant n-1$, la colonne j de $A - xI_n$ a pour seuls coefficients non nuls $-x$ en ligne j et 1 en ligne $j+1$: le nouveau coefficient $(1, j)$ vaut $x^{j-1}(-x) + x^j = 0$. Le nouveau coefficient $(1, n)$ vaut

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-2}x^{n-2} + (a_{n-1} - x)x^{n-1} = -Q(x).$$

On développe par rapport à la première ligne $(0, \ldots, 0, -Q(x))$: le coefficient est en place $(1, n)$, de signe $(-1)^{n+1}$, et le mineur, formé des lignes 2 à n et des colonnes 1 à $n-1$, est triangulaire supérieur de diagonale $(1, \ldots, 1)$.

$$\boxed{\det(A - xI_n) = (-1)^{n+1}(-Q(x)) = (-1)^n(x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0)}$$

Soit R un polynôme unitaire de degré n, que l'on écrit

$$R = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1 X + b_0.$$

Le choix $a_k = -b_k$ donne $\det(A - xI_n) = (-1)^n R(x)$ pour tout $x \in \mathbb{C}$.

$$\boxed{\text{tout polynôme unitaire de degré } n \text{ est égal, au signe } (-1)^n \text{ près, à } x \mapsto \det(A - xI_n)}$$

À retenir. La matrice A est appelée *matrice compagnon* du polynôme. La fonction $x \mapsto \det(A - xI_n)$ s'annule exactement aux x pour lesquels $A - xI_n$ n'est pas inversible ; cette fonction polynomiale sera étudiée en seconde année.

EXERCICE 45 ⋆⋆⋆

1. Le produit par blocs (chapitre 16) donne

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

La deuxième matrice est triangulaire par blocs, de déterminant $\det(I_n)^2 = 1$ (proposition 11 (ii)). La matrice de droite est triangulaire inférieure par blocs ; sa transposée est triangulaire supérieure par blocs, de blocs diagonaux A^T et $(D-CA^{-1}B)^T$. Par les théorèmes 6 (i) et (iv) et la proposition 11 (ii),

$$\boxed{\det M = \det(A)\det(D-CA^{-1}B)}$$

2. Comme $AC = CA$, on a $ACA^{-1} = C$, et le théorème 6 (i) donne

$$\det(A)\det(D-CA^{-1}B) = \det\left(AD - ACA^{-1}B\right) = \det(AD-CB).$$

$$\boxed{AC = CA \implies \det M = \det(AD-CB)}$$

3. On a bien $AC = I_2E_{11} = E_{11} = E_{11}I_2 = CA$, et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'opération $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ donne la matrice de lignes e_4, e_2, e_1, e_3 (vecteurs lignes de la base canonique) ; seule la permutation $1 \mapsto 3$, $3 \mapsto 4$, $4 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$ fournit un terme non nul dans la formule, et c'est un 3-cycle, de signature 1. Ainsi $\det M = 1$. D'autre part,

$$AD - CB = E_{21} - E_{11}E_{12} = E_{21} - E_{12}, \qquad AD - BC = E_{21} - E_{12}E_{11} = E_{21},$$

de déterminants respectifs $0 \times 0 - (-1) \times 1 = 1$ et 0.

$$\boxed{\det M = 1 = \det(AD-CB), \qquad \det(AD-BC) = 0}$$

4. On travaille dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$, où les opérations élémentaires ont les mêmes effets (proposition 10). Les opérations $C_k \leftarrow C_k - \mathrm{i}C_{k-n}$, pour $k \in [\![n+1\,;2n]\!]$, remplacent le bloc de colonnes $\begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} -B-\mathrm{i}A \\ A-\mathrm{i}B \end{pmatrix}$. Les opérations $L_k \leftarrow L_k + \mathrm{i}L_{k+n}$, pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, remplacent ensuite le bloc de lignes du haut par $(A+\mathrm{i}B,\ -B-\mathrm{i}A+\mathrm{i}(A-\mathrm{i}B)) = (A+\mathrm{i}B,\ 0)$:

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & -B-\mathrm{i}A \\ B & A-\mathrm{i}B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+\mathrm{i}B & 0 \\ B & A-\mathrm{i}B \end{vmatrix} = \det(A+\mathrm{i}B)\det(A-\mathrm{i}B),$$

la dernière égalité par transposition, comme à la question 1. Enfin, A et B étant réelles, $A-\mathrm{i}B$ est la matrice conjuguée de $A+\mathrm{i}B$; le déterminant étant une somme de produits de coefficients, à coefficients entiers, la conjugaison passe à travers la formule (chapitre 4), et $\det(A-\mathrm{i}B) = \overline{\det(A+\mathrm{i}B)}$.

$$\boxed{\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \left|\det(A+\mathrm{i}B)\right|^2 \geqslant 0}$$

Piège. La question 3 montre que, pour des matrices, l'analogue de la formule $ad-bc$ dépend de l'ordre des facteurs : c'est $AD-CB$, où C précède B comme A précède D, et non $AD-BC$.

À retenir. La formule de la question 2 reste vraie sans supposer A inversible, lorsque $AC = CA$. La matrice $A + tI_n$ commute encore avec C, et $t \mapsto \det(A + tI_n)$ est un polynôme unitaire de degré n, qui n'a qu'un nombre fini de racines : pour tous les autres réels t, la question 2 donne

$$\begin{vmatrix} A + tI_n & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det\left((A + tI_n)D - CB\right).$$

Les deux membres sont des polynômes en t, égaux en une infinité de points, donc égaux (chapitre 13) ; on conclut en $t = 0$.

EXERCICE 46 ⋆⋆⋆

1. Soit $r = \mathrm{rg}B$. Par le théorème 6 du chapitre 16, $B = PJ_rQ$, avec P et Q inversibles. On pose $A' = P^{-1}AQ^{-1}$, de sorte que $A + tB = P(A' + tJ_r)Q$, et

$$\det(A + tB) = \det(P)\det(Q)\det(A' + tJ_r).$$

Les colonnes de $A' + tJ_r$ sont $A'_j + te_j$ pour $j \leqslant r$, et A'_j pour $j > r$. Par linéarité par rapport à chacune des r premières colonnes, $\det(A' + tJ_r)$ est une somme de 2^r termes, chacun de la forme t^k multiplié par un déterminant indépendant de t, avec $k \leqslant r$.

$$\boxed{t \mapsto \det(A + tB) \text{ est polynomiale de degré au plus } \mathrm{rg}B}$$

2. Par la question 1, $\det(A + tB) = d + ct$ pour tout réel t, avec $d = \det A$ (valeur en $t = 0$) et c réel. Par le théorème 6 (i),

$$\det\left((A + B)(A - B)\right) = \det(A + B)\det(A - B) = (d + c)(d - c) = d^2 - c^2.$$

$$\boxed{\det\left((A + B)(A - B)\right) \leqslant (\det A)^2}$$

Piège. Pour $\mathrm{rg}B = 2$, l'inégalité peut être fausse : avec $n = 2$, $A = I_2$ et $B = 2I_2$, on trouve $\det\left((A+B)(A-B)\right) = \det(-3I_2) = 9 > 1$. C'est le degré au plus 1 qui produit le produit $(d+c)(d-c)$.

EXERCICE 47 ⋆⋆⋆

Le coefficient d'indice (i, j) de A est $a_{\overline{j-i}}$, où $\overline{k}$ désigne le reste de la division euclidienne de k par n. On utilise $\omega^n = 1$: ω^k ne dépend que de ce reste.

1. Le coefficient d'indice (i, j) de AM vaut $\sum_{k=1}^{n} a_{\overline{k-i}}\,\omega^{(k-1)(j-1)}$. Lorsque k parcourt $[\![1\,;n]\!]$, $\ell = \overline{k-i}$ parcourt $[\![0\,;n-1]\!]$, et $k - 1 \equiv \ell + i - 1 \pmod{n}$, donc

$$(AM)_{ij} = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell\,\omega^{(\ell+i-1)(j-1)} = \omega^{(i-1)(j-1)} \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell\left(\omega^{j-1}\right)^\ell = P(\omega^{j-1})\,M_{ij}.$$

$$\boxed{AM = M\,\mathrm{diag}(P(1), P(\omega), \ldots, P(\omega^{n-1}))}$$

2. La matrice $M = \left((\omega^{i-1})^{j-1}\right)$ est la matrice de Vandermonde de 1, ω, …, ω^{n-1}, qui sont deux à deux distincts (chapitre 4). Par la proposition 12, $\det M \neq 0$. En prenant le déterminant de l'égalité de la question 1, on obtient $\det(A)\det(M) = \det(M)\prod_k P(\omega^k)$, et l'on simplifie par $\det M$.

$$\boxed{\det A = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)}$$

3. Pour $n = 3$, avec $(a_0, a_1, a_2) = (a, b, c)$, la règle de Sarrus donne

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc,$$

et, comme $\omega = j$, $j^2 = \overline{j}$ et $j^4 = j$, on a $P(1) = a + b + c$, $P(j) = a + bj + cj^2$, $P(j^2) = a + bj^2 + cj$.

$$\boxed{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj)}$$

À retenir. Les colonnes de M sont des vecteurs que A se contente de multiplier par un scalaire : dans la base qu'elles forment, A devient diagonale. Toutes les matrices circulantes d'ordre n sont ainsi diagonales dans une même base, ce qui explique aussi qu'elles commutent entre elles.

EXERCICE 48 ⋆⋆⋆

1. On note D_n le déterminant, et l'on raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 1$, $D_1 = \dfrac{1}{a_1 + b_1}$, et la formule est vraie avec des produits vides au numérateur. Soit $n \geqslant 2$.

Colonnes. L'opération $C_j \leftarrow C_j - C_n$, pour $j \leqslant n - 1$, remplace le coefficient (i, j) par

$$\frac{1}{a_i + b_j} - \frac{1}{a_i + b_n} = \frac{b_n - b_j}{(a_i + b_j)(a_i + b_n)}.$$

On factorise $b_n - b_j$ dans la colonne j, pour $j \leqslant n - 1$, et $\dfrac{1}{a_i + b_n}$ dans la ligne i, pour tout i : il reste la matrice E de coefficients $\dfrac{1}{a_i + b_j}$ pour $j \leqslant n - 1$ et 1 dans la dernière colonne.

Lignes. L'opération $L_i \leftarrow L_i - L_n$, pour $i \leqslant n - 1$, annule le dernier coefficient de la ligne i et remplace les autres par

$$\frac{1}{a_i + b_j} - \frac{1}{a_n + b_j} = \frac{a_n - a_i}{(a_i + b_j)(a_n + b_j)}.$$

On factorise $a_n - a_i$ dans la ligne i, pour $i \leqslant n - 1$, et $\dfrac{1}{a_n + b_j}$ dans la colonne j, pour $j \leqslant n - 1$. La matrice restante est triangulaire inférieure par blocs, de blocs diagonaux $\left(\dfrac{1}{a_i + b_j}\right)_{i,j \leqslant n-1}$ et (1). Par la proposition 11 (ii), via la transposition,

$$D_n = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(a_n - a_k)(b_n - b_k)}{\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_n)\prod_{j=1}^{n-1}(a_n + b_j)} D_{n-1}.$$

Le dénominateur contient une fois chaque facteur $a_i + b_j$ tel que $i = n$ ou $j = n$, et le numérateur chaque facteur $(a_j - a_i)(b_j - b_i)$ tel que $i < j = n$. Avec l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\boxed{\det\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \frac{\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n}(a_i + b_j)}}$$

2. On prend $a_i = i$ et $b_j = j - 1$: alors $a_i + b_j = i + j - 1 \geqslant 1$, et les a_i, comme les b_j, sont deux à deux distincts. Le numérateur est non nul, donc le déterminant aussi, et le théorème 6 (ii) conclut.

$$\boxed{\text{la matrice } \left(\frac{1}{i + j - 1}\right) \text{ est inversible, de déterminant strictement positif}}$$

On trouve par exemple $\dfrac{1}{12}$ pour $n = 2$ et $\dfrac{1}{2160}$ pour $n = 3$.

À retenir. La matrice $\left(\dfrac{1}{i + j - 1}\right)$ est la *matrice de Hilbert*. Son déterminant, inverse d'un entier, devient très vite minuscule ($\dfrac{1}{6\,048\,000}$ pour $n = 4$) : elle est inversible, mais un calcul numérique approché de son inverse est très instable.

EXERCICE 49 ⋆⋆⋆

1. Pour $n = 4$, on compte les diviseurs communs : par exemple, 2 et 4 ont deux diviseurs communs, 1 et 2, et 4 en a trois avec lui-même. La ligne i de L indique les diviseurs de i.

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

2. Le coefficient d'indice (i, j) de LL^T vaut $\sum_{k=1}^{n} \ell_{ik}\ell_{jk}$. Le produit $\ell_{ik}\ell_{jk}$ vaut 1 si k divise à la fois i et j, et 0 sinon : la somme compte les diviseurs communs à i et j compris entre 1 et n, c'est-à-dire tous, puisqu'un diviseur de i est au plus $i \leqslant n$.

$$\boxed{A = LL^T}$$

3. Si k divise i, alors $k \leqslant i$: la matrice L est triangulaire inférieure, et ses coefficients diagonaux valent 1, puisque i divise i. Donc $\det L = 1$, et, par le théorème 6 (i) et (iv), $\det A = \det(L)\det(L^T) = 1$.

$$\boxed{\det A = 1}$$

Pour $n = 4$, on vérifie par la méthode du pivot sur la matrice A ci-dessus : les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_1$, puis $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$, donnent une matrice triangulaire de diagonale $(1, 1, 1, 1)$. ✓
À retenir. La factorisation $A = LL^T$, avec L triangulaire de diagonale 1, rend le déterminant immédiat, alors que les coefficients de A semblent n'avoir aucune structure. Par la proposition 13, on en déduit aussi que A^{-1} est à coefficients entiers. C'est un résultat dû à H. J. S. Smith (1875).

Comatrice et formules de Cramer

EXERCICE 50 ⋆

On note A la matrice de f dans la base canonique ; ses colonnes sont les images des vecteurs de base, et ses lignes se lisent sur les trois coordonnées de $f(x, y, z)$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 6 & -7 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Par la proposition 9 (ii), $\det f = \det A$, que l'on calcule par la règle de Sarrus :

$$\det A = 0 + 18 + 7 - 6 - 0 - 5, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\det f = 14 \neq 0}$$

Par le théorème 5 (iii), f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$: il est bijectif.

2. On calcule les neuf cofacteurs $C_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, en lisant les signes sur le damier ; par exemple $C_{11} = (1)(-5) - (3)(-7) = 16$ et $C_{12} = -\big((-1)(-5) - (3)(6)\big) = 13$. On obtient

$$\boxed{\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} 16 & 13 & 1 \\ -2 & -6 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Par le théorème 8, la matrice de f^{-1} est $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\,\mathrm{Com}(A)^T$:

$$\boxed{\mathrm{Mat}(f^{-1}) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 16 & -2 & 2 \\ 13 & -6 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}}$$

On contrôle le produit de la première ligne de A par la première colonne de A^{-1} :

$$\frac{1}{14}(0\times 16+1\times 13+1\times 1)=1\ \checkmark$$

3. Le système $AX=B$, avec $B=(2,4,-2)$, est de Cramer. Par la proposition 14, $x=\dfrac{\det A_1}{14}$, où A_1 s'obtient en remplaçant la première colonne de A par B, et de même pour y et z. La règle de Sarrus donne

$$\det A_1=\begin{vmatrix}2&1&1\\4&1&3\\-2&-7&-5\end{vmatrix}=20,\qquad \det A_2=\begin{vmatrix}0&2&1\\-1&4&3\\6&-2&-5\end{vmatrix}=4,\qquad \det A_3=\begin{vmatrix}0&1&2\\-1&1&4\\6&-7&-2\end{vmatrix}=24,$$

d'où

$$\boxed{(x,y,z)=\Big(\frac{10}{7},\frac{2}{7},\frac{12}{7}\Big)}$$

La question précédente donne le même résultat :

$$A^{-1}B=\frac{1}{14}(32-8-4,\ 26-24+2,\ 2+24-2)=\frac{1}{14}(20,4,24)\ \checkmark$$

On vérifie enfin la première équation : $y+z=\dfrac{14}{7}=2\ \checkmark$.

À retenir. Les deux méthodes reviennent au même calcul : la formule de Cramer $x_i=\dfrac{\det A_i}{\det A}$ n'est autre que le développement de $\det A_i$ par rapport à sa i-ième colonne, c'est-à-dire la i-ième ligne de $\dfrac{1}{\det A}\operatorname{Com}(A)^T B$. Pour un système d'ordre 3, elles restent raisonnables ; au-delà, la méthode du pivot du chapitre 16 est bien plus économique.

EXERCICE 51 ⋆⋆

1. Le théorème 8 donne $A\operatorname{Com}(A)^T=\det(A)\,I_n$. On passe au déterminant, avec le théorème 6 (i) et (iv) :

$$\det(A)\det\big(\operatorname{Com}(A)\big)=\det\big(\det(A)\,I_n\big)=(\det A)^n.$$

Si A est inversible, on divise par $\det A\neq 0$. Si A n'est pas inversible, $\det A=0$, et il s'agit de montrer que $\operatorname{Com}(A)$ n'est pas inversible. Sinon, en multipliant à droite l'égalité $A\operatorname{Com}(A)^T=0$ par l'inverse de $\operatorname{Com}(A)^T$, on obtiendrait $A=0$, dont tous les mineurs sont nuls, puisque $n-1\geqslant 1$: on aurait $\operatorname{Com}(A)=0$, ce qui est absurde.

$$\boxed{\det\big(\operatorname{Com}(A)\big)=(\det A)^{n-1}}$$

Piège. Le cas non inversible ne se déduit pas du premier par division, puisqu'on ne peut pas diviser par $\det A=0$. Il faut un argument propre, et c'est là que sert l'hypothèse $n\geqslant 2$: elle garantit que $\operatorname{Com}(0)=0$.

2. Si $\operatorname{rg}A=n$, alors $\det A\neq 0$, donc $\det\operatorname{Com}(A)\neq 0$ par la question 1 : $\operatorname{Com}(A)$ est inversible, de rang n. Si $\operatorname{rg}A\leqslant n-2$, chaque mineur Δ_{ij} est le déterminant d'une matrice carrée d'ordre $n-1$ extraite de A. Par le théorème 7 du chapitre 16, son rang est au plus $\operatorname{rg}A<n-1$: elle n'est pas inversible, et $\Delta_{ij}=0$ par le théorème 6 (ii).

$$\boxed{\operatorname{rg}A=n\implies \operatorname{rg}\operatorname{Com}(A)=n,\qquad \operatorname{rg}A\leqslant n-2\implies \operatorname{Com}(A)=0}$$

3. Si $\operatorname{rg}A=n-1$, le théorème 7 du chapitre 16 fournit une matrice carrée inversible d'ordre $n-1$ extraite de A. Elle s'obtient en supprimant une ligne i et une colonne j, donc son déterminant est $\Delta_{ij}\neq 0$, et $C_{ij}\neq 0$: $\operatorname{Com}(A)\neq 0$.

Comme $\det A=0$, le théorème 8 donne $A\operatorname{Com}(A)^T=0$: chaque colonne de $\operatorname{Com}(A)^T$ appartient à $\operatorname{Ker}A$, donc $\operatorname{Im}\operatorname{Com}(A)^T\subset\operatorname{Ker}A$. Par le théorème du rang, $\dim\operatorname{Ker}A=n-(n-1)=1$. Ainsi

$\mathrm{rg}\mathrm{Com}(A)^T \leqslant 1$, et ce rang vaut au moins 1 puisque $\mathrm{Com}(A) \neq 0$. Le rang d'une matrice est celui de sa transposée (théorème 6 du chapitre 16).

$$\boxed{\mathrm{rg}A = n-1 \implies \mathrm{rg}\,\mathrm{Com}(A) = 1}$$

4. Soit A une solution. Si $\mathrm{rg}A = n-1$, on aurait $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}\,\mathrm{Com}(A) = 1$, donc $n = 2$, exclu. Si $\mathrm{rg}A \leqslant n-2$, alors $A = \mathrm{Com}(A) = 0$. Il reste le cas $\mathrm{rg}A = n$. Le théorème 8 s'écrit alors $AA^T = \det(A)\, I_n$. Le coefficient diagonal d'indice (i,i) de AA^T est $\sum_j a_{ij}^2$, strictement positif puisque la i-ième ligne de la matrice inversible A n'est pas nulle : donc $\det A > 0$. En passant au déterminant, $(\det A)^2 = (\det A)^n$, soit $(\det A)^{n-2} = 1$, et, comme $\det A > 0$, $\det A = 1$. Ainsi $AA^T = I_n$ et $\det A = 1$.

Réciproquement, supposons $AA^T = I_n$ et $\det A = 1$. Alors $A^{-1} = A^T$, et le théorème 8 donne

$$\mathrm{Com}(A)^T = \det(A)\, A^{-1} = A^T, \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{Com}(A) = A.$$

La matrice nulle est aussi solution.

$$\boxed{\mathrm{Com}(A) = A \iff A = 0 \quad \text{ou} \quad \left(AA^T = I_n \text{ et } \det A = 1\right)}$$

Pour $n = 3$, la matrice I_3 est solution, ainsi que, pour tout réel θ, la matrice dont les colonnes sont $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$, $(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$ et $(0,0,1)$: c'est la matrice de la rotation d'angle θ autour de l'axe $\mathbb{R}e_3$. En revanche, $\mathrm{diag}(1,1,-1)$ vérifie $AA^T = I_3$ mais a pour comatrice son opposée.

À retenir. Le rang de la comatrice ne prend que trois valeurs, n, 1 ou 0, selon que $\mathrm{rg}A$ vaut n, $n-1$ ou moins. Les solutions inversibles de la dernière question sont les matrices que le chapitre 19 appellera orthogonales de déterminant 1 : ce sont les matrices des rotations.

EXERCICE 52 ⋆⋆

On note C_1, …, C_n les colonnes de A, U la colonne dont tous les coefficients valent 1, et C_{ij} les cofacteurs de A ; les colonnes de B sont les $C_j - U$. On développe $\det(C_1 - U, \ldots, C_n - U)$ par linéarité par rapport à chaque colonne (proposition 9 (i)) : on obtient 2^n termes, selon que l'on prend C_j ou $-U$ à chaque place. Tout terme où U apparaît au moins deux fois est nul, car il a deux colonnes égales. Il reste

$$\det B = \det A - \sum_{j=1}^{n} \det A_j,$$

où A_j est la matrice A dans laquelle la j-ième colonne est remplacée par U. Le développement de $\det A_j$ par rapport à sa j-ième colonne (théorème 7 (i)) fait intervenir les cofacteurs de A d'indices (i,j), qui ne dépendent pas de cette colonne :

$$\det A_j = \sum_{i=1}^{n} 1 \times C_{ij}, \qquad \text{donc} \qquad \det B = \det A - \sum_{i,j} C_{ij}.$$

Par le théorème 8, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\mathrm{Com}(A)^T$, dont les coefficients sont les $\dfrac{C_{ji}}{\det A}$. La somme de ces coefficients est donc

$$\alpha = \frac{1}{\det A}\sum_{i,j} C_{ij}, \qquad \text{soit} \qquad \sum_{i,j} C_{ij} = \alpha \det A.$$

$$\boxed{\det(A - J) = (1-\alpha)\det A}$$

Par exemple, pour $A = 2I_2$, on trouve $A^{-1} = \dfrac{1}{2}I_2$, $\alpha = 1$, et en effet $A - J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est de déterminant nul ✓.

À retenir. L'égalité $\det(A - J) = \det A - \sum_{i,j} C_{ij}$ vaut pour toute matrice A, inversible ou non : la multilinéarité ramène une perturbation de rang 1 à un calcul de cofacteurs. C'est le même mécanisme qu'à l'exercice 40, où $\det(A + xJ)$ est affine en x.

EXERCICE 53 ⋆⋆

Les déterminants de A et B sont des entiers, par la formule qui définit le déterminant. Comme ils sont premiers entre eux, le théorème de Bézout (théorème 4 du chapitre 12) fournit deux entiers u et v tels que $u\det A + v\det B = 1$. Les cofacteurs de A et B sont des déterminants de matrices à coefficients entiers : $\mathrm{Com}(A)$ et $\mathrm{Com}(B)$ sont à coefficients entiers. On pose

$$U = u\,\mathrm{Com}(A)^T, \qquad V = v\,\mathrm{Com}(B)^T,$$

qui appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Par le théorème 8,

$$AU + BV = u\det(A)\,I_n + v\det(B)\,I_n = I_n.$$

$$\boxed{U = u\,\mathrm{Com}(A)^T, \quad V = v\,\mathrm{Com}(B)^T, \quad \text{où } u\det A + v\det B = 1}$$

Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ont pour déterminants 5 et 3, avec $2\times 5 - 3\times 3 = 1$; les matrices $U = 2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $V = -3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ vérifient $AU + BV = I_2$ ✓.

À retenir. La relation $A\,\mathrm{Com}(A)^T = \det(A)\,I_n$ ramène une question sur les matrices à une question sur les entiers $\det A$ et $\det B$. C'est la version matricielle de la relation de Bézout, que l'on retrouve avec $n = 1$.

EXERCICE 54 ⋆⋆⋆

1. Pour M inversible, le théorème 8 donne $\mathrm{Com}(M)^T = \det(M)\,M^{-1}$, donc, en transposant, $\mathrm{Com}(M) = \det(M)\,(M^{-1})^T$. Pour A, B inversibles, AB l'est, d'inverse $B^{-1}A^{-1}$, et la transposée d'un produit est le produit des transposées dans l'ordre inverse (proposition 5 du chapitre 16) :

$$\mathrm{Com}(AB) = \det(A)\det(B)\,(B^{-1}A^{-1})^T = \det(A)\,(A^{-1})^T\,\det(B)\,(B^{-1})^T = \mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B).$$

$$\boxed{\forall A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \quad \mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B)}$$

2. Les coefficients de $tI_n - M$ sont $t\delta_{ij} - m_{ij}$, où δ_{ij} vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. Par définition,

$$\det(tI_n - M) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} (t\delta_{\sigma(j)j} - m_{\sigma(j)j}).$$

Chaque terme est un polynôme en t, dont le degré est au plus le nombre de points fixes de σ. Pour $\sigma = \mathrm{id}$, c'est $\prod_j (t - m_{jj})$, unitaire de degré n. Une permutation $\sigma \neq \mathrm{id}$ déplace au moins deux éléments, puisqu'un élément déplacé est envoyé sur un autre élément déplacé : le terme associé est de degré au plus $n-2$. La somme est donc une fonction polynomiale unitaire de degré n, associée à un polynôme $\chi_M \in \mathbb{C}[X]$ non nul.

Comme $\det(M - tI_n) = (-1)^n\chi_M(t)$, la matrice $M - tI_n$ est inversible (théorème 6 (ii)) sauf si t est racine de χ_M, ce qui arrive pour au plus n valeurs (théorème 3 du chapitre 13).

$$\boxed{\det(tI_n - M) = \chi_M(t),\ \chi_M \text{ unitaire de degré } n; \quad M - tI_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ si } \chi_M(t) \neq 0}$$

3. Soit A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et F l'ensemble, de cardinal au plus $2n$, des t tels que $A - tI_n$ ou $B - tI_n$ ne soit pas inversible. Pour $t \notin F$, la question 1 donne

$$\mathrm{Com}\left((A - tI_n)(B - tI_n)\right) = \mathrm{Com}(A - tI_n)\,\mathrm{Com}(B - tI_n).$$

Les coefficients de $A - tI_n$, $B - tI_n$ et de leur produit sont des polynômes en t. Un cofacteur est un déterminant d'ordre $n-1$ de tels coefficients, donc, par la formule qui définit le déterminant, une somme de produits de polynômes en t : c'est encore un polynôme en t. Ainsi, pour chaque (i, j), il

existe deux polynômes P_{ij} et Q_{ij} de $\mathbb{C}[X]$ tels que les coefficients d'indice (i,j) des deux membres soient $P_{ij}(t)$ et $Q_{ij}(t)$. Le polynôme $P_{ij}-Q_{ij}$ s'annule sur l'ensemble infini $\mathbb{C}\setminus F$: il est nul (théorème 3 du chapitre 13). En particulier $P_{ij}(0)=Q_{ij}(0)$ pour tous i, j.

$$\boxed{\forall A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\quad \mathrm{Com}(AB)=\mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B)}$$

À retenir. C'est un argument de prolongement : une identité polynomiale vraie pour les matrices inversibles s'étend à toutes les matrices, en remplaçant A par $A-tI_n$, inversible pour presque tout t. Le polynôme χ_M reviendra en deuxième année sous le nom de polynôme caractéristique.

EXERCICE 55 ⋆⋆⋆

1. Pour tout i, $P(x_i)=\sum_{j=0}^{n}a_jx_i^j$ est le produit de la ligne $(1,x_i,\dots,x_i^n)$ par la colonne des a_j. On pose donc

$$\boxed{M=(x_i^j)_{0\leqslant i,j\leqslant n}=\begin{pmatrix}1&x_0&\cdots&x_0^n\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 1&x_n&\cdots&x_n^n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{Z})}$$

C'est la matrice de Vandermonde de la proposition 12, à coefficients entiers puisque les x_i le sont.

2. Par la proposition 12, $V=\det M=\prod_{i<j}(x_j-x_i)$ est un entier non nul, les x_i étant distincts. La comatrice de M est à coefficients entiers, et le théorème 8 donne

$$\begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix}P(x_0)\\ \vdots\\ P(x_n)\end{pmatrix}=\frac{1}{V}\,\mathrm{Com}(M)^T\begin{pmatrix}P(x_0)\\ \vdots\\ P(x_n)\end{pmatrix}.$$

Si les $P(x_i)$ sont entiers, chaque Va_j est une somme de produits d'entiers : $VP\in\mathbb{Z}[X]$. L'entier $d=|V|\geqslant 1$ convient.

$$\boxed{d=\Big|\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\Big|\ \text{convient}}$$

Pour $(x_0,x_1,x_2)=(0,1,3)$, on trouve $V=(1-0)(3-0)(3-1)=6$.

$$\boxed{n=2,\ (0,1,3):\quad d=6\ \text{convient}}$$

On ne peut pas faire mieux : le polynôme $P=\dfrac{X(X-1)}{6}$ prend les valeurs entières 0, 0, 1 en 0, 1, 3, et $dP\in\mathbb{Z}[X]$ exige que 6 divise d.

3. Non. Pour tout réel c, le polynôme $P=c(X-x_0)(X-x_1)\cdots(X-x_n)$ appartient à $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ et s'annule en tous les x_i : ses valeurs sont entières. Mais son coefficient dominant est c, et, pour $c=\sqrt{2}$ par exemple, dc n'est entier pour aucun entier $d\geqslant 1$.

$$\boxed{\text{le résultat devient faux dans } \mathbb{R}_{n+1}[X]}$$

Piège. L'argument repose sur l'inversibilité de M, qui est carrée : $n+1$ conditions pour $n+1$ coefficients. Avec un coefficient de plus, l'application $P\mapsto(P(x_0),\dots,P(x_n))$ n'est plus injective, et son noyau, la droite engendrée par $\prod_i(X-x_i)$, contient des polynômes à coefficients aussi peu entiers que l'on veut.

EXERCICE 56 ⋆⋆⋆

On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ et, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = \det(A + tB) = (a + ta')(d + td') - (b + tb')(c + tc').$$

C'est une fonction polynomiale de degré au plus 2, associée à un polynôme $\Phi \in \mathbb{Z}[X]$.

Pour $k \in [\![0\,;4]\!]$, la matrice $A + kB$ est à coefficients entiers, inversible et d'inverse à coefficients entiers : par la proposition 13, $\varphi(k) \in \{-1, 1\}$. Les cinq valeurs $\varphi(0)$, …, $\varphi(4)$ sont prises dans un ensemble à deux éléments : l'une des deux valeurs, notée ε, est prise au moins trois fois. Le polynôme $\Phi - \varepsilon$, de degré au plus 2, a alors au moins trois racines : il est nul (théorème 3 du chapitre 13). Ainsi φ est constante, égale à ε, et $\det(A + 5B) = \varepsilon = \pm 1$. La matrice $A + 5B$ est à coefficients entiers, et la proposition 13 conclut.

$$\boxed{\det(A + tB) = \pm 1 \text{ pour tout } t, \quad \text{donc } A + 5B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \text{ et } (A + 5B)^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})}$$

Le même argument montre que $A + kB$ est inversible d'inverse entier pour tout entier k. Ainsi, pour $A = I_2$ et $B = E_{12}$, on a $\det(A + tB) = 1$ pour tout t.

Piège. Trois valeurs de k ne suffiraient pas : un polynôme de degré 2 peut prendre les valeurs 1, −1, 1 en trois points. C'est le principe des tiroirs, appliqué à cinq valeurs dans deux tiroirs, qui fournit trois points où φ prend la même valeur.

Exercices de synthèse

EXERCICE 57 ⋆⋆

1. Vrai. Par la proposition 3, il suffit d'écrire toute transposition $(a\ b)$, avec $a < b$, comme produit de transpositions de la forme $(k\ \ k+1)$. On raisonne par récurrence sur $b - a$: si $b = a + 1$, il n'y a rien à faire, et sinon la formule de conjugaison de l'exercice 8 donne

$$(a\ b) = (b-1\ \ b)(a\ \ b-1)(b-1\ \ b),$$

où $(a\ \ b-1)$ relève de l'hypothèse de récurrence. C'est l'exercice 9, question 2.

2. Faux. Par la proposition 5 (ii), un cycle de longueur p a pour signature $(-1)^{p-1}$. Une transposition, cycle de longueur 2, a pour signature -1 et non $(-1)^2 = 1$.

3. Vrai. Par le théorème 2 (i), $\varepsilon(\sigma)^k = \varepsilon(\sigma^k) = \varepsilon(\mathrm{id}) = 1$. Comme $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$ et que k est impair, $\varepsilon(\sigma)^k = \varepsilon(\sigma)$, donc $\varepsilon(\sigma) = 1$.

4. Faux. Par le théorème 6 (i), $\det(-A) = (-1)^n \det A$. Pour $A = I_2$, on a $\det(-I_2) = 1 \neq -1$.

5. Vrai. Par le théorème 6 (i) et (iv), $\det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = (\det A)^2 \geqslant 0$.

6. Faux. La matrice de lignes $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ et $(1, 1, 2)$ n'a aucune ligne nulle, et ses lignes sont deux à deux non proportionnelles. Pourtant $L_3 = L_1 + L_2$: ses lignes sont liées, et son déterminant est nul par la proposition 6 (iii), appliquée aux lignes grâce au théorème 6 (iv).

7. Vrai. Si $A^T = -A$, le théorème 6 donne $\det A = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$, donc $\det A = 0$. C'est le deuxième exemple qui suit le théorème 6, pour $n = 3$.

8. Faux. Avec $n = 2$, $A = D = 0$ et $B = C = I_2$, la matrice par blocs est la matrice d'ordre 4 de colonnes e_3, e_4, e_1, e_2. Les échanges $C_1 \leftrightarrow C_3$ et $C_2 \leftrightarrow C_4$ la ramènent à I_4 : son déterminant vaut $(-1)^2 = 1$ (proposition 10 (iii)), alors que la formule proposée donne $0 - 1 = -1$. La seule formule générale du cours est celle des matrices triangulaires par blocs (proposition 11 (ii)).

9. Vrai. La j-ième colonne de P_σ est $e_{\sigma(j)}$. Dans la formule $\det P_\sigma = \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\rho) \prod_j p_{\rho(j)j}$, le produit vaut 1 si $\rho(j) = \sigma(j)$ pour tout j, et 0 sinon. Seul le terme $\rho = \sigma$ subsiste : $\det P_\sigma = \varepsilon(\sigma)$.

10. Vrai. On calcule f^2 pour $f = (1\ 3\ 2\ 4)$: $1 \mapsto 3 \mapsto 2$, $2 \mapsto 4 \mapsto 1$, $3 \mapsto 2 \mapsto 4$, $4 \mapsto 1 \mapsto 3$.

$$\boxed{(1\ 3\ 2\ 4)^2 = (1\ 2)(3\ 4)}$$

C'est la question 2 de l'exercice 11 : le carré d'un 4-cycle se scinde en deux transpositions.

$$\boxed{\text{Vrai : } 1,3,5,7,9,10; \qquad \text{Faux : } 2,4,6,8}$$

Piège. Les assertions fausses 2, 4 et 8 proviennent toutes d'une analogie trompeuse : avec les longueurs de cycles, avec le cas $n = 1$, ou avec la formule $ad - bc$ d'ordre 2. L'assertion 6 rappelle que le déterminant détecte toutes les relations de liaison, et pas seulement les proportionnalités.

EXERCICE 58 ⋆⋆

1. Soit σ la configuration avant le coup, et k le jeton déplacé. Le jeton k prend la place de la case vide, et la case vide celle du jeton k ; les autres jetons ne bougent pas. La nouvelle configuration σ' vérifie donc $\sigma'(k) = \sigma(9)$, $\sigma'(9) = \sigma(k)$, et $\sigma'(\ell) = \sigma(\ell)$ pour les autres ℓ. Soit $\tau = (\sigma(k) \;\; \sigma(9))$ la transposition qui échange les numéros des deux cases concernées. Alors $\tau\sigma(k) = \sigma(9)$, $\tau\sigma(9) = \sigma(k)$, et $\tau\sigma(\ell) = \sigma(\ell)$ pour $\ell \notin \{k, 9\}$, puisque $\sigma(\ell)$ n'est alors aucune des deux cases échangées.

$$\boxed{\sigma' = \tau\sigma, \qquad \tau = (\sigma(k) \;\; \sigma(9))}$$

2. La case 9 étant blanche, les cases blanches sont 1, 3, 5, 7, 9, et les noires 2, 4, 6, 8. Deux cases voisines horizontalement ou verticalement sont de couleurs différentes : à chaque coup, la case vide change de couleur. Partant de la case 9, blanche, la case vide est blanche après m coups si et seulement si elle a changé de couleur un nombre pair de fois.

$$\boxed{\text{après } m \text{ coups, la case vide est blanche} \iff m \text{ est pair}}$$

3. Par la question 1, après m coups, $\sigma = \tau_m \cdots \tau_1$, produit de m transpositions, donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^m$ par la proposition 5 (i). La question 2 relie la parité de m à la couleur de la case vide, qui ne dépend que de la configuration et non du chemin suivi pour l'atteindre.

$$\boxed{\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si la case vide est blanche} \\ -1 & \text{si elle est noire} \end{cases}}$$

Si la case vide est revenue en case 9, alors $\sigma(9) = 9$, et σ est une permutation des huit jetons, de signature 1 : elle est paire.

4. On lit sur la figure la case occupée par chaque jeton : $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 5$, $\sigma(4) = 8$, $\sigma(5) = 9$, $\sigma(6) = 7$, $\sigma(7) = 6$, $\sigma(8) = 4$, et la case vide $\sigma(9) = 3$. La décomposition en cycles à supports disjoints (théorème 1) est

$$\sigma = (1\ 2)(3\ 5\ 9)(4\ 8)(6\ 7), \qquad \varepsilon(\sigma) = (-1)^{1+2+1+1} = -1.$$

Or la case vide de $\mathcal{C}$ est la case 3, qui est blanche : par la question 3, une configuration accessible devrait avoir pour signature 1.

$$\boxed{\text{la configuration } \mathcal{C} \text{ n'est pas accessible}}$$

Un parcours exhaustif par ordinateur confirme que les configurations accessibles sont au nombre de $181\,440 = \dfrac{9!}{2}$, et que $\mathcal{C}$ n'en fait pas partie.

À retenir. La signature est un *invariant* : une quantité que chaque coup modifie de façon prévisible. Elle prouve une impossibilité sans explorer les coups possibles. Le célèbre défi de Sam Loyd, qui demandait d'échanger les jetons 14 et 15 du taquin 4×4, est impossible pour la même raison.

EXERCICE 59 ⋆⋆⋆

1. Par définition, $\det A = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) \prod_j a_{\sigma(j)j}$. Si σ a un point fixe j, le facteur a_{jj} est nul ; sinon, tous les facteurs valent ± 1, et le terme vaut ± 1. Donc $\det A$ est un entier, somme de d termes égaux à ± 1, où d est le nombre de permutations sans point fixe de $\mathfrak{S}_{2n}$. Comme $-1 \equiv 1 \pmod 2$, cet entier a la parité de d. Le même raisonnement s'applique à $J - I_{2n}$, qui est une matrice du même type.

$$\boxed{\det A \equiv d \equiv \det(J - I_{2n}) \pmod 2}$$

2. On applique la question 4 de l'exercice 40, avec $a = 0$, $b = 1$ et l'ordre $2n$:

$$\det(J - I_{2n}) = (0 + (2n-1))(0-1)^{2n-1}, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\det(J - I_{2n}) = -(2n-1)}$$

Ce nombre est impair, donc $\det A$ l'est aussi par la question 1 : il n'est pas nul, et A est inversible.

3. Fixons i. Lorsqu'on retire le caillou i, on répartit les $2n$ autres en deux tas T_1 et T_2 de n cailloux, de même masse. On pose $\varepsilon_{ii} = 0$, $\varepsilon_{ij} = 1$ si $j \in T_1$ et $\varepsilon_{ij} = -1$ si $j \in T_2$. L'égalité des masses s'écrit

$$\sum_{j \in T_1} m_j - \sum_{j \in T_2} m_j = \sum_{j=1}^{2n+1} \varepsilon_{ij} m_j = 0.$$

$$\boxed{M = (\varepsilon_{ij}) \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R}) : \quad \varepsilon_{ii} = 0, \quad \varepsilon_{ij} = \pm 1 \ (i \neq j), \quad MX = 0}$$

4. La matrice obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de M est du type de la question 1, d'ordre $2n$: elle est inversible. Par le théorème 7 du chapitre 16, $\mathrm{rg} M \geqslant 2n$. Par ailleurs, chaque ligne de M contient n coefficients égaux à 1 et n égaux à -1, puisque les deux tas ont n cailloux : la colonne U dont tous les coefficients valent 1 vérifie $MU = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} M \neq \{0\}$, et $\mathrm{rg} M \leqslant 2n$.

$$\boxed{\mathrm{rg} M = 2n}$$

Par le théorème 9 du chapitre 16, $\operatorname{Ker} M$ est de dimension $(2n+1) - 2n = 1$: c'est la droite engendrée par U. Comme $X \in \operatorname{Ker} M$, il existe λ tel que $X = \lambda U$.

$$\boxed{m_1 = m_2 = \cdots = m_{2n+1}}$$

À retenir. Deux idées se combinent : une information de parité suffit à prouver qu'un déterminant n'est pas nul, et le rang transforme cette information en la description complète du noyau. On n'a jamais eu besoin de connaître les répartitions en tas.

EXERCICE 60 ⋆⋆⋆

1. La question 3 de l'exercice 40, appliquée avec $\alpha_i = r_i$ et $a = b = 1$, donne le déterminant de cette matrice :

$$\Delta = \prod_{i=1}^{n} (r_i - 1) + \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (r_j - 1).$$

Tous les facteurs $r_j - 1$ sont strictement positifs : $\Delta > 0$.

$$\boxed{\Delta > 0, \quad \text{la matrice est inversible}}$$

2. Le coefficient d'indice (i,j) de NN^T est $\sum_{k=1}^{m} N_{ik} N_{jk}$: c'est le nombre de droites D_k qui contiennent à la fois P_i et P_j. Pour $i = j$, c'est le nombre r_i de droites D_k qui passent par P_i. Pour $i \neq j$, les points distincts P_i et P_j appartiennent à une unique droite, qui est déterminée par les points puisqu'elle en contient deux : ce coefficient vaut 1.

$$\boxed{\left(NN^T\right)_{ii} = r_i = \text{nombre de droites } D_k \text{ passant par } P_i, \qquad \left(NN^T\right)_{ij} = 1 \ (i \neq j)}$$

3. Soit i fixé, et $j \neq i$, qui existe car $n \geqslant 3$. La droite (P_iP_j) est l'une des D_k. Les points n'étant pas tous alignés, il existe P_ℓ hors de cette droite, et la droite (P_iP_ℓ) est une autre des D_k, distincte de la première, qui passe aussi par P_i.

$$\boxed{r_i \geqslant 2 \quad \text{pour tout } i}$$

4. Par les questions 1 à 3, NN^T est une matrice d'ordre n inversible, de rang n. Le rang d'un produit est au plus le rang de chaque facteur (proposition 7 du chapitre 15), et le rang de $N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est au plus son nombre m de colonnes :

$$n = \mathrm{rg}(NN^T) \leqslant \mathrm{rg}N \leqslant m. \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{m \geqslant n}$$

L'égalité est atteinte avec $n-1$ points $P_1, \ldots, P_{n-1}$ sur une droite D et un point P_n hors de D. Les droites déterminées sont D et les $n-1$ droites (P_nP_i), qui sont distinctes : une droite qui contiendrait P_n et deux points de D serait D. On a bien $m = 1 + (n-1) = n$. Pour $n = 3$, ce sont les trois côtés d'un triangle.
À retenir. Le théorème de De Bruijn et Erdős est un énoncé de géométrie élémentaire, démontré ici par un argument de rang : la matrice N « contient » n dimensions, et il lui faut donc au moins n colonnes. Une preuve purement géométrique existe, mais elle est nettement plus délicate.

EXERCICE 61 ⋆⋆⋆

1. L'égalité $B = PAP^{-1}$ équivaut à $BP = PA$, soit $BR + \mathrm{i}BS = RA + \mathrm{i}SA$. Les matrices A, B, R, S étant réelles, les matrices BR, BS, RA, SA le sont aussi, et l'on identifie parties réelles et parties imaginaires, coefficient par coefficient.

$$\boxed{BR = RA \qquad \text{et} \qquad BS = SA}$$

2. Les coefficients de $R + tS$ sont des polynômes de degré au plus 1 en t. Par la formule qui définit le déterminant, $\det(R + tS)$ est une somme de produits de tels coefficients : c'est une fonction polynomiale de t, de degré au plus n, associée à un polynôme $\Pi \in \mathbb{C}[X]$. Pour $t = \mathrm{i}$, on trouve $\Pi(\mathrm{i}) = \det(R + \mathrm{i}S) = \det P \neq 0$, puisque P est inversible.

$$\boxed{t \mapsto \det(R + tS) \text{ est polynomiale, et } \Pi(\mathrm{i}) = \det P \neq 0}$$

3. Le polynôme Π n'est pas nul : il a au plus n racines (théorème 3 du chapitre 13). Comme $\mathbb{R}$ est infini, il existe un réel t_0 qui n'en est pas une. La matrice $Q = R + t_0S$ est réelle et $\det Q \neq 0$: $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Par la question 1, $BQ = BR + t_0BS = RA + t_0SA = QA$, et donc $B = QAQ^{-1}$.

$$\boxed{Q = R + t_0S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad B = QAQ^{-1}}$$

Piège. Ni R ni S ne sont inversibles en général, de sorte que les égalités $BR = RA$ et $BS = SA$ ne permettent pas de conclure directement. Par exemple, pour $A = B = I_2$ et $P = \mathrm{i}I_2$, on a $R = 0$. C'est le passage par le polynôme $\det(R+tS)$, non nul car il ne s'annule pas en i, qui fournit une combinaison réelle inversible.

Les quatre derniers exercices sont des problèmes en autonomie ; le corrigé commence par l'idée directrice.

EXERCICE 62 ⋆⋆⋆⋆

Idée. On raisonne par récurrence sur n. On découpe $\mathfrak{S}_n$ en n blocs selon la position de la valeur n ; chaque bloc est une copie de $\mathfrak{S}_{n-1}$, que l'on parcourt grâce à l'hypothèse de récurrence, et l'on passe d'un bloc à un autre en échangeant la valeur n avec une autre valeur.

La réponse est oui, pour tout $n \geqslant 2$. Rappelons que multiplier σ à gauche par $\tau = (a\ b)$ échange les valeurs a et b dans la suite $\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$. Appelons *chaîne* de $\mathfrak{S}_n$ une suite $(\sigma_0, \ldots, \sigma_{n!-1})$ contenant chaque élément de $\mathfrak{S}_n$ exactement une fois, avec $\sigma_0 = \mathrm{id}$ et, pour tout $k \geqslant 1$, $\sigma_k = \tau_k \sigma_{k-1}$ pour une transposition τ_k. Il s'agit de montrer qu'il existe une chaîne.

Initialisation. Pour $n = 2$, la suite $(\mathrm{id}, (1\ 2))$ est une chaîne.

Hérédité. Soit $n \geqslant 3$, et $(\rho_0, \ldots, \rho_N)$, avec $N = (n-1)! - 1$, une chaîne de $\mathfrak{S}_{n-1}$; on voit chaque ρ_k comme un élément de $\mathfrak{S}_n$ qui fixe n, et l'on écrit $\rho_k = \tau_k \rho_{k-1}$, où chaque τ_k fixe n.

— *Les blocs.* Pour $p \in [\![1\,;n]\!]$, soit $\mathcal{B}_p$ l'ensemble des $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telles que $\sigma(p) = n$. Si $g \in \mathcal{B}_p$, l'application $\rho \mapsto \rho g$ est une bijection de $\mathfrak{S}_{n-1}$ sur $\mathcal{B}_p$: on a bien $\rho g(p) = \rho(n) = n$, et la réciproque est $\sigma \mapsto \sigma g^{-1}$, qui envoie $\mathcal{B}_p$ dans les permutations fixant n. La suite $(\rho_0 g, \ldots, \rho_N g)$ parcourt donc $\mathcal{B}_p$ exactement une fois, à partir de g, et $\rho_k g = \tau_k(\rho_{k-1} g)$: on passe toujours d'un terme au suivant par une transposition.

— *Le passage d'un bloc à l'autre.* Si $e \in \mathcal{B}_p$ et $q \neq p$, soit $x = e(q) \neq n$. Alors $(x\ n)e$ envoie q sur n : elle appartient à $\mathcal{B}_q$.

On parcourt successivement les blocs $\mathcal{B}_n$, $\mathcal{B}_{n-1}$, …, $\mathcal{B}_1$. On commence par $\mathcal{B}_n$ avec $g_n = \mathrm{id}$, ce qui fournit les permutations ρ_0, …, ρ_N. Si le parcours de $\mathcal{B}_p$ s'est achevé en $e_p = \rho_N g_p$, on passe à $g_{p-1} = (e_p(p-1)\ \ n)e_p \in \mathcal{B}_{p-1}$, puis on parcourt $\mathcal{B}_{p-1}$ à partir de g_{p-1}. Les blocs étant disjoints et de réunion $\mathfrak{S}_n$, on obtient $n \times (n-1)! = n!$ permutations distinctes : c'est une chaîne de $\mathfrak{S}_n$.

oui, pour tout $n \geqslant 2$: une telle suite $(\tau_1, \ldots, \tau_{n!-1})$ existe

Pour $n = 3$, la construction donne id, (1 2) dans $\mathcal{B}_3$, puis (1 2 3), (2 3) dans $\mathcal{B}_2$, puis (1 3 2), (1 3) dans $\mathcal{B}_1$, en échangeant successivement les valeurs 1 et 2, 1 et 3, 1 et 2, 1 et 3, 1 et 2. Un programme qui suit cette construction en vérifie la validité jusqu'à $n = 6$.

À retenir. Les signatures de deux termes consécutifs sont opposées : une telle énumération alterne permutations paires et impaires, ce qui est cohérent avec le fait qu'il y en a autant de chaque sorte. Un algorithme classique, dit de Steinhaus, Johnson et Trotter, réalise même une énumération dans laquelle chaque transposition échange deux positions voisines.

EXERCICE 63 ⋆⋆⋆⋆

Idée. On note $P_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} X^{\omega(\sigma)}$, et l'on relie $\mathfrak{S}_n$ à $\mathfrak{S}_{n-1}$ en retirant l'élément n de son cycle. Si n est fixe, on perd une orbite ; sinon, le nombre d'orbites ne change pas, et il y a $n-1$ façons de réinsérer n. Cela donne $P_n = (X + n - 1)P_{n-1}$.

Soit $n \geqslant 2$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

— Si $\sigma(n) = n$, la restriction σ' de σ à $[\![1\,;n-1]\!]$ est une permutation, et $\omega(\sigma) = \omega(\sigma') + 1$, l'orbite $\{n\}$ disparaissant. Réciproquement, toute $\sigma' \in \mathfrak{S}_{n-1}$ se prolonge de façon unique en une telle σ.

— Si $\sigma(n) \neq n$, on pose $i = \sigma^{-1}(n) \in [\![1\,;n-1]\!]$, et l'on définit σ' sur $[\![1\,;n-1]\!]$ par $\sigma'(i) = \sigma(n)$ et $\sigma'(k) = \sigma(k)$ pour $k \neq i$. Comme σ envoie $[\![1\,;n-1]\!] \setminus \{i\}$ sur $[\![1\,;n]\!] \setminus \{n, \sigma(n)\}$, la fonction σ' est une permutation de $[\![1\,;n-1]\!]$. On a simplement retiré n de son cycle $(\ldots\ i\ n\ \sigma(n)\ \ldots)$, qui devient $(\ldots\ i\ \sigma(n)\ \ldots)$, réduit au point fixe i si c'était une transposition : $\omega(\sigma') = \omega(\sigma)$. Réciproquement, le couple $(\sigma', i) \in \mathfrak{S}_{n-1} \times [\![1\,;n-1]\!]$ détermine σ, par $\sigma(i) = n$, $\sigma(n) = \sigma'(i)$, et $\sigma(k) = \sigma'(k)$ pour les autres k.

On a ainsi une bijection entre $\mathfrak{S}_n$ et la réunion disjointe de $\mathfrak{S}_{n-1}$ (premier cas) et de $\mathfrak{S}_{n-1} \times [\![1\,;n-1]\!]$ (second cas). En regroupant les termes de P_n selon ces deux cas,

$$P_n = \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_{n-1}} X^{\omega(\sigma')+1} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_{n-1}} X^{\omega(\sigma')} = XP_{n-1} + (n-1)P_{n-1}.$$

Comme $P_1 = X$, une récurrence immédiate donne la factorisation, déjà en facteurs de degré 1.

$$\boxed{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} X^{\omega(\sigma)} = X(X+1)(X+2)\cdots(X+n-1)}$$

Pour $n = 3$, on retrouve $X^3 + 3X^2 + 2X$: l'identité, trois transpositions, deux 3-cycles ✓. Un calcul exhaustif confirme la formule jusqu'à $n = 6$.
À retenir. En $X = 1$, on retrouve $\operatorname{card}\mathfrak{S}_n = n!$ (proposition 1). En $X = -1$, la proposition 5 (iii), qui donne $(-1)^{\omega(\sigma)} = (-1)^n\varepsilon(\sigma)$, fournit $\sum_\sigma \varepsilon(\sigma) = (-1)^n P_n(-1) = 0$ pour $n \geqslant 2$: il y a autant de permutations paires que d'impaires.

EXERCICE 64 ⋆⋆⋆⋆

Idée. Dans la formule $\det A = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\prod_j a_{\sigma(j)j}$, un terme associé à $\sigma \neq \mathrm{id}$ fait intervenir les coefficients le long d'un cycle de σ. La troisième condition, appliquée de proche en proche, et la deuxième montrent qu'un tel terme est nul : il ne reste que le produit des coefficients diagonaux.

Soit $\sigma \neq \mathrm{id}$, et supposons $\prod_j a_{\sigma(j)j} \neq 0$. Par le théorème 1, σ possède un cycle $(j_1\ j_2\ \cdots\ j_p)$ de longueur $p \geqslant 2$, avec $\sigma(j_k) = j_{k+1}$ pour $k < p$ et $\sigma(j_p) = j_1$. Les facteurs d'indices $j = j_1, \ldots, j_p$ sont non nuls :

$$a_{j_2j_1} \neq 0, \quad a_{j_3j_2} \neq 0, \quad \ldots, \quad a_{j_pj_{p-1}} \neq 0, \quad a_{j_1j_p} \neq 0.$$

Montrons par récurrence sur $k \in [\![2\,;p]\!]$ que $a_{j_kj_1} \neq 0$. C'est vrai pour $k = 2$. Si $a_{j_kj_1} \neq 0$ et $k < p$, alors $a_{j_{k+1}j_k} \neq 0$, et la troisième condition, appliquée au triplet (j_{k+1}, j_k, j_1), donne $a_{j_{k+1}j_1} \neq 0$. Pour $k = p$, on obtient $a_{j_pj_1} \neq 0$. Mais $a_{j_1j_p} \neq 0$, avec $j_1 \neq j_p$: c'est contraire à la deuxième condition.

Ainsi, tous les termes associés à $\sigma \neq \mathrm{id}$ sont nuls, et

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii} \neq 0, \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{A \text{ est inversible, et } \det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}}$$

Par exemple, la matrice triangulaire ci-dessous vérifie les trois conditions, puisque tous ses coefficients situés au-dessus de la diagonale sont non nuls, et l'on retrouve la proposition 11 (i) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times 4 \times 6 = 24.$$

À retenir. La relation « $i \prec j$ si $i \neq j$ et $a_{ij} \neq 0$ » est un ordre strict sur $[\![1\,;n]\!]$: les conditions 2 et 3 en sont l'antisymétrie et la transitivité. Si l'on renumérote les indices selon un ordre total qui prolonge $\prec$, la matrice devient triangulaire supérieure. L'exercice généralise donc le calcul du déterminant d'une matrice triangulaire, dont la démonstration dans le cours suit le même chemin.

EXERCICE 65 ⋆⋆⋆⋆

Idée. On factorise $X^p + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et l'on remplace X par A en tenant compte de B : comme A et B commutent, $A^p + B^p$ est le produit des $A - \omega B$, où ω parcourt les racines de $\omega^p = -1$. Les facteurs associés à deux racines conjuguées ont des déterminants conjugués, et la seule racine réelle possible est -1.

Les racines de $X^p + 1$ sont les p nombres distincts $\omega_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+1)\pi/p}$, pour $0 \leqslant k \leqslant p-1$ (chapitre 4), d'où

$$X^p + 1 = \prod_{k=0}^{p-1}(X - \omega_k) = \sum_{j=0}^{p}(-1)^j s_j X^{p-j},$$

où s_j est la j-ième fonction symétrique élémentaire des ω_k (théorème 4 du chapitre 13). Par identification, $s_0 = 1$, $s_j = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant p-1$, et $(-1)^p s_p = 1$. Comme A et B commutent, le produit des

matrices $A-\omega_k B$ se développe comme un produit de polynômes, les puissances de A et de B pouvant être regroupées :

$$\prod_{k=0}^{p-1}(A-\omega_k B)=\sum_{j=0}^{p}(-1)^j s_j A^{p-j}B^j = A^p+B^p.$$

Par le théorème 6 (i), $\det(A^p+B^p)=\prod_k \det(A-\omega_k B)$. On regroupe les facteurs.

— Si ω_k n'est pas réel, son conjugué $\overline{\omega_k}$, qui vérifie aussi $\overline{\omega_k}^p=-1$, est une autre racine. Le déterminant est une somme de produits des coefficients, et le conjugué d'une somme de produits est la somme des produits des conjugués. Comme A et B sont réelles, la matrice $A-\overline{\omega_k}B$ est la conjuguée de $A-\omega_k B$, donc

$$\det(A-\overline{\omega_k}B)\det(A-\omega_k B)=\left|\det(A-\omega_k B)\right|^2\geqslant 0.$$

— Une racine réelle vérifie $\omega^p=-1$: c'est $\omega=-1$, ce qui n'est possible que si p est impair. Le facteur correspondant est $\det(A+B)\geqslant 0$.

Le produit de nombres positifs ou nuls est positif ou nul.

$$\boxed{\det(A^p+B^p)\geqslant 0 \quad \text{pour tout } p\geqslant 1}$$

Pour p pair, l'hypothèse sur $\det(A+B)$ n'a même pas servi ; ainsi, pour $p=2$,

$$\det(A^2+B^2)=\det(A+\mathrm{i}B)\det(A-\mathrm{i}B)=\left|\det(A+\mathrm{i}B)\right|^2.$$

Piège. L'hypothèse de commutation est indispensable. Pour $A=2E_{11}$ et $B=E_{21}-E_{12}$, qui ne commutent pas, $\det(A+B)=1$, mais $A^2+B^2=4E_{11}-I_2$ a pour déterminant -3. Sans commutation, $(A-\mathrm{i}B)(A+\mathrm{i}B)=A^2+B^2+\mathrm{i}(AB-BA)$, et la factorisation est perdue.