EXERCICES – CHAPITRE 17

GROUPE SYMÉTRIQUE ET DÉTERMINANTS

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Dans toute la feuille, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier naturel non nul et $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $[\![1\,;n]\!]$. Comme dans le cours, on note $\sigma\sigma'$ la composée $\sigma \circ \sigma'$: la permutation écrite à droite s'applique en premier. On note ε la signature, $\mathfrak{A}_n$ le groupe alterné, E_{ij} les matrices élémentaires et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1. L'*ordre* d'une permutation σ est le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que $\sigma^k = \mathrm{id}$; il existe, car les puissances de σ appartiennent à l'ensemble fini $\mathfrak{S}_n$.

Le groupe symétrique

EXERCICE 1 ⋆

Décomposer en produit de cycles à supports disjoints, puis calculer la signature des permutations suivantes de $\mathfrak{S}_9$:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 9 & 6 & 2 & 8 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 1 & 6 & 3 & 4 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 7 & 6 & 8 & 3 & 5 & 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 2 ⋆

Sans calculer leur décomposition en cycles à supports disjoints, déterminer la signature des permutations suivantes de $\mathfrak{S}_9$:

(i) $(1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2)$;

(ii) $(2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)$;

(iii) $(1\ 2)(2\ 4\ 6\ 5)(1\ 3\ 7)(2\ 5\ 4)(3\ 5\ 6\ 1)(2\ 5)(1\ 4\ 6)$;

(iv) $(1\ 2\ 3)(4\ 5)(1\ 6\ 7\ 8\ 9)(1\ 5\ 9)$.

Vérifier le résultat obtenu pour la permutation (i) en la calculant explicitement.

EXERCICE 3 ⋆

On considère la permutation de $\mathfrak{S}_7$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints, puis en produit de transpositions, et calculer sa signature.
2. Déterminer l'ordre de σ, puis calculer σ^{2001}.
3. Mêmes questions pour la permutation $\sigma' = (1\ 3\ 2)(1\ 5\ 3)^{-1}(5\ 7\ 6)^2(1\ 3\ 4\ 2)$ de $\mathfrak{S}_7$, en remplaçant σ^{2001} par σ'^{100}.

EXERCICE 4 ⋆

Soit $n \geqslant 4$ et a, b, c, d quatre éléments deux à deux distincts de $[\![1\,;n]\!]$.

1. Calculer la permutation $(a\ b)(c\ d)(d\ a)$, et l'écrire comme un cycle.
2. Décrire les permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui ont au moins $n-1$ points fixes.
3. Une permutation $s \neq \mathrm{id}$ telle que $s^2 = \mathrm{id}$ est-elle nécessairement une transposition ?
4. Donner la liste des éléments de $\mathfrak{A}_3$, puis des douze éléments de $\mathfrak{A}_4$, en les regroupant selon la forme de leur décomposition en cycles.

EXERCICE 5 ⋆⋆

1. Calculer la signature de la permutation de $\mathfrak{S}_n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les signatures des permutations de $\mathfrak{S}_{2n}$ suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \cdots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 1 & 3 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n \end{pmatrix}.$$

Pour la seconde, on pourra compter les inversions.

EXERCICE 6 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 5$. On considère la permutation de $\mathfrak{S}_n$

$$\sigma = (1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4)(3\ 4\ 5)\cdots(n-3\ \ n-2\ \ n-1)(n-2\ \ n-1\ \ n),$$

produit des $n-2$ cycles $(k\ \ k+1\ \ k+2)$, pour k allant de 1 à $n-2$. Déterminer la décomposition de σ en cycles à supports disjoints, son ordre et sa signature.

EXERCICE 7 ⋆⋆

1. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation différente de l'identité, dont la décomposition en cycles à supports disjoints fait apparaître des cycles de longueurs $p_1, \ldots, p_r$. Montrer que l'ordre de σ est le ppcm de $p_1, \ldots, p_r$.
2. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{10}$ une permutation d'ordre 14. Calculer $\varepsilon(\sigma)$.
3. Déterminer l'ordre maximal d'un élément de $\mathfrak{S}_{10}$.

EXERCICE 8 ⋆⋆

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

1. Soit $a \neq b$ dans $[\![1\,;n]\!]$. Calculer $\sigma(a\ b)\sigma^{-1}$.
2. Plus généralement, pour un cycle $(a_1\ a_2\ \cdots\ a_p)$, montrer que

$$\sigma(a_1\ a_2\ \cdots\ a_p)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\ \ \sigma(a_2)\ \cdots\ \sigma(a_p)).$$

3. On suppose $n \geqslant 3$. Déterminer le *centre* de $\mathfrak{S}_n$, c'est-à-dire l'ensemble des permutations qui commutent avec toutes les permutations de $\mathfrak{S}_n$. Que se passe-t-il pour $n = 2$?

EXERCICE 9 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$. On dit qu'une famille de permutations *engendre* $\mathfrak{S}_n$ si toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ est un produit d'éléments de cette famille, chacun pouvant figurer plusieurs fois. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par chacune des familles suivantes.

1. Les transpositions $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, …, $(1\ n)$. On pourra calculer $(1\ a)(1\ b)(1\ a)$.
2. Les transpositions $(1\ 2)$, $(2\ 3)$, …, $(n-1\ \ n)$.
3. La transposition $t = (1\ 2)$ et le cycle $c = (1\ 2\ \cdots\ n)$. On calculera $c^k t c^{-k}$ pour $k \in [\![0\,;n-2]\!]$.

EXERCICE 10 ⋆⋆

Pour $\rho \in \mathfrak{S}_n$, on note $\Gamma_\rho = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \rho\sigma = \sigma\rho\}$ l'ensemble des permutations qui commutent avec ρ.

1. Montrer que Γ_ρ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.
2. On prend $n = 5$ et $\rho = (1\ 2\ 3)$. Déterminer Γ_ρ, et montrer que tous ses éléments sont des puissances de la permutation $(1\ 2\ 3)(4\ 5)$.
3. On prend $n = 6$ et $\rho = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)$. Déterminer le nombre d'éléments de Γ_ρ, en utilisant la deuxième question de l'exercice 8 pour traduire la condition $\sigma\rho\sigma^{-1} = \rho$.

EXERCICE 11 ⋆⋆

On s'intéresse à l'équation $f^2 = \sigma$, d'inconnue $f \in \mathfrak{S}_n$, où $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est donnée.

1. Soit $c = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_p)$ un cycle de longueur $p \geqslant 2$. Calculer c^2, en distinguant selon la parité de p.
2. En déduire qu'un cycle de longueur impaire est le carré d'une permutation, et que $(1\ 2)(3\ 4)$ l'est aussi.
3. Montrer qu'une transposition n'est pas le carré d'une permutation. On pourra examiner la décomposition en cycles de f^2 à l'aide de la première question.
4. L'équation $f^2 = \sigma$ admet-elle une solution pour les permutations σ et σ' de l'exercice 3 ?

EXERCICE 12 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$ et $\Phi : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{C}^*$ un morphisme du groupe $\mathfrak{S}_n$ dans le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.

1. On suppose que $\Phi\big((1\ 2)\big) = -1$. Montrer que $\Phi(\tau) = -1$ pour toute transposition τ.
2. Déterminer tous les morphismes de groupes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{C}^*$.

EXERCICE 13 ⋆⋆

Construire un morphisme de groupes injectif de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathfrak{A}_{n+2}$. On pourra associer à toute permutation σ de $[\![1\,;n]\!]$ la permutation de $[\![1\,;n+2]\!]$ qui coïncide avec σ sur $[\![1\,;n]\!]$ et fixe $n+1$ et $n+2$, puis corriger celles qui sont impaires.

EXERCICE 14 ⋆⋆

On considère l'ensemble

$$\mathcal{A} = \Big\{ \sum_{k=1}^{n} k\,\sigma(k) \;\Big|\; \sigma \in \mathfrak{S}_n \Big\}.$$

1. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, et $i < j$ tels que $\sigma(i) > \sigma(j)$. Comparer les sommes associées à σ et à $\sigma(i\ j)$.
2. En déduire $\max \mathcal{A}$ et $\min \mathcal{A}$, et les permutations pour lesquelles ils sont atteints.

EXERCICE 15 ⋆⋆⋆

1. Soit γ et δ deux cycles de $\mathfrak{S}_n$ qui commutent. Montrer que leurs supports sont égaux ou disjoints. On pourra utiliser l'exercice 8 pour comparer γ et $\delta\gamma\delta^{-1}$.
2. Soit $\gamma = (1\ 2\ \cdots\ n)$. Montrer qu'une permutation σ qui commute avec γ est entièrement déterminée par $\sigma(1)$.
3. En déduire que les permutations qui commutent avec γ sont exactement les puissances γ^k, pour $k \in [\![0\,;n-1]\!]$.

EXERCICE 16 ⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$ et $\mathcal{T}$ un ensemble de transpositions de $\mathfrak{S}_n$. On définit sur $[\![1\,;n]\!]$ la relation $i \sim j$ s'il existe une permutation σ, produit d'éléments de $\mathcal{T}$, telle que $\sigma(i) = j$, en convenant que l'identité est le produit vide.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que, si $\mathcal{T}$ contient k transpositions, la relation $\sim$ a au moins $n-k$ classes. On pourra raisonner par récurrence sur k.
3. En déduire qu'un ensemble de transpositions qui engendre $\mathfrak{S}_n$, au sens de l'exercice 9, en contient au moins $n-1$. Ce minimum est-il atteint ?

EXERCICE 17 ⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 3$. On veut montrer que toute permutation paire est un produit de cycles de longueur 3.

1. Soit a, b, c, d des éléments deux à deux distincts de $[\![1\,;n]\!]$. Écrire $(a\ b)(a\ c)$, puis $(a\ b)(c\ d)$, comme des produits de cycles de longueur 3.
2. Conclure.
3. Un produit de cycles de longueur 3 peut-il être une permutation impaire ?

Formes n-linéaires alternées et déterminant d'une famille

EXERCICE 18 ⋆

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère, pour $t \in \mathbb{R}$, les vecteurs $e_1 = (1,1,t)$, $e_2 = (1,t,1)$ et $e_3 = (t,1,1)$.

1. Pour quelles valeurs de t la famille (e_1, e_2, e_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Pour chacune des valeurs exclues, déterminer le rang de la famille.

EXERCICE 19 ⋆⋆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de colonnes A_1, …, A_n, et $S = A_1 + \cdots + A_n$. On note B la matrice dont la j-ième colonne est $S - A_j$, pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$. Montrer que

$$\det B = (-1)^{n-1}(n-1)\det A.$$

EXERCICE 20 ⋆⋆

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille libre de E, α_1, …, $\alpha_n \in \mathbb{K}$ et $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les α_i pour que la famille $(u_1 + s, \ldots, u_n + s)$ soit libre. On pourra calculer son déterminant dans la base $(u_1, \ldots, u_n)$ du sous-espace qu'elle engendre.

EXERCICE 21 ⋆⋆

Soit z_0, …, z_n des nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille

$$\left((X-z_0)^n,(X-z_1)^n,\dots,(X-z_n)^n\right)$$

est une base de $\mathbb{C}_n[X]$, en calculant son déterminant dans la base canonique à l'aide d'un déterminant de Vandermonde.

EXERCICE 22 ⋆⋆

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, e une base de E et $u\in\mathcal{L}(E)$. On définit $\varphi : E^n\to\mathbb{K}$ par

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)=\sum_{k=1}^{n}\det_e\left(x_1,\dots,x_{k-1},u(x_k),x_{k+1},\dots,x_n\right).$$

1. Montrer que φ est une forme n-linéaire alternée.
2. En déduire que $\varphi=\operatorname{tr}(u)\det_e$.

EXERCICE 23 ⋆⋆

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I\to\mathbb{R}$. Pour $x_1<x_2<x_3$ dans I, on pose

$$D(x_1,x_2,x_3)=\begin{vmatrix}x_1 & f(x_1) & 1\\ x_2 & f(x_2) & 1\\ x_3 & f(x_3) & 1\end{vmatrix}.$$

1. Exprimer $D(x_1,x_2,x_3)$ à l'aide des pentes des cordes $[M_1M_2]$ et $[M_1M_3]$, où M_k est le point de coordonnées $(x_k,f(x_k))$.
2. À quelle condition sur f a-t-on $D(x_1,x_2,x_3)\geqslant 0$ pour tous $x_1<x_2<x_3$ dans I ? On reliera la réponse au chapitre 9.
3. Interpréter géométriquement le signe de ce déterminant, en termes d'orientation du triangle $M_1M_2M_3$.

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

Soit f_1, …, f_n des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $(f_1,\dots,f_n)$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe des réels x_1, …, x_n tels que

$$\det\left(f_i(x_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\neq 0.$$

Pour le sens direct, on pourra raisonner par récurrence sur n, et développer le déterminant obtenu en remplaçant x_n par une variable x par rapport à sa dernière colonne.

Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

EXERCICE 25 ⋆

On pose

$$T=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}1&-10&11\\-3&6&5\\-6&12&8\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}3&5&55\\-9&-3&25\\-18&-6&40\end{pmatrix}.$$

1. Calculer $B=TA$ et $\det B$.
2. En déduire $\det A$.
3. En déduire $\det C$, en comparant les colonnes de C à celles de A.

EXERCICE 26 ⋆

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 4A - 3I_3$. On suppose que $\det(3A - 6I_3) > 0$. Calculer $\det(3A - 6I_3)$. On pourra calculer $(3A - 6I_3)^2$.

EXERCICE 27 ⋆

Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_n$ si et seulement si n est pair. Le résultat subsiste-t-il dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

EXERCICE 28 ⋆

1. Calculer le déterminant de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_n[X]$ dans chacun des cas suivants :

   (a) $u(P) = P + P'$, (b) $u(P) = P(X+1) - P(X)$, (c) $u(P) = XP' + P(1)$.

2. Soit E l'ensemble des fonctions $x \mapsto P(x)\mathrm{e}^x$, où P parcourt $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que E est un espace vectoriel de dimension finie, que la dérivation $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E, et calculer $\det D$.

EXERCICE 29 ⋆⋆

1. Montrer que l'application $\varphi : P \mapsto P(1 - X)$ est une symétrie de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer $\operatorname{tr}\varphi$ et $\det\varphi$.
2. Montrer que l'application $\psi : P \mapsto X^n P(\frac{1}{X})$ est une symétrie de $\mathbb{R}_n[X]$. Existe-t-il une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle la matrice de ψ est diagonale ? Quelles valeurs $\det\psi$ peut-il prendre *a priori* ? Calculer $\det\psi$.

EXERCICE 30 ⋆⋆

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer le déterminant de chacun des endomorphismes suivants de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$A \mapsto A^T, \qquad A \mapsto MA, \qquad A \mapsto AM.$$

On pourra utiliser la base des matrices élémentaires E_{ij}, rangées dans un ordre bien choisi.

EXERCICE 31 ⋆⋆⋆

Soit p un entier naturel non nul.

1. On suppose $p < n$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(AB) = 0$.
2. On suppose $n = 2 \leqslant p$. Soit $A \in \mathcal{M}_{2,p}(\mathbb{K})$, de colonnes A_1, …, A_p, et $B = (b_{kj}) \in \mathcal{M}_{p,2}(\mathbb{K})$. Pour $i < j$, on note $A^{(i,j)} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ la matrice de colonnes A_i, A_j, et $B_{(i,j)} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ la matrice formée des lignes i et j de B. Établir la formule

   $$\det(AB) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} \det\left(A^{(i,j)}\right) \det\left(B_{(i,j)}\right).$$

   On pourra écrire les colonnes de AB comme combinaisons linéaires des A_k, et utiliser la bilinéarité du déterminant.
3. En déduire, pour tous réels a_1, …, a_p, b_1, …, b_p, l'identité

   $$\Big(\sum_{k=1}^{p} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{p} b_k^2\Big) - \Big(\sum_{k=1}^{p} a_k b_k\Big)^2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

4. Montrer que le produit de deux entiers qui sont chacun somme de deux carrés d'entiers est encore une somme de deux carrés d'entiers. Écrire ainsi $65 = 5 \times 13$ comme somme de deux carrés de deux façons.

EXERCICE 32 ⋆⋆⋆

1. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\det(A+B) = f(\det A, \det B)$ pour toutes matrices A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? On distinguera les cas $n = 1$ et $n \geqslant 2$.
2. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(M+N) = \det M$ pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $N = 0$. On pourra commencer par le cas où N est de rang $r \geqslant 1$ et choisir M à l'aide de la forme J_r du chapitre 16.
3. On suppose $n \geqslant 2$. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\det(A+B) = \det A + \det B$ pour toute $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Calcul des déterminants

EXERCICE 33 ⋆

Calculer les déterminants suivants, où a, b, c, d sont des réels :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a & b & c \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{vmatrix}.$$

EXERCICE 34 ⋆

Les questions suivantes se traitent sans développer les déterminants.

1. Les entiers 546, 273 et 169 sont divisibles par 13. Montrer que $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ est divisible par 13.
2. Montrer que, pour tous réels a, b, c,
$$\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c.$$
3. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \left((-1)^{i+j} a_{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Exprimer $\det B$ en fonction de $\det A$.

EXERCICE 35 ⋆

Calculer les déterminants suivants, où a, b, c, d, a_1, …, a_n sont des nombres complexes, et donner les résultats sous forme factorisée :

$$\text{(i)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}; \qquad \text{(ii)} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix}; \qquad \text{(iii)} \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix};$$

$$\text{(iv)} \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & (b+3)^2 & (c+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}; \qquad \text{(v)} \ \det\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i E_{i,n+1-i}\Big);$$

(vi) $D_n = \det(d_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, où $d_{ij} = 1$ si $\min(i,j)$ est impair et $d_{ij} = 0$ sinon ; par exemple,

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

EXERCICE 36 ⋆

Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes, et en déduire les valeurs du paramètre réel (x, a ou m) pour lesquelles elle est inversible :

$$\begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+1 & x+2 & x+3 \\ x+2 & x+3 & x+4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & m & m & m^2-m \\ 1 & m-1 & 2m-1 & m^2-m \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 37 ⋆⋆

On calcule dans cet exercice des déterminants *tridiagonaux* d'ordre n, dont les seuls coefficients non nuls sont situés sur la diagonale et juste au-dessus ou juste au-dessous d'elle.

1. Soit Δ_n le déterminant dont les coefficients diagonaux valent 3, ceux qui sont juste au-dessus de la diagonale 1, et ceux qui sont juste au-dessous 2. Montrer que $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$ pour tout $n \geqslant 1$, et en déduire Δ_n.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant dont les coefficients diagonaux valent $1 + x^2$, et ceux qui sont juste au-dessus ou juste au-dessous de la diagonale $-x$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant dont le premier coefficient diagonal vaut $\cos\theta$, les autres coefficients diagonaux $2\cos\theta$, et ceux qui sont juste au-dessus ou juste au-dessous de la diagonale 1.

EXERCICE 38 ⋆⋆

1. Soit s_1, …, s_n des réels. Calculer le déterminant de la matrice $\left(s_{\min(i,j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_1 & s_1 & \cdots & s_1 \\ s_1 & s_2 & s_2 & \cdots & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \end{vmatrix}.$$

2. En déduire les déterminants des matrices

$$\left(\min(i,j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \qquad \text{et} \qquad \left(S_{\min(i,j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}, \qquad \text{où } S_k = 1 + 2 + \cdots + k.$$

3. Calculer le déterminant de la matrice $\left(\max(i,j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, puis celui de $\left(a^{\max(i,j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, où a est un réel.

EXERCICE 39 ⋆⋆

Calculer les déterminants d'ordre $n \geqslant 2$ suivants, où a, x, y, z sont des réels :

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & x & x & \cdots & x \\ y & z & 0 & \cdots & 0 \\ y & 0 & z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & 0 & 0 & \cdots & z \end{vmatrix}, \qquad \det\left(|i-j|\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

EXERCICE 40 ⋆⋆

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $A(x) = A + xJ$ la matrice de coefficients $a_{ij} + x$.

1. Montrer que $x \mapsto \det A(x)$ est une fonction polynomiale de degré au plus 1. On pourra soustraire la première colonne de $A(x)$ à chacune des autres.
2. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels, a et b deux réels distincts, et $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i - x)$. Montrer que le déterminant d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, les coefficients situés au-dessus de la diagonale valent a, et ceux situés au-dessous valent b, est égal à
$$\frac{bf(a) - af(b)}{b - a}.$$
3. Calculer ce déterminant lorsque $a = b$, en développant $\det(D + bJ)$ par multilinéarité, où D est la matrice diagonale de coefficients $\alpha_1 - b, \ldots, \alpha_n - b$.
4. En déduire le déterminant de la matrice dont les coefficients diagonaux valent a et les autres b.
5. On suppose n pair et A antisymétrique. Montrer que $\det A(x) = \det A$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 41 ⋆⋆

Calculer les déterminants suivants, où $\binom{k}{\ell}$ désigne un coefficient binomial, nul lorsque $\ell > k$:

1. $\det\left(\binom{m+i}{j}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant p}$, où $m \geqslant 1$ et $p \geqslant 0$ sont des entiers ; on pourra effectuer les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ en commençant par la dernière ligne ;
2. $\det\left(\binom{i}{j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $\det\left(\binom{i+j-2}{i-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$;
3. $\det\left(P(i+j-1)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, où $n \geqslant 2$ et $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$.

EXERCICE 42 ⋆⋆

1. Calculer $\det\left(i^j\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
2. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels et $P_0, \ldots, P_{n-1}$ des polynômes tels que P_k soit de degré k et de coefficient dominant c_k. Calculer $\det\left(P_{j-1}(x_i)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ à l'aide du déterminant de Vandermonde $V(x_1, \ldots, x_n)$.
3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme T_k tel que $\cos(k\theta) = T_k(\cos\theta)$ pour tout réel θ, de degré k et de coefficient dominant 2^{k-1} si $k \geqslant 1$. On pourra établir que $T_{k+2} = 2XT_{k+1} - T_k$.
4. En déduire, pour des réels $\theta_1, \ldots, \theta_n$, la valeur de
$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos\left((n-1)\theta_1\right) \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos\left((n-1)\theta_2\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos\theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos\left((n-1)\theta_n\right) \end{vmatrix},$$
et l'écrire sous forme factorisée pour $n = 3$.

EXERCICE 43 ⋆⋆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 ou -1.

1. Montrer que $\det A$ est un entier.
2. Montrer que $\det A$ est divisible par 2^{n-1}. On pourra ajouter la première ligne à chacune des autres.

EXERCICE 44 ⋆⋆

Soit $a_0, \dots, a_{n-1}$ des nombres complexes, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice dont les coefficients situés juste au-dessous de la diagonale valent 1, dont la dernière colonne est formée de $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, et dont les autres coefficients sont nuls :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(A - xI_n)$ pour $x \in \mathbb{C}$. En déduire que tout polynôme unitaire de degré n est, au signe près, de la forme $x \mapsto \det(A - xI_n)$ pour une matrice A bien choisie.

EXERCICE 45 ⋆⋆⋆

Soit $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

1. On suppose A inversible. Montrer que $\det M = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$. On pourra multiplier M à droite par une matrice triangulaire par blocs bien choisie.
2. On suppose de plus que A et C commutent. Montrer que $\det M = \det(AD - CB)$.
3. En prenant $n = 2$, $A = I_2$, $B = E_{12}$, $C = E_{11}$ et $D = E_{21}$, montrer que l'on ne peut pas remplacer $\det(AD - CB)$ par $\det(AD - BC)$ dans la question précédente.
4. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Montrer que, pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \left|\det(A + \mathrm{i}B)\right|^2 \geqslant 0.$$

   On pourra effectuer les opérations $C_k \leftarrow C_k - \mathrm{i}C_{k-n}$ pour $k \in [\![n+1\,;2n]\!]$, puis des opérations sur les lignes.

EXERCICE 46 ⋆⋆⋆

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $t \mapsto \det(A + tB)$ est une fonction polynomiale de degré au plus $\mathrm{rg}B$. On pourra écrire $B = PJ_rQ$ avec P et Q inversibles, comme au chapitre 16.
2. On suppose $\mathrm{rg}B \leqslant 1$. Montrer que $\det\left((A+B)(A-B)\right) \leqslant (\det A)^2$.

EXERCICE 47 ⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$, $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$, et $a_0, \dots, a_{n-1}$ des nombres complexes. On note A la matrice *circulante* dont la première ligne est $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, chaque ligne se déduisant de la précédente en décalant ses coefficients d'un cran vers la droite, le dernier revenant en tête :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

On pose $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$ et $M = \left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. Montrer que la j-ième colonne de AM est égale à $P(\omega^{j-1})$ fois la j-ième colonne de M.
2. Montrer que M est inversible, et en déduire que $\det A = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)$.
3. Retrouver ainsi, pour $n = 3$, la factorisation de $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ à l'aide de $j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$.

EXERCICE 48 ⋆⋆⋆

Déterminant de Cauchy. Soit $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels tels que $a_i + b_j \neq 0$ pour tous i, j.

1. Montrer que
$$\det\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i + b_j)}.$$
On pourra soustraire la dernière colonne à chacune des autres, puis la dernière ligne à chacune des autres, et raisonner par récurrence sur n.
2. En déduire que la matrice $\left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est inversible.

EXERCICE 49 ⋆⋆⋆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient d'indice (i,j) est le nombre de diviseurs positifs communs à i et à j. On note $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient d'indice (i,k) vaut 1 si k divise i, et 0 sinon.

1. Écrire A et L pour $n = 4$.
2. Montrer que $A = LL^T$.
3. En déduire $\det A$.

Comatrice et formules de Cramer

EXERCICE 50 ⋆

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par
$$f(x,y,z) = (y+z,\ -x+y+3z,\ 6x-7y-5z).$$

1. Calculer $\det f$. L'endomorphisme f est-il bijectif ?
2. Calculer la comatrice de la matrice de f dans la base canonique, et en déduire la matrice de f^{-1}.
3. Résoudre le système $f(x,y,z) = (2,4,-2)$ à l'aide des formules de Cramer, et vérifier le résultat à l'aide de la question précédente.

EXERCICE 51 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\det(\operatorname{Com}(A)) = (\det A)^{n-1}$. On traitera d'abord le cas où A est inversible.
2. Montrer que si $\operatorname{rg} A = n$, alors $\operatorname{rg}\operatorname{Com}(A) = n$, et que si $\operatorname{rg} A \leqslant n-2$, alors $\operatorname{Com}(A) = 0$.
3. On suppose $\operatorname{rg} A = n-1$. Montrer que $\operatorname{Com}(A) \neq 0$, puis que l'image de $\operatorname{Com}(A)^T$ est contenue dans $\operatorname{Ker} A$. En déduire que $\operatorname{rg}\operatorname{Com}(A) = 1$.
4. On suppose $n \geqslant 3$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $\operatorname{Com}(A) = A$, d'inconnue $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pourra commencer par examiner le rang d'une solution, puis calculer AA^T.

EXERCICE 52 ⋆⋆

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $B = A - J$ la matrice obtenue en retranchant 1 à tous les coefficients de A, et α la somme des coefficients de A^{-1}. Montrer que
$$\det B = (1-\alpha)\det A.$$
On pourra développer $\det B$ par multilinéarité par rapport aux colonnes, puis interpréter à l'aide des cofacteurs de A les termes obtenus.

EXERCICE 53 ⋆⋆

Soit A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, matrices à coefficients entiers, dont les déterminants sont des entiers premiers entre eux. Montrer qu'il existe deux matrices U, $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que

$$AU + BV = I_n.$$

EXERCICE 54 ⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$.

1. Montrer que, pour toutes matrices A, $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on a $\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B)$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $t \mapsto \det(tI_n - M)$ est une fonction polynomiale unitaire de degré n. En déduire que $M - tI_n$ est inversible pour tout $t \in \mathbb{C}$ sauf au plus n valeurs.
3. En déduire que la formule $\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B)$ est valable pour toutes matrices A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pourra appliquer la première question à $A - tI_n$ et $B - tI_n$, et considérer les coefficients des deux membres comme des polynômes en t.

EXERCICE 55 ⋆⋆⋆

Soit x_0, …, x_n des entiers relatifs deux à deux distincts. On note $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers.

1. Pour $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{R}_n[X]$, trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$, indépendante de P, telle que
$$\begin{pmatrix} P(x_0) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$
2. En déduire qu'il existe un entier $d \geqslant 1$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, si $P(x_0)$, …, $P(x_n)$ sont des entiers, alors $dP \in \mathbb{Z}[X]$. Donner une valeur de d qui convient lorsque $n = 2$ et $(x_0, x_1, x_2) = (0, 1, 3)$.
3. Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai si l'on remplace $\mathbb{R}_n[X]$ par $\mathbb{R}_{n+1}[X]$?

EXERCICE 56 ⋆⋆⋆

Soit A, $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose que, pour tout $k \in [\![0\,;4]\!]$, la matrice $A + kB$ est inversible et que son inverse est à coefficients entiers. Montrer que $A + 5B$ est inversible et que son inverse est à coefficients entiers. On pourra étudier la fonction $t \mapsto \det(A + tB)$, et utiliser la proposition 13 du cours.

Exercices de synthèse

EXERCICE 57 ⋆⋆

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Sauf mention contraire, $n \geqslant 2$ et les matrices sont carrées d'ordre n.

1. Toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ est un produit de transpositions de la forme $(k \;\; k+1)$.
2. Un cycle de longueur p a pour signature $(-1)^p$.
3. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ vérifie $\sigma^k = \mathrm{id}$ pour un entier k impair, alors σ est paire.
4. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(-A) = -\det A$.
5. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(AA^T) \geqslant 0$.
6. Si $\det A = 0$, alors l'une des lignes de A est nulle, ou deux d'entre elles sont proportionnelles.

7. Si n est impair, aucune matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est inversible.
8. Pour toutes matrices A, B, C, $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$.
9. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, la matrice P_σ dont le coefficient d'indice (i,j) vaut 1 si $i = \sigma(j)$ et 0 sinon a pour déterminant $\varepsilon(\sigma)$.
10. Il existe une permutation $f \in \mathfrak{S}_4$ telle que $f^2 = (1\ 2)(3\ 4)$.

EXERCICE 58 ⋆⋆

Le jeu de taquin. Un carré est partagé en neuf cases, numérotées de 1 à 9 ligne par ligne ; huit d'entre elles portent des jetons numérotés de 1 à 8, la neuvième est vide. Un *coup* consiste à faire glisser dans la case vide un jeton situé sur une case voisine, horizontalement ou verticalement. Au départ, le jeton k occupe la case k pour tout $k \in [\![1\,;8]\!]$, et la case 9 est vide. On décrit une configuration par la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_9$ telle que, pour $k \leqslant 8$, $\sigma(k)$ soit le numéro de la case occupée par le jeton k, et $\sigma(9)$ celui de la case vide.



départ



configuration $\mathcal{C}$

La case vide est hachurée. Sur la figure de droite, elle occupe la case 3 et le jeton 2 occupe la case 1.

1. Montrer qu'un coup remplace σ par $\tau\sigma$, où τ est une transposition.
2. On colorie les cases en damier, la case 9 étant blanche. Montrer qu'après m coups, la case vide est blanche si et seulement si m est pair.
3. En déduire que toute configuration accessible vérifie $\varepsilon(\sigma) = 1$ si la case vide est blanche, et $\varepsilon(\sigma) = -1$ sinon. En particulier, lorsque la case vide est revenue en case 9, la permutation des huit jetons est paire.
4. Peut-on atteindre la configuration $\mathcal{C}$ de la figure en un nombre fini de coups ?

EXERCICE 59 ⋆⋆⋆

On dispose de $2n+1$ cailloux. On suppose que, quel que soit le caillou que l'on retire, on peut répartir les $2n$ cailloux restants en deux tas de n cailloux de même masse totale. On veut montrer que tous les cailloux ont la même masse.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont nuls et dont les autres coefficients valent 1 ou -1. Montrer que $\det A$ est un entier de même parité que $\det(J - I_{2n})$.
2. À l'aide de l'exercice 40, calculer $\det(J - I_{2n})$. En déduire que A est inversible.
3. On note $m_1, \ldots, m_{2n+1}$ les masses des cailloux. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$, de coefficients diagonaux nuls et d'autres coefficients égaux à 1 ou -1, telle que $MX = 0$, où X est la colonne des m_i.
4. En déduire que $\mathrm{rg} M = 2n$, puis conclure.

EXERCICE 60 ⋆⋆⋆

Théorème de De Bruijn et Erdős (1948). On veut montrer que $n \geqslant 3$ points du plan, non tous alignés, déterminent au moins n droites distinctes, une droite étant dite déterminée par les points si elle en contient au moins deux.

1. Soit $r_1, \ldots, r_n$ des réels strictement supérieurs à 1. À l'aide de la troisième question de l'exercice 40, montrer que la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont $r_1, \ldots, r_n$ et dont les autres coefficients valent 1 est inversible.
2. Soit $P_1, \ldots, P_n$ des points du plan, non tous alignés, et $D_1, \ldots, D_m$ les droites distinctes qu'ils déterminent. On note $N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient d'indice (i,k) vaut 1 si $P_i \in D_k$, et 0 sinon. Calculer les coefficients de NN^T.
3. Montrer que chaque point P_i appartient à au moins deux des droites D_k.
4. En déduire que $m \geqslant n$. Donner un exemple où $m = n$.

EXERCICE 61 ⋆⋆⋆

Soit A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = PAP^{-1}$. On veut montrer qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = QAQ^{-1}$: deux matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On écrit $P = R + \mathrm{i}S$, avec R, $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $BR = RA$ et $BS = SA$.
2. Montrer que $t \mapsto \det(R + tS)$ est une fonction polynomiale, et qu'elle n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{C}$.
3. Conclure.

Les quatre derniers exercices sont des problèmes à traiter en autonomie : l'énoncé fixe le but, et c'est à vous de trouver le chemin.

EXERCICE 62 ⋆⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$. Existe-t-il une suite $(\tau_1, \ldots, \tau_{n!-1})$ de transpositions de $\mathfrak{S}_n$ telle que les $n!$ permutations

$$\mathrm{id}, \quad \tau_1, \quad \tau_2\tau_1, \quad \tau_3\tau_2\tau_1, \quad \ldots, \quad \tau_{n!-1}\cdots\tau_2\tau_1$$

soient exactement les éléments de $\mathfrak{S}_n$? Autrement dit, peut-on énumérer toutes les permutations de $[\![1\,;n]\!]$ en passant de chacune à la suivante par l'échange de deux valeurs ?

EXERCICE 63 ⋆⋆⋆⋆

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\omega(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ, points fixes compris. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} X^{\omega(\sigma)}.$$

EXERCICE 64 ⋆⋆⋆⋆

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les trois conditions suivantes :

— pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{ii} \neq 0$;

— pour tous $i \neq j$, si $a_{ij} \neq 0$, alors $a_{ji} = 0$;

— pour tous i, j, k, si $a_{ij} \neq 0$ et $a_{jk} \neq 0$, alors $a_{ik} \neq 0$.

Montrer que A est inversible.

EXERCICE 65 ⋆⋆⋆⋆

Soit A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ et $\det(A + B) \geqslant 0$. Montrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$,

$$\det(A^p + B^p) \geqslant 0.$$