CORRIGÉ – CHAPITRE 18

INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Les renvois « proposition n », « théorème n » désignent les énoncés du chapitre 18 du cours ; ceux des chapitres antérieurs sont précisés. Comme dans le cours, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{E}([a\,,b],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier et $\mathcal{C}_m([a\,,b],\mathbb{K})$ celui des fonctions continues par morceaux sur $[a\,,b]$, et l'on intègre entre deux bornes quelconques avec la convention d'orientation $\displaystyle\int_\beta^\alpha f = -\int_\alpha^\beta f$. Pour une fonction f continue par morceaux, $f(x_0^+)$ et $f(x_0^-)$ désignent ses limites à droite et à gauche en x_0. Les énoncés n'indiquent plus la technique d'intégration à employer : le corrigé l'annonce au début de chaque calcul, avec ce qui, dans la fonction intégrée, la suggère.

Fonctions en escalier et fonctions continues par morceaux

EXERCICE 1 ⋆

1. Pour $k \in [\![m\,;n-1]\!]$, la partie entière vaut k sur $[k\,,k+1[$, donc sur l'intervalle ouvert $]k\,,k+1[$: la subdivision $(m, m+1, \dots, n)$ est adaptée, et la restriction de $\lfloor\cdot\rfloor$ à $[m\,,n]$ est en escalier. La proposition 3 donne alors son intégrale comme une somme d'aires de rectangles de largeur 1, que l'on calcule comme une somme de termes d'une suite arithmétique (chapitre 3) :

$$\boxed{\int_m^n \lfloor x\rfloor\,\mathrm{d}x = \sum_{k=m}^{n-1} k = \frac{(n-m)(n+m-1)}{2}}$$

Pour $m=2$ et $n=5$, on trouve $2+3+4=9=\dfrac{3\times 6}{2}$ ✓. Pour $m=-n$, l'intégrale vaut $-n$: les rectangles situés sous l'axe, de hauteurs $-n$, …, -1, ne sont pas compensés par ceux de hauteurs 1, …, $n-1$, puisque la partie entière n'est pas impaire.

2. La fonction $x \mapsto x|x|$ vaut $-x^2$ sur $[-1\,,0]$ et x^2 sur $[0\,,2]$; elle est continue sur $[-1\,,2]$, donc continue par morceaux, avec la subdivision $(-1, 2)$. Pour l'intégrer, on la coupe en 0 par la relation de Chasles (théorème 3) :

$$\boxed{\int_{-1}^2 x|x|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 (-x^2)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}+\frac{8}{3} = \frac{7}{3}}$$

La fonction étant impaire, la partie située sur $[-1\,,0]$ compense exactement celle sur $[0\,,1]$, et le résultat est l'intégrale de x^2 sur $[1\,,2]$, qui vaut bien $\dfrac{7}{3}$ ✓.

3. On distingue trois cas, selon que le point de rencontre $x=a$ des deux fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto a$ est à gauche de $[0\,,1]$, dedans ou à droite. Si $a \leqslant 0$, on a $\min(x,a)=a$ pour tout $x\in[0\,,1]$. Si $a\geqslant 1$, on a $\min(x,a)=x$. Si $0\leqslant a\leqslant 1$, on coupe en a par la relation de Chasles :

$$\int_0^1 \min(x,a)\,\mathrm{d}x = \int_0^a x\,\mathrm{d}x + \int_a^1 a\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2} + a(1-a).$$

$$\boxed{I(a)=a \ \text{ si } a\leqslant 0, \qquad I(a)=a-\frac{a^2}{2} \ \text{ si } 0\leqslant a\leqslant 1, \qquad I(a)=\frac{1}{2} \ \text{ si } a\geqslant 1}$$

Les expressions se raccordent en $a=0$ et en $a=1$, où elles valent 0 et $\dfrac{1}{2}$ ✓ : la fonction I est continue, ce que l'on pouvait prévoir, puisque $|\min(x,a)-\min(x,a')|\leqslant|a-a'|$.

4. La différence $(x^2+3x-2)-(x^2+1)=3(x-1)$ est négative sur $[0\,,1]$ et positive sur $[1\,,2]$. Le minimum vaut donc x^2+3x-2 sur $[0\,,1]$ et x^2+1 sur $[1\,,2]$; c'est une fonction continue, et l'on coupe en 1 :

$$\boxed{\int_0^2 \min\left(x^2+1,\ x^2+3x-2\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-2\right)+\left(\frac{7}{3}+1\right) = -\frac{1}{6}+\frac{10}{3}=\frac{19}{6}}$$

5. Soit $x\in[N\,,N+1[$. Sur chaque $[k\,,k+1]$, avec $k\leqslant N-1$, l'intégrale de la partie entière vaut k, et sur $[N\,,x]$ la partie entière est constante égale à N. La relation de Chasles donne

$$\boxed{F(x)=\sum_{k=0}^{N-1} k + N(x-N) = \frac{N(N-1)}{2}+N(x-N) \qquad (N\leqslant x<N+1)}$$

Pour l'équivalent, plutôt que de manipuler $N=\lfloor x\rfloor$, on encadre la fonction intégrée : $t-1<\lfloor t\rfloor\leqslant t$ pour tout réel t (chapitre 7, proposition 4), et la croissance de l'intégrale donne, pour $x\geqslant 0$,

$$\frac{x^2}{2}-x\leqslant F(x)\leqslant\frac{x^2}{2}, \qquad \text{donc} \qquad 1-\frac{2}{x}\leqslant\frac{F(x)}{x^2/2}\leqslant 1 \quad (x>0).$$

$$\boxed{F(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{x^2}{2}}$$

À retenir. La fonction F est continue et affine par morceaux, de pente N sur $[N\,,N+1]$, mais elle n'est pas dérivable aux entiers : c'est la figure du cours qui suit le théorème 6. Encadrer la fonction intégrée est souvent plus rapide que calculer l'intégrale exactement, dès qu'on ne demande qu'un ordre de grandeur.

EXERCICE 2 ⋆⋆⋆

1. On intègre par parties (chapitre 6, proposition 4), en dérivant f et en intégrant $t\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$. C'est le choix naturel : la primitive $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{\mathrm{i}n}$ fait apparaître le facteur $\dfrac{1}{n}$ cherché, et l'hypothèse f de classe $\mathcal{C}^1$ est exactement ce qu'il faut pour dériver f. Pour $n\geqslant 1$,

$$u_n(f)=\left[f(t)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{\mathrm{i}n}\right]_a^b-\frac{1}{\mathrm{i}n}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t.$$

Comme $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}|=1$, l'inégalité triangulaire complexe (théorème 5) donne

$$\boxed{|u_n(f)|\leqslant\frac{C}{n}, \qquad C=|f(a)|+|f(b)|+\int_a^b|f'(t)|\,\mathrm{d}t}$$

et $u_n(f)$ tend vers 0 par encadrement.

2. La fonction $t\mapsto f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ est nulle sur $[a\,,\alpha[$ et sur $]\beta\,,b]$, et égale à $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ sur $[\alpha\,,\beta]$. Par la relation de Chasles et la proposition 6, appliquée aux parties réelle et imaginaire sur $[a\,,\alpha]$ et sur $[\beta\,,b]$, et puisque $t\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{\mathrm{i}n}$ est une primitive de $t\mapsto\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ (théorème 6),

$$\boxed{u_n(f)=\int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\beta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}}{\mathrm{i}n}, \qquad |u_n(f)|\leqslant\frac{2}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}$$

Soit maintenant $\varphi\in\mathcal{E}([a\,,b],\mathbb{K})$, $(x_0,\dots,x_p)$ une subdivision adaptée et c_i la valeur de φ sur $]x_{i-1}\,,x_i[$. La fonction φ ne diffère de $\displaystyle\sum_{i=1}^p c_i\mathbf{1}_{[x_{i-1},x_i]}$ qu'aux points x_k, où $\mathbf{1}_J$ désigne la fonction égale à 1 sur J

et à 0 ailleurs. La proposition 6, appliquée aux parties réelle et imaginaire, et la linéarité de l'intégrale (proposition 8) donnent

$$u_n(\varphi) = \sum_{i=1}^{p} c_i\, u_n(\mathbf{1}_{[x_{i-1},x_i]}), \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{|u_n(\varphi)| \leqslant \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{p}|c_i| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

3. Le théorème 1, appliqué avec $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$, fournit φ, $\psi \in \mathcal{E}([a\,,b],\mathbb{R})$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Par linéarité et par le théorème 5, pour tout n,

$$|u_n(f) - u_n(\varphi)| = \Big|\int_a^b (f(t)-\varphi(t))\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \int_a^b (f-\varphi) \leqslant \int_a^b (\psi-\varphi) \leqslant \varepsilon.$$

Par la question 2, il existe n_0 tel que $|u_n(\varphi)| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant n_0$; alors $|u_n(f)| \leqslant 2\varepsilon$ pour $n \geqslant n_0$. Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, $u_n(f)$ tend vers 0. Si f est à valeurs complexes, $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont continues par morceaux et réelles, et $u_n(f) = u_n(\operatorname{Re} f) + \mathrm{i}\,u_n(\operatorname{Im} f)$ par linéarité.

$$\boxed{u_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{pour toute } f \in \mathcal{C}_m([a\,,b],\mathbb{K})}$$

4. Pour f réelle, la proposition 8 donne

$$\operatorname{Re} u_n(f) = \int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} u_n(f) = \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t,$$

et ces deux nombres sont majorés en valeur absolue par $|u_n(f)|$.

$$\boxed{\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

La première question ne suffisait pas, parce qu'une fonction continue par morceaux n'est en général pas de classe $\mathcal{C}^1$: la fonction $\mathbf{1}_{[\alpha,\beta]}$ de la question 2 n'est même pas continue, et une fonction continue comme $t \mapsto |t-c|$ n'est pas dérivable en c.
À retenir. C'est le schéma type d'un argument de densité : on démontre le résultat pour une classe simple de fonctions (les indicatrices de segments, puis les fonctions en escalier), et l'on passe aux fonctions continues par morceaux grâce au théorème 1 et à une majoration uniforme en n. Le prix à payer est la perte de la vitesse : on sait que $u_n(f)$ tend vers 0, mais plus à quelle vitesse. L'exercice 31 étudiera le signe de ces intégrales pour une fonction convexe.

EXERCICE 3 ⋆

Notons $\mu_1 = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f$ et $\mu_2 = \dfrac{1}{c-b}\displaystyle\int_b^c f$ les valeurs moyennes de f sur $[a\,,b]$ et sur $[b\,,c]$. Par la relation de Chasles,

$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f = \frac{(b-a)\mu_1 + (c-b)\mu_2}{c-a} = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2, \qquad \lambda = \frac{b-a}{c-a} \in]0\,,1[.$$

Comme $\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2 \leqslant \lambda\max(\mu_1,\mu_2) + (1-\lambda)\max(\mu_1,\mu_2)$, on obtient l'inégalité demandée.

$$\boxed{\frac{1}{c-a}\int_a^c f = \frac{b-a}{c-a}\,\mu_1 + \frac{c-b}{c-a}\,\mu_2 \leqslant \max(\mu_1,\mu_2)}$$

La valeur moyenne sur $[a\,,c]$ est le barycentre des valeurs moyennes sur $[a\,,b]$ et sur $[b\,,c]$, affectées des longueurs de ces intervalles : elle est comprise entre les deux, et plus proche de celle du plus long intervalle. C'est l'analogue de la moyenne d'une classe formée de deux groupes, qui est la moyenne des deux moyennes pondérées par les effectifs.

Piège. La continuité de f ne sert pas : l'égalité n'utilise que la relation de Chasles, valable pour toute fonction continue par morceaux. L'erreur la plus répandue est d'écrire que la moyenne sur $[a\,,c]$ est $\dfrac{\mu_1+\mu_2}{2}$, ce qui n'est vrai que si b est le milieu de $[a\,,c]$.

EXERCICE 4 ⋆

1. On ne cherche pas de primitive de $x \mapsto \dfrac{\tan x}{x}$: on encadre le facteur $\tan x$, qui varie peu, et l'on garde le facteur $\dfrac{1}{x}$, dont on connaît une primitive. La tangente est croissante sur $[\frac{\pi}{6}\,,\frac{\pi}{3}]$, de $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ à $\sqrt{3}$, et $\dfrac{1}{x} > 0$, donc

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{x} \leqslant \frac{\tan x}{x} \leqslant \sqrt{3}\cdot\frac{1}{x} \qquad \left(\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}\right).$$

La croissance de l'intégrale (théorème 3), avec $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\frac{\pi/3}{\pi/6} = \ln 2$, donne l'encadrement.

$$\boxed{\frac{\ln 2}{\sqrt{3}} \leqslant \int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\tan x}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{3}\,\ln 2}$$

Numériquement, l'intégrale vaut environ 0,6842, entre 0,4002 et 1,2006 ✓. L'encadrement est grossier, d'un facteur 3, parce que $\tan x$ triple sur l'intervalle ; on l'affinerait en coupant l'intervalle en plusieurs morceaux, ce qui est l'idée des sommes de Riemann de la section 18.6.

2. Pour $t \in [0\,,1]$, on a $|\sin(nt)| \leqslant 1$ et $1+t^3 \geqslant 1$, donc $\left|\dfrac{t^n\sin(nt)}{1+t^3}\right| \leqslant t^n$. L'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale donnent

$$\boxed{|I_n| \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}, \qquad I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Piège. Le facteur $\sin(nt)$ n'est pour rien dans la convergence : c'est t^n, petit sauf près de 1, qui écrase l'intégrale. L'erreur la plus répandue est d'écrire $|I_n| \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$, majoration exacte mais inutile, puisqu'elle ne dépend pas de n.

EXERCICE 5 ⋆

1. La fonction sinus est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $|\sin'| = |\cos| \leqslant 1$. La proposition 10 donne :

$$\boxed{|\sin u - \sin v| \leqslant |u - v| \quad \text{pour tous réels } u, v}$$

2. Pour tout réel x, la fonction $t \mapsto f(t)\sin(xt)$ est continue sur $[a\,,b]$, donc $F(x)$ est bien défini. Pour x, y réels, la linéarité, l'inégalité triangulaire et la question 1, appliquée à $u = xt$ et $v = yt$, donnent

$$|F(x) - F(y)| = \Big|\int_a^b f(t)\big(\sin(xt) - \sin(yt)\big)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,|t|\,|x-y|\,\mathrm{d}t.$$

$$\boxed{|F(x) - F(y)| \leqslant K|x-y|, \qquad K = \int_a^b |t\,f(t)|\,\mathrm{d}t}$$

La constante K ne dépend ni de x ni de y : F est K-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Pour $f = 1$ sur $[0\,,1]$, on trouve $F(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$ pour $x \neq 0$, $F(0) = 0$ et $K = \dfrac{1}{2}$; comme $\dfrac{F(x)-F(0)}{x} = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$ en 0 (chapitre 10), aucune constante plus petite ne convient dans ce cas.

À retenir. La majoration se fait sous le signe intégrale, point par point en t, avant d'intégrer : c'est la croissance de l'intégrale qui transporte une inégalité entre fonctions en une inégalité entre intégrales.

EXERCICE 6 ⋆

1. Sur $[0\,,\dfrac{1}{n}[$, la fonction f_n est affine, donc continue, et sa limite à gauche en $\dfrac{1}{n}$ vaut $2n(1-1) = 0$; sur $[\dfrac{1}{n}\,,1]$, elle est nulle. Les deux expressions se raccordent en $\dfrac{1}{n}$, où f_n vaut 0, et f_n est continue sur $[0\,,1]$. Son intégrale est l'aire d'un triangle de base $\dfrac{1}{n}$ et de hauteur $2n$; par le calcul,

$$\boxed{\int_0^1 f_n = \int_0^{1/n} 2n(1-nx)\,\mathrm{d}x + \int_{1/n}^1 0\,\mathrm{d}x = 2n\Big[x - \frac{nx^2}{2}\Big]_0^{1/n} = 2n \times \frac{1}{2n} = 1}$$

2. Soit $x \in]0\,,1]$. Pour $n > \dfrac{1}{x}$, on a $\dfrac{1}{n} < x$, donc $f_n(x) = 0$: la suite $\big(f_n(x)\big)$ est nulle à partir du rang $\lfloor\dfrac{1}{x}\rfloor + 1$. En revanche,

$$\boxed{f_n(x) = 0 \text{ pour } n > \frac{1}{x}, \qquad f_n(0) = 2n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

3. La fonction g ne diffère de la fonction nulle qu'au point 0 : elle est en escalier, et son intégrale est nulle par la proposition 6. Ainsi

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = 1 \neq 0 = \int_0^1 g}$$

On ne peut donc pas intervertir limite et intégrale, même lorsque $f_n(x)$ tend vers $g(x)$ en tout point de $]0\,,1]$. Les fonctions f_n tendent vers 0 en chaque point de $]0\,,1]$, mais leur masse, toujours égale à 1, se concentre sur des intervalles de plus en plus courts près de 0.

À retenir. Une interversion légitime demande un contrôle uniforme : si $|f_n(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon_n$ pour tout $x \in [0\,,1]$, avec $\varepsilon_n \to 0$, l'inégalité triangulaire donne $|\int_0^1 f_n - \int_0^1 g| \leqslant \varepsilon_n$, qui tend vers 0. Ici, $\max|f_n| = 2n$ ne tend pas vers 0. Les exercices 10 et 11 contourneront la difficulté en coupant l'intervalle d'intégration.

EXERCICE 7 ⋆⋆

Les trois questions reposent sur le théorème 4 : une fonction continue, positive et d'intégrale nulle est nulle. Il s'agit chaque fois de fabriquer, à partir des hypothèses, une telle fonction.

1. Comme $f \leqslant |f| \leqslant 1$, la fonction $1 - f$ est continue et positive, et

$$\int_a^b (1-f) = (b-a) - \int_a^b f = 0.$$

Par le théorème 4, $1 - f$ est nulle.

$$\boxed{f \text{ est la fonction constante égale à } 1}$$

Réciproquement, cette fonction convient.

2. Comme f est à valeurs dans $[0\,,1]$, la fonction $f - f^2 = f(1-f)$ est continue et positive ; par hypothèse, son intégrale est nulle. Par le théorème 4, $f(x)(1-f(x)) = 0$, c'est-à-dire $f(x) \in \{0,1\}$, pour tout $x \in [0\,,1]$. Or $f([0\,,1])$ est un intervalle (chapitre 8, théorème 9) contenu dans $\{0,1\}$: il est réduit à un point.

$$\boxed{f = 0 \quad \text{ou} \quad f = 1}$$

Réciproquement, ces deux fonctions conviennent.

3. On cherche une combinaison des trois intégrales qui soit l'intégrale d'une fonction positive. Le carré $f^2(1-f)^2 = f^2 - 2f^3 + f^4$ convient :

$$\int_0^1 f^2(1-f)^2 = \int_0^1 f^2 - 2\int_0^1 f^3 + \int_0^1 f^4 = 0.$$

La fonction $f^2(1-f)^2$ est continue et positive, donc nulle, et $f(x) \in \{0,1\}$ pour tout x. On conclut comme à la question 2.

$$\boxed{f = 0 \quad \text{ou} \quad f = 1}$$

Piège. Le théorème 4 exige la continuité. L'erreur la plus répandue est de l'appliquer à une fonction continue par morceaux : la fonction égale à 1 en $\dfrac{1}{2}$ et nulle ailleurs vérifie les hypothèses de la question 3, sauf la continuité, et n'est ni nulle ni égale à 1. Le passage par le théorème des valeurs intermédiaires, à la fin, utilise lui aussi la continuité.

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. Posons $g(x) = f(x) - x$, continue sur $[0\,,1]$, et supposons que f n'a pas de point fixe. La fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle $[0\,,1]$, donc garde un signe strict constant (chapitre 8, proposition 15). Deux cas se présentent.

— Si $g < 0$, alors $f(0) = g(0) < 0$, ce qui contredit la positivité de f.

— Si $g > 0$, la fonction g est continue, positive et non nulle, donc d'intégrale strictement positive (théorème 4, sous forme contraposée) : $\displaystyle\int_0^1 f > \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, ce qui contredit l'hypothèse.

$$\boxed{f \text{ admet au moins un point fixe dans } [0\,,1]}$$

2. La positivité n'a servi qu'à exclure le cas $g < 0$, et elle est indispensable : la fonction $f : x \mapsto x - 1$ est continue, d'intégrale $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}$, et l'équation $x - 1 = x$ n'a pas de solution.

$$\boxed{\text{oui : } f(x) = x - 1 \text{ vérifie } \int_0^1 f = -\frac{1}{2} \text{ et n'a aucun point fixe}}$$

À retenir. La constante $\dfrac{1}{2}$ est optimale : pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $x \mapsto x + \varepsilon$ est positive, d'intégrale $\dfrac{1}{2} + \varepsilon$, et n'a pas de point fixe. L'inégalité stricte du théorème 4 est ce qui permet d'atteindre le cas limite $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. Notons $S = \int_a^b f$. Si $S \geqslant 0$, l'hypothèse s'écrit $\int_a^b (|f| - f) = 0$; la fonction $|f| - f$ est continue et positive, donc nulle par le théorème 4, et $f = |f| \geqslant 0$. Si $S < 0$, on obtient de même $\int_a^b (|f| + f) = 0$, et $f = -|f| \leqslant 0$.

$$\boxed{f \geqslant 0 \text{ sur } [a\,,b] \text{ si } \int_a^b f \geqslant 0, \qquad f \leqslant 0 \text{ sur } [a\,,b] \text{ sinon}}$$

2. Si $\int_0^1 f = 0$, alors $\int_0^1 |f| = 0$, et $|f|$, continue et positive, est nulle : $f = 0$ convient avec $g = 0$ et $\theta = 0$. Sinon, on écrit, comme dans la démonstration du théorème 5, $\int_0^1 f = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$. Par linéarité, $\int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f = r$ est réel, et la proposition 8 donne $\int_0^1 \mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f) = r = \int_0^1 |f|$. Ainsi

$$\int_0^1 \Big(|f(t)| - \mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f(t))\Big)\,\mathrm{d}t = 0.$$

La fonction intégrée est continue et positive, puisque $\mathrm{Re}\,z \leqslant |z|$ et $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f(t)| = |f(t)|$; elle est donc nulle. Or, pour $z = x + \mathrm{i}y$ complexe, $\mathrm{Re}\,z = |z|$ s'écrit $x = \sqrt{x^2 + y^2}$, ce qui impose $y = 0$ et $x \geqslant 0$: le nombre $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f(t)$ est un réel positif, égal à $|f(t)|$.

$$\boxed{f(t) = g(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \text{avec} \quad g = |f| \text{ continue et positive}}$$

À retenir. C'est le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire complexe : il n'y a égalité que si toutes les valeurs $f(t)$ sont sur une même demi-droite issue de 0, de sorte qu'elles ne se compensent pas. La question 1 en est le cas réel, où les deux demi-droites possibles sont $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$. On comparera avec le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire pour deux complexes (chapitre 4, théorème 3), qui reposait sur la même équivalence $\mathrm{Re}\,w = |w| \iff w \in \mathbb{R}_+$.

EXERCICE 10 ⋆⋆

Dans les trois cas, la fonction intégrée est continue et positive, et l'on la majore par une fonction dont on connaît une primitive.

(a) Pour $x \in [0\,,1]$, $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant \ln 2$, donc $0 \leqslant x^n \ln(1+x) \leqslant x^n \ln 2$. En intégrant,

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln 2}{n+1}, \qquad \text{limite } 0}$$

(b) Pour $t \geqslant 0$, $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{nt}} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^{nt}} = \mathrm{e}^{-nt}$. En intégrant,

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^{nt}} \leqslant \int_0^n \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\mathrm{e}^{-n^2}}{n} \leqslant \frac{1}{n}, \qquad \text{limite } 0}$$

Ici, l'intervalle d'intégration s'allonge avec n, mais la fonction intégrée décroît assez vite pour que cela ne compte pas. On peut d'ailleurs calculer l'intégrale exactement, en écrivant $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{nt}} = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{nt}}{1+\mathrm{e}^{nt}}$, de la forme $1 - \dfrac{1}{n}\dfrac{u'}{u}$: elle vaut $\dfrac{\ln 2 - \ln(1+\mathrm{e}^{-n^2})}{n}$, équivalente à $\dfrac{\ln 2}{n}$ ✓.

(c) L'inégalité de Jordan $\sin t \geqslant \dfrac{2t}{\pi}$, valable sur $\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$, et la décroissance de la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-nu}$ donnent

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-n\sin t} \leqslant \mathrm{e}^{-2nt/\pi} \qquad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

En intégrant,

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-n\sin t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-2nt/\pi}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2n}(1-\mathrm{e}^{-n}) \leqslant \frac{\pi}{2n}, \qquad \text{limite } 0}$$

Pour $n = 20$, l'intégrale vaut environ 0,0501, et la majoration 0,0785 ✓.
Piège. En (c), la fonction intégrée vaut 1 en $t = 0$ pour tout n : elle ne tend pas vers 0 uniformément, et la majoration triviale $\mathrm{e}^{-n\sin t} \leqslant 1$ ne donne rien. C'est la situation de l'exercice 6 ; l'inégalité de Jordan montre que la zone où la fonction n'est pas petite a une longueur de l'ordre de $\dfrac{1}{n}$.

EXERCICE 11 ⋆⋆

La fonction $x \mapsto f(x^n)$ est continue sur $[0\,,1]$, et x^n tend vers 0 pour $x \in [0\,,1[$, mais pas pour $x = 1$: on s'attend à la limite $f(0)$, et l'on contrôle séparément la zone proche de 1, où x^n n'est pas petit, en coupant en α.

Soit M un majorant de $|f|$ sur $[0\,,1]$, qui existe par le théorème des bornes atteintes (chapitre 8, théorème 10), et que l'on peut supposer strictement positif. Soit $\varepsilon > 0$.

— Par continuité de f en 0, il existe $\eta > 0$ tel que $|f(y) - f(0)| \leqslant \varepsilon$ pour $y \in [0\,,\eta]$.

— On choisit $\alpha = 1 - \dfrac{\varepsilon}{2M+\varepsilon} \in]0\,,1[$, de sorte que $2M(1-\alpha) = \dfrac{2M\varepsilon}{2M+\varepsilon} \leqslant \varepsilon$.

— Comme $\alpha^n \to 0$, il existe n_0 tel que $\alpha^n \leqslant \eta$ pour $n \geqslant n_0$; alors, pour $x \in [0\,,\alpha]$, $0 \leqslant x^n \leqslant \alpha^n \leqslant \eta$.

Pour $n \geqslant n_0$, on écrit $f(0) = \displaystyle\int_0^1 f(0)\,\mathrm{d}x$, et l'on coupe en α :

$$\Big|\int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x - f(0)\Big| \leqslant \int_0^\alpha |f(x^n) - f(0)|\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^1 |f(x^n) - f(0)|\,\mathrm{d}x \leqslant \alpha\varepsilon + 2M(1-\alpha) \leqslant 2\varepsilon.$$

$$\boxed{\int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)}$$

Pour $f = \cos$ et $n = 200$, l'intégrale vaut environ 0,9988 ✓.
À retenir. L'ordre des choix est essentiel : on fixe d'abord α, qui rend petite la contribution de la zone $[\alpha\,,1]$ grâce à sa longueur, puis n, qui rend petite celle de $[0\,,\alpha]$ grâce à la convergence de α^n. On ne peut pas prendre $\alpha = 1$: la convergence de x^n vers 0 n'est pas uniforme sur $[0\,,1[$. Le même découpage resservira à l'exercice 29.

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. Soit $\varepsilon > 0$, et $A > 0$ tel que $|f(t) - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour $t \geqslant A$. Pour $x > A$, on écrit $\ell = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \ell\,\mathrm{d}t$ et l'on coupe en A :

$$\Big|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \ell\Big| \leqslant \frac{1}{x}\Big|\int_0^A (f(t)-\ell)\,\mathrm{d}t\Big| + \frac{1}{x}\int_A^x |f(t)-\ell|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{C}{x} + \frac{x-A}{x}\,\varepsilon,$$

où $C = \Big|\displaystyle\int_0^A (f-\ell)\Big|$ ne dépend pas de x. Pour $x > \max\left(A, \dfrac{C}{\varepsilon}\right)$, le majorant est au plus 2ε.

$$\boxed{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell}$$

C'est la version intégrale du lemme de Cesàro (exercice 47 du chapitre 7) : la moyenne des valeurs de f sur $[0\,,x]$ tend vers la limite de f. Le début de l'intervalle, où f peut être loin de ℓ, pèse de moins en moins dans la moyenne.

2. Notons $I = \displaystyle\int_0^T f$ et $M = \max_{[0,T]} |f|$, qui majore $|f|$ sur $\mathbb{R}$ par périodicité. Pour $x > 0$, soit $N = \lfloor \frac{x}{T} \rfloor$, de sorte que $NT \leqslant x < (N+1)T$. Chaque intégrale $\displaystyle\int_{kT}^{(k+1)T} f$ vaut I (chapitre 6, proposition 6), et la relation de Chasles donne

$$\int_0^x f = NI + \int_{NT}^x f, \qquad \text{avec} \qquad \left| \int_{NT}^x f \right| \leqslant (x - NT)M \leqslant TM.$$

Ainsi $\left| \frac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f - \frac{N}{x} I \right| \leqslant \frac{TM}{x}$, qui tend vers 0, et $\frac{1}{T} - \frac{1}{x} < \frac{N}{x} \leqslant \frac{1}{T}$ donne $\frac{N}{x} \to \frac{1}{T}$.

$$\boxed{\frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t}$$

La moyenne sur $[0\,,x]$ tend vers la valeur moyenne de f sur une période. Pour $f = \sin^2$, de période π, on trouve $\frac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi \sin^2 = \frac{1}{2}$ ✓.

Piège. La question 1 ne s'applique pas ici : une fonction périodique non constante n'a pas de limite en $+\infty$. Pourtant sa moyenne converge : la réciproque de la question 1 est fausse, comme pour le lemme de Cesàro sur les suites, où la suite $((-1)^n)$ a des moyennes qui tendent vers 0.

EXERCICE 13 ⋆⋆

1. On raisonne par l'absurde, en supposant que f s'annule au plus une fois sur $]0\,,\pi[$. L'outil est le théorème 4 : si une fonction continue h garde un signe constant strict sur $[0\,,\pi]$ privé d'un nombre fini de points, alors $\displaystyle\int_0^\pi h \neq 0$, puisque $|h|$ est continue, positive et non nulle.

— Si f ne s'annule pas sur $]0\,,\pi[$, elle y garde un signe strict constant (chapitre 8, proposition 15), et $h(t) = f(t)\sin t$ aussi, puisque $\sin t > 0$ sur $]0\,,\pi[$. Alors $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}t \neq 0$: contradiction.

— Si f s'annule en un seul point α de $]0\,,\pi[$, elle garde un signe strict constant sur $]0\,,\alpha[$ et sur $]\alpha\,,\pi[$. Si ces signes sont les mêmes, on conclut comme ci-dessus avec $f(t)\sin t$. S'ils sont opposés, on considère $h(t) = f(t)\sin(t-\alpha)$: pour $t \in]0\,,\alpha[$, on a $t - \alpha \in]-\pi\,,0[$ et $\sin(t-\alpha) < 0$; pour $t \in]\alpha\,,\pi[$, on a $t - \alpha \in]0\,,\pi[$ et $\sin(t-\alpha) > 0$. Le facteur $\sin(t-\alpha)$ change de signe en α en même temps que f, et h garde un signe strict constant sur $]0\,,\alpha[\cup]\alpha\,,\pi[$. Or

$$\int_0^\pi h = \cos\alpha \int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}t - \sin\alpha \int_0^\pi f(t)\cos t\,\mathrm{d}t = 0,$$

ce qui est une contradiction.

$$\boxed{f \text{ s'annule au moins deux fois sur }]0\,,\pi[}$$

2. On cherche une fonction trigonométrique dont les produits par sin et cos s'intègrent en 0. La fonction $f(t) = \sin 3t$ convient : en linéarisant (chapitre 4),

$$\int_0^\pi \sin 3t\,\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos 2t - \cos 4t)\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \int_0^\pi \sin 3t\,\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\sin 4t + \sin 2t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

$$\boxed{f(t) = \sin 3t \text{ vérifie les hypothèses}}$$

Elle s'annule exactement en $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ sur $]0\,,\pi[$: le nombre de zéros garanti par la question 1 est atteint. En revanche, $\sin 2t$ ne convient pas, car $\displaystyle\int_0^\pi \sin 2t\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}$.

À retenir. Les conditions $\displaystyle\int f\sin = \int f\cos = 0$ entraînent $\displaystyle\int f\,g = 0$ pour toute combinaison $g = \lambda\sin + \mu\cos$, et l'on choisit g pour qu'elle change de signe là où f en change. L'exercice 14 applique la même idée avec des polynômes à la place des fonctions trigonométriques.

EXERCICE 14 ⋆⋆⋆

Dans tout l'exercice, on dit qu'une suite $y_0 < \cdots < y_m$ de points de $[a\,,b]$ est une *chaîne* de longueur m si $f(y_{i-1})f(y_i) < 0$ pour tout $i \in [\![1\,;m]\!]$; il s'agit de trouver une chaîne de longueur n. L'outil, comme à l'exercice 13, est le théorème 4 : une fonction continue de signe constant et d'intégrale nulle est nulle.

1. Si l'on avait $f \geqslant 0$ sur $[a\,,b]$, la fonction f, continue, positive et d'intégrale nulle, serait nulle par le théorème 4, ce qui est exclu. Donc f prend une valeur strictement négative, en un point y, et de même, en appliquant ce raisonnement à $-f$, une valeur strictement positive, en un point z. En rangeant y et z dans l'ordre croissant, on obtient une chaîne de longueur 1.

$$\boxed{n = 1 : f \text{ change au moins une fois de signe}}$$

2. Supposons qu'il n'existe pas de chaîne de longueur 2. Par la question 1, il existe une chaîne $y_0 < y_1$; quitte à remplacer f par $-f$, on suppose $f(y_0) > 0 > f(y_1)$. On pose

$$c = \sup\{t \in [y_0\,,y_1] \mid f(t) > 0\},$$

qui existe puisque cet ensemble contient y_0 et est majoré par y_1. On montre que $f \geqslant 0$ sur $[a\,,c[$ et $f \leqslant 0$ sur $]c\,,b]$.

— Sur $]c\,,y_1]$, $f \leqslant 0$ par définition de c. Sur $[y_1\,,b]$, un point z tel que $f(z) > 0$ donnerait la chaîne $y_0 < y_1 < z$: donc $f \leqslant 0$.

— Sur $[a\,,y_0]$, un point z tel que $f(z) < 0$ donnerait la chaîne $z < y_0 < y_1$: donc $f \geqslant 0$. Sur $[y_0\,,c[$, s'il existait u tel que $f(u) < 0$, alors $u < c$, et par définition de la borne supérieure il existerait $v > u$ dans $[y_0\,,y_1]$ tel que $f(v) > 0$: la suite $y_0 < u < v$ serait une chaîne de longueur 2.

La fonction $g : t \mapsto (t-c)f(t)$ est donc continue et négative sur $[a\,,b]$, puisque ses deux facteurs sont de signes opposés de part et d'autre de c. Par hypothèse, avec $k = 0$ et $k = 1$,

$$\int_a^b g = \int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t - c\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Par le théorème 4, appliqué à $-g$, la fonction g est nulle ; donc $f(t) = 0$ pour $t \neq c$, puis $f(c) = 0$ par continuité, et f est nulle, ce qui est exclu.

$$\boxed{n = 2 : f \text{ change au moins deux fois de signe}}$$

3. Supposons qu'il n'existe pas de chaîne de longueur n. Il n'en existe alors pas non plus de longueur supérieure, puisque les $n+1$ premiers points d'une chaîne plus longue en formeraient une de longueur n. L'ensemble des longueurs de chaînes est donc une partie de $[\![1\,;n-1]\!]$, non vide par la question 1 ; soit m son plus grand élément et $y_0 < \cdots < y_m$ une chaîne de longueur m. Quitte à remplacer f par $-f$, on suppose $f(y_0) > 0$, de sorte que $f(y_i)$ est du signe de $(-1)^i$. On généralise la construction de la question 2 en posant, pour $i \in [\![1\,;m]\!]$,

$$c_i = \sup\{t \in [y_{i-1}\,,y_i] \mid (-1)^{i-1}f(t) > 0\}, \qquad c_0 = a, \qquad c_{m+1} = b.$$

Par continuité de f en y_{i-1} et en y_i, on a $y_{i-1} < c_i < y_i$, donc $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$. Exactement comme à la question 2, en remplaçant chaque fois une chaîne de longueur 2 par une chaîne de longueur $m+1$ ou $m+2$, obtenue en insérant un ou deux points dans $(y_0, \ldots, y_m)$, la maximalité de m donne :

$$(-1)^i f \geqslant 0 \text{ sur }]c_i\,,c_{i+1}[\quad \text{pour tout } i \in [\![0\,;m]\!].$$

Précisément, sur $]c_i\,,y_i]$, c'est la définition de c_i ; un point $u \in [y_i\,,c_{i+1}[$ où $(-1)^i f(u) < 0$ fournirait un $v \in]u\,,y_{i+1}[$ où $(-1)^i f(v) > 0$, et la suite $y_0 < \cdots < y_i < u < v < y_{i+1} < \cdots < y_m$ serait une chaîne de longueur $m+2$; un point $u < y_0$ où $f(u) < 0$, ou un point $u > y_m$ où $(-1)^m f(u) < 0$, prolongerait la chaîne d'un cran.

On pose alors $P = \prod_{i=1}^{m}(X-c_i)$, de degré $m \leqslant n-1$. Pour $t \in]c_i\,,c_{i+1}[$, exactement $m-i$ facteurs $t-c_j$ sont négatifs, donc $P(t)$ est du signe de $(-1)^{m-i}$, et $(-1)^m P(t)f(t) = (-1)^{m-i}P(t)\times(-1)^i f(t) \geqslant 0$. La fonction $t \mapsto (-1)^m P(t)f(t)$ est donc continue et positive sur $[a\,,b]$, privé d'un nombre fini de points, donc sur $[a\,,b]$ par continuité. Comme P est une combinaison linéaire de 1, X, …, X^{n-1}, l'hypothèse et la linéarité donnent $\displaystyle\int_a^b P(t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Par le théorème 4, Pf est nulle ; f s'annule hors des c_i, donc partout par continuité, ce qui est exclu.

$$\boxed{f \text{ change au moins } n \text{ fois de signe}}$$

4. Pour $p(t) = 6t^2 - 6t + 1$, on calcule

$$\int_0^1 p(t)\,\mathrm{d}t = 2 - 3 + 1 = 0, \qquad \int_0^1 t\,p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{6}{4} - \frac{6}{3} + \frac{1}{2} = 0.$$

$$\boxed{p \text{ vérifie les hypothèses pour } n = 2 \text{ sur } [0\,,1]}$$

Ses racines sont $\dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$, et $p(0) = 1$, $p(\dfrac{1}{2}) = -\dfrac{1}{2}$, $p(1) = 1$: la suite $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ est une chaîne de longueur 2. Il n'en existe pas de longueur 3, puisque, par le théorème des valeurs intermédiaires, p aurait alors trois racines distinctes, une entre deux points consécutifs de la chaîne, alors qu'il est de degré 2 (chapitre 13, théorème 3).

$$\boxed{\text{le résultat ne peut pas être amélioré : } p \text{ change exactement deux fois de signe}}$$

On constate d'ailleurs que $\displaystyle\int_0^1 t^2 p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{30} \neq 0$: p ne vérifie pas les hypothèses pour $n = 3$, ce qui est cohérent.

À retenir. L'hypothèse dit que $\displaystyle\int_a^b Pf = 0$ pour tout polynôme P de degré au plus $n-1$; si f changeait de signe moins de n fois, on fabriquerait un tel P qui change de signe aux mêmes endroits que f, et Pf serait de signe constant. C'est l'argument de l'exercice 13, où les fonctions $\lambda\sin+\mu\cos$ jouaient le rôle des polynômes.

EXERCICE 15 ⋆⋆⋆

1. Soit $M = \max\limits_{[0,1]} |f| = |f(x_0)|$, qui existe par le théorème des bornes atteintes (chapitre 8, théorème 10). Si $M = 0$, tout est nul. Sinon, la majoration $|f|^p \leqslant M^p$ et la croissance de l'intégrale donnent $N_p(f) \leqslant M$. Pour la minoration, soit $\varepsilon \in]0\,,M[$. Par continuité de $|f|$ en x_0, il existe un segment $[\alpha\,,\beta] \subset [0\,,1]$ contenant x_0, de longueur $\ell > 0$, sur lequel $|f| \geqslant M - \varepsilon$. Comme $|f|^p \geqslant 0$, la relation de Chasles et la croissance donnent

$$\int_0^1 |f|^p \geqslant \int_\alpha^\beta |f|^p \geqslant \ell\,(M-\varepsilon)^p, \qquad \text{donc} \qquad \ell^{1/p}(M-\varepsilon) \leqslant N_p(f) \leqslant M.$$

Comme $\ell^{1/p} = \mathrm{e}^{(\ln \ell)/p}$ tend vers 1 quand p tend vers $+\infty$, on a $N_p(f) \geqslant M - 2\varepsilon$ pour p assez grand.

$$\boxed{N_p(f) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \max_{[0,1]} |f|}$$

Pour $f = \cos 3t$, dont le maximum de $|f|$ vaut 1, on trouve $N_{10}(f) \approx 0{,}856$ et $N_{1000}(f) \approx 0{,}996$ ✓. La continuité est indispensable : pour l'indicatrice de $\{0\}$, N_p est nul pour tout p, et le maximum vaut 1.

2.(a) Si $a = 0$ ou $b = 0$, le membre de gauche est nul et celui de droite positif. Sinon, la fonction ln est concave sur $]0\,,+\infty[$, puisque $\ln'' : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ est négative (chapitre 9, théorème 11). Comme $\dfrac{1}{p}$ et $\dfrac{1}{q}$ sont positifs de somme 1, la définition de la concavité donne

$$\ln\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln a + \frac{1}{q}\ln b = \ln\left(a^{1/p}b^{1/q}\right),$$

et l'on conclut par croissance de l'exponentielle.

$$\boxed{a^{1/p}b^{1/q} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \quad \text{pour tous } a, b \geqslant 0}$$

2.(b) Supposons $N_p(f) = N_q(g) = 1$. Pour tout t, l'inégalité de Young appliquée à $a = |f(t)|^p$ et $b = |g(t)|^q$ donne

$$|f(t)g(t)| \leqslant \frac{|f(t)|^p}{p} + \frac{|g(t)|^q}{q}, \qquad \text{et en intégrant,} \qquad \int_0^1 |fg| \leqslant \frac{N_p(f)^p}{p} + \frac{N_q(g)^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dans le cas général, on fixe un réel $\lambda > 0$, et l'on applique la même inégalité à λf et $\dfrac{g}{\lambda}$, dont le produit est fg :

$$\int_0^1 |fg| \leqslant \frac{\lambda^p N_p(f)^p}{p} + \frac{N_q(g)^q}{q\lambda^q}.$$

Si $N_p(f) = 0$, on fait tendre λ vers $+\infty$, et l'on obtient $\displaystyle\int_0^1 |fg| = 0$; de même si $N_q(g) = 0$, avec $\lambda \to 0$. Sinon, on applique le cas particulier à $\dfrac{f}{N_p(f)}$ et $\dfrac{g}{N_q(g)}$, qui vérifient $N_p = N_q = 1$, puisque $N_p(\mu f) = |\mu|\, N_p(f)$.

$$\boxed{\int_0^1 |fg| \leqslant N_p(f)\, N_q(g)}$$

Pour $p = 2$, on a $q = 2$, et l'on obtient l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*, que le chapitre 19 replacera dans un cadre général :

$$\boxed{\int_0^1 |fg| \leqslant \Big(\int_0^1 f^2\Big)^{1/2}\Big(\int_0^1 g^2\Big)^{1/2}}$$

Piège. Pour f seulement continue par morceaux, $N_p(f) = 0$ n'entraîne pas $f = 0$ (le théorème 4 exige la continuité) : on ne peut donc pas se contenter de traiter le cas $N_p(f) > 0$ en disant que l'autre est trivial. C'est pourquoi on a introduit le paramètre λ.

2.(c) Si $p_1 = p_2$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, on applique l'inégalité de Hölder avec l'exposant $p = \dfrac{p_2}{p_1} > 1$ aux fonctions $|f|^{p_1}$ et 1 ; comme $N_q(1) = 1$ et $(|f|^{p_1})^p = |f|^{p_2}$,

$$\int_0^1 |f|^{p_1} \leqslant \Big(\int_0^1 |f|^{p_2}\Big)^{p_1/p_2}, \qquad \text{d'où, en élevant à la puissance } \frac{1}{p_1}, \qquad \boxed{N_{p_1}(f) \leqslant N_{p_2}(f)}$$

Ainsi $p \mapsto N_p(f)$ est croissante, ce qui est cohérent avec la question 1. Pour $f(t) = t$, on trouve $N_1 = \dfrac{1}{2}$, $N_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$, et $N_p = (p+1)^{-1/p}$ tend vers 1 ✓. Le résultat utilise que l'intervalle est de longueur 1 : sur un segment de longueur L, un facteur $L^{1/p_1 - 1/p_2}$ apparaîtrait.

3.(a) Pour tout t, l'inégalité triangulaire $|f+g| \leqslant |f| + |g|$, multipliée par $|f+g|^{p-1} \geqslant 0$, donne $|f+g|^p \leqslant |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1}$. On intègre :

$$\boxed{N_p(f+g)^p \leqslant \int_0^1 |f|\,|f+g|^{p-1} + \int_0^1 |g|\,|f+g|^{p-1}}$$

3.(b) On applique l'inégalité de Hölder à chacune des deux intégrales, avec $q = \dfrac{p}{p-1}$. Comme $(p-1)q = p$,

$$\int_0^1 |f|\,|f+g|^{p-1} \leqslant N_p(f)\Big(\int_0^1 |f+g|^p\Big)^{1/q} = N_p(f)\, N_p(f+g)^{p/q},$$

et de même pour g. Ainsi $N_p(f+g)^p \leqslant (N_p(f) + N_p(g))N_p(f+g)^{p/q}$. Si $N_p(f+g) = 0$, l'inégalité cherchée est évidente ; sinon, on divise par $N_p(f+g)^{p/q}$, et $p - \dfrac{p}{q} = 1$.

$$\boxed{N_p(f+g) \leqslant N_p(f) + N_p(g)}$$

À retenir. L'inégalité de Minkowski est une inégalité triangulaire pour N_p : avec $N_p(\lambda f) = |\lambda|\, N_p(f)$, elle fait de N_p une mesure de la « taille » d'une fonction, qui généralise la valeur absolue. Le cas $p = 1$ est immédiat, et le cas $p = 2$ reviendra au chapitre 19. La difficulté était de savoir à quoi appliquer Hölder : on a fait apparaître $N_p(f + g)$ des deux côtés, puis simplifié.

Intégrale et primitives

EXERCICE 16 ⋆

Les fonctions à intégrer sont des fractions rationnelles, continues sur les intervalles considérés, qui ne contiennent aucun pôle : on applique la méthode du cours (section 18.4.4), c'est-à-dire la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ (chapitre 13, théorème 14), après avoir cherché si un raccourci, une forme $\dfrac{u'}{u}$ ou un changement de variable $u = x^k$, évite le calcul complet.

1.(a) Les pôles 0 et 1 sont hors de $[2\,,3]$. Le coefficient du pôle simple 0 vaut $\dfrac{0+1}{(0-1)^3} = -1$ (chapitre 13, proposition 23). Pour le pôle triple, on pose $t = 1 + h$: la partie polaire en 1 s'obtient à partir du développement limité $\dfrac{2+h}{1+h} = 2 - h + h^2 + o(h^2)$ (chapitre 10), divisé par h^3.

$$\frac{t+1}{t(t-1)^3} = -\frac{1}{t} + \frac{2}{(t-1)^3} - \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{t-1}.$$

Une primitive sur $[2\,,3]$ est $t \mapsto -\ln t + \ln(t-1) - \dfrac{1}{(t-1)^2} + \dfrac{1}{t-1}$, qui vaut $\ln\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4}$ en 3 et $-\ln 2$ en 2.

$$\boxed{\int_2^3 \frac{t+1}{t(t-1)^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4} + \ln\frac{4}{3} \approx 0{,}5377}$$

1.(b) Le degré du numérateur dépasse celui du dénominateur : on commence par la division euclidienne, $t^4 = (t^2 - 2t - 1)(t^2 + 2t + 5) + 12t + 5$. Le trinôme $t^2 + 2t + 5 = (t+1)^2 + 4$ n'a pas de racine réelle, et l'on écrit $12t + 5 = 6(2t + 2) - 7$ pour faire apparaître sa dérivée :

$$\int_0^1 \frac{t^4}{t^2+2t+5}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (t^2 - 2t - 1)\,\mathrm{d}t + 6\Big[\ln(t^2+2t+5)\Big]_0^1 - \frac{7}{2}\Big[\operatorname{Arctan}\frac{t+1}{2}\Big]_0^1.$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t^4}{t^2+2t+5}\,\mathrm{d}t = -\frac{5}{3} + 6\ln\frac{8}{5} - \frac{7\pi}{8} + \frac{7}{2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} \approx 0{,}02723}$$

La valeur est cohérente : la fonction intégrée est comprise entre 0 et $\dfrac{t^4}{5}$, d'intégrale $\dfrac{1}{25} = 0{,}04$. Elle résulte pourtant de la compensation de termes de l'ordre de l'unité, ce qui rend le calcul numérique de l'expression exacte délicat.

1.(c) Les pôles sont -1 et les racines non réelles de $x^2 - x + 1$. Un raccourci évite la décomposition : $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$, et en écrivant le numérateur $x^2 + (x+1)$,

$$\frac{x^2+x+1}{x^3+1} = \frac{x^2}{x^3+1} + \frac{1}{x^2-x+1}.$$

Le premier terme est de la forme $\dfrac{1}{3}\dfrac{u'}{u}$; le second se traite par la forme canonique $(x - \dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{3}{4}$ et l'arc tangente, avec $\operatorname{Arctan}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$:

$$\boxed{\int_2^3 \frac{x^2+x+1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln\frac{28}{9} + \frac{2}{\sqrt{3}}\Big(\operatorname{Arctan}\frac{5}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}\Big) \approx 0{,}5979}$$

La décomposition complète, $\dfrac{1}{3(x+1)} + \dfrac{2(x+1)}{3(x^2-x+1)}$, conduit au même résultat ✓.

1.(d) Les pôles réels $\pm\sqrt{2}$ sont hors de $[-1\,,1]$. Comme $x^4-4 = (x^2-2)(x^2+2)$ et que la différence des deux facteurs vaut 4, on a $\dfrac{1}{x^4-4} = \dfrac{1}{4}\Big(\dfrac{1}{x^2-2} - \dfrac{1}{x^2+2}\Big)$. La fonction est paire (chapitre 6, proposition 6), et sur $[0\,,1]$,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\ln\Big|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\Big|\Big]_0^1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = -\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}, \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{2}},$$

où l'on a utilisé $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$.

$$\boxed{\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^4-4} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\ln(1+\sqrt{2}) + \operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \approx -0{,}5292}$$

Le résultat est négatif, comme la fonction intégrée sur $[-1\,,1]$, où $x^4-4<0$ ✓.

1.(e) C'est un élément simple de seconde espèce élevé au carré : comme l'indique le cours, on l'intègre par parties à partir de $J_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$, en dérivant $\dfrac{1}{1+t^2}$ et en intégrant 1. En notant J_2 l'intégrale cherchée,

$$J_1 = \Big[\frac{t}{1+t^2}\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + 2J_1 - 2J_2, \qquad \text{car} \qquad \frac{t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t^2)^2}.$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}}$$

Le changement de variable $t = \tan u$, suggéré par le facteur $1+t^2 = \dfrac{1}{\cos^2 u}$, conduit au même résultat ✓ :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \int_0^{\pi/4} \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

L'exercice 20 généralisera les deux méthodes.

2. Dans chaque cas, la primitive est valable sur tout intervalle ne contenant aucun pôle, et l'on contrôle le résultat en le dérivant.

(a) Les pôles simples 1 et -1 ont pour coefficients $\dfrac{1}{2\times 1} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{(-2)\times 9} = -\dfrac{1}{18}$; le coefficient de $\dfrac{1}{(x-2)^2}$ vaut $\dfrac{1}{2^2-1} = \dfrac{1}{3}$. Enfin, la limite de $xF(x)$ en $+\infty$ est nulle, ce qui impose que les coefficients des termes en $\dfrac{1}{x-\lambda}$ aient une somme nulle : celui de $\dfrac{1}{x-2}$ vaut $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{18} = -\dfrac{4}{9}$.

$$\frac{1}{(x^2-1)(x-2)^2} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{18(x+1)} - \frac{4}{9(x-2)} + \frac{1}{3(x-2)^2},$$

$$\boxed{x \mapsto \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{18}\ln|x+1| - \frac{4}{9}\ln|x-2| - \frac{1}{3(x-2)}}$$

(b) Le numérateur x est, au facteur $\dfrac{1}{2}$ près, la dérivée de x^2, et le dénominateur ne dépend que de x^2 : c'est le changement de variable $u = x^2$ qui s'impose. Comme $u^2-u-2 = (u-2)(u+1)$ et $\dfrac{1}{(u-2)(u+1)} = \dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{1}{u-2} - \dfrac{1}{u+1}\Big)$,

$$\frac{x}{x^4-x^2-2} = \frac{1}{3}\Big(\frac{x}{x^2-2} - \frac{x}{x^2+1}\Big), \qquad \boxed{x \mapsto \frac{1}{6}\ln\Big|\frac{x^2-2}{x^2+1}\Big|}$$

(c) On écrit $1 = (x^3+1) - x^3$, ce qui fait apparaître une forme $\dfrac{u'}{u}$:

$$\frac{1}{x(x^3+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x^2}{x^3+1}, \qquad \boxed{x \mapsto \ln|x| - \frac{1}{3}\ln|x^3+1|}$$

(d) Le facteur x^3 est, au facteur $\dfrac{1}{4}$ près, la dérivée de x^4, et le reste ne dépend que de x^4 : on pose $u = x^4$, ce qui revient à écrire $x^7 = x^3((x^4+1)-1)$.

$$\frac{x^7}{(x^4+1)^2} = \frac{x^3}{x^4+1} - \frac{x^3}{(x^4+1)^2}, \qquad \boxed{x \mapsto \frac{1}{4}\ln(x^4+1) + \frac{1}{4(x^4+1)}}$$

Cette primitive est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, puisque x^4+1 ne s'annule pas.

(e) On factorise $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$; le coefficient du pôle 1 vaut $\dfrac{1}{3}$, et la limite de $xF(x)$ en $+\infty$ et l'évaluation en 0 donnent le reste :

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x+2}{3(x^2+x+1)}, \qquad x+2 = \frac{1}{2}(2x+1) + \frac{3}{2}.$$

Avec la forme canonique $x^2+x+1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$,

$$\boxed{x \mapsto \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}$$

À retenir. Avant de décomposer, on cherche une forme $\dfrac{u'}{u}$ ou $\dfrac{u'}{u^k}$, ou un changement de variable $u = x^k$ lorsque le numérateur est, à une constante près, la dérivée de x^k et que le reste ne dépend que de x^k : en (b), (c) et (d), cela évite de décomposer des fractions de degré 4, 4 et 8. Les logarithmes portent des valeurs absolues, sauf quand leur argument est positif sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 17 ⋆

1. La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f$ est dérivable de dérivée f (théorème 6), et $F(0) = 0$: la quantité $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f = \frac{F(x)-F(0)}{x}$ est un taux d'accroissement, qui tend vers $F'(0) = f(0)$. Pour la seconde limite, on utilise $\displaystyle\int_0^x t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}$ pour écrire

$$\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t - \frac{f(0)}{2} = \frac{1}{x^2}\int_0^x t(f(t)-f(0))\,\mathrm{d}t.$$

Soit $\varepsilon > 0$, et $\delta > 0$ tel que $|f(t)-f(0)| \leqslant \varepsilon$ pour $|t| \leqslant \delta$. Pour $0 < |x| \leqslant \delta$, l'inégalité triangulaire, écrite avec la valeur absolue extérieure puisque x peut être négatif, donne

$$\left|\frac{1}{x^2}\int_0^x t(f(t)-f(0))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{x^2}\left|\int_0^x |t|\,\varepsilon\,\mathrm{d}t\right| = \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\boxed{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0]{} f(0), \qquad \frac{1}{x^2}\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{f(0)}{2}}$$

La même méthode redonne la première limite, en écrivant $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f - f(0) = \frac{1}{x}\int_0^x (f(t)-f(0))\,\mathrm{d}t$.

2. Si f est seulement continue par morceaux, 0 est soit un point intérieur d'un intervalle ouvert de la subdivision, où f est continue, soit un point de la subdivision. Dans les deux cas, f admet en 0 une limite à droite $f(0^+)$ et une limite à gauche $f(0^-)$, finies, et la valeur $f(0)$ ne joue aucun rôle

dans les intégrales (proposition 6). Pour $x > 0$, la méthode de la question 1 s'applique en remplaçant $f(0)$ par $f(0^+)$: si $|f(t) - f(0^+)| \leqslant \varepsilon$ pour $0 < t \leqslant \delta$, alors $|\frac{1}{x}\int_0^x f - f(0^+)| \leqslant \varepsilon$ pour $0 < x \leqslant \delta$, et de même pour la seconde quantité ; à gauche, on remplace $f(0)$ par $f(0^-)$.

$$\boxed{\text{limites à droite } f(0^+) \text{ et } \frac{f(0^+)}{2}, \qquad \text{limites à gauche } f(0^-) \text{ et } \frac{f(0^-)}{2}}$$

Ces quantités ont donc une limite en 0 si et seulement si $f(0^+) = f(0^-)$, c'est-à-dire si f se prolonge par continuité en 0 ; la limite est alors la valeur commune, et non nécessairement $f(0)$. Par exemple, pour f égale à 0 sur $[-1\,,0[$ et à 1 sur $[0\,,1]$, on a $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f = 1$ pour $x > 0$ et 0 pour $x < 0$.

À retenir. La première limite redit le théorème 6 : la moyenne de f sur $[0\,,x]$ tend vers la valeur en 0. Pour une fonction continue par morceaux, elle tend vers la limite latérale, ce qui explique la remarque du cours après le théorème 6 : en un point de discontinuité, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f$ a des dérivées à gauche et à droite différentes.

EXERCICE 18 ⋆⋆

(a) La fonction $x \mapsto \ln(1+\tan x)$ est continue sur $[0\,,\frac{\pi}{4}]$, où $\tan x \geqslant 0$, mais on ne lui connaît pas de primitive simple. On effectue le changement de variable $x = \dfrac{\pi}{4} - u$ (chapitre 6, proposition 5), qui échange les bornes 0 et $\dfrac{\pi}{4}$. Il est suggéré par la formule d'addition (chapitre 4)

$$\tan\Big(\frac{\pi}{4} - u\Big) = \frac{1-\tan u}{1+\tan u}, \qquad \text{d'où} \qquad 1 + \tan\Big(\frac{\pi}{4} - u\Big) = \frac{2}{1+\tan u},$$

qui transforme $\ln(1+\tan x)$ en $\ln 2 - \ln(1+\tan u)$. En notant I l'intégrale, et avec $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$,

$$I = \int_{\pi/4}^0 \ln\Big(1+\tan\Big(\frac{\pi}{4}-u\Big)\Big)(-\mathrm{d}u) = \int_0^{\pi/4} \big(\ln 2 - \ln(1+\tan u)\big)\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I.$$

$$\boxed{\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi \ln 2}{8} \approx 0{,}2722}$$

(b) Les bornes $\dfrac{1}{x}$ et x sont échangées par $t \mapsto \dfrac{1}{t}$, qui change $\ln t$ en son opposé : on effectue le changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,,+\infty[$. Avec $\mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2}$ et $1 + \dfrac{1}{u^2} = \dfrac{u^2+1}{u^2}$, l'élément $\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ devient $-\dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$. En notant J l'intégrale,

$$J = \int_x^{1/x} \frac{-\ln u}{1+u^2}\,(-1)\,\mathrm{d}u = \int_x^{1/x} \frac{\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = -J.$$

$$\boxed{\int_{1/x}^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{pour tout } x > 0}$$

Par la relation de Chasles, cela revient à dire que $\displaystyle\int_{1/x}^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$: la partie négative, sur $[\frac{1}{x}\,,1]$, compense exactement la partie positive.

(c) La fonction $t \mapsto \sin t\ \mathrm{e}^{-t^4}$ est continue et impaire, produit d'une fonction impaire et d'une fonction paire, et l'intervalle $[-2\,,2]$ est symétrique : par la proposition 6 du chapitre 6, qui repose sur le changement de variable $t = -u$,

$$\boxed{\int_{-2}^2 \sin t\ \mathrm{e}^{-t^4}\,\mathrm{d}t = 0}$$

On ne connaît d'ailleurs aucune primitive simple de cette fonction : la symétrie est ici le seul moyen de calcul.

(d) La puissance impaire de $\sin x$ suggère le changement de variable $u = \cos x$: on met de côté un facteur $\sin x$, qui fournit $-\mathrm{d}u$, et l'on exprime le reste en fonction de $\cos x$, puisque $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Quand x va de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$, u va de 1 à 0 :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{2+\cos x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-u^2}{\sqrt{2+u}}\,\mathrm{d}u.$$

Le changement de variable affine $w = 2+u$ simplifie la racine : $1-u^2 = 1-(w-2)^2 = -w^2+4w-3$, et

$$\int_2^3 \big(-w^{3/2}+4w^{1/2}-3w^{-1/2}\big)\,\mathrm{d}w = \Big[-\frac{2}{5}w^{5/2}+\frac{8}{3}w^{3/2}-6w^{1/2}\Big]_2^3 = -\frac{8\sqrt{3}}{5}+\frac{34\sqrt{2}}{15}.$$

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{2+\cos x}}\,\mathrm{d}x = \frac{34\sqrt{2}}{15} - \frac{8\sqrt{3}}{5} \approx 0{,}4343}$$

(e) Sur $\big[0\,,\frac{1}{2}\big]$, $\operatorname{Arcsin} x \geqslant 0$ et $1-x^2 > 0$, donc la fonction intégrée s'écrit $\sqrt{\operatorname{Arcsin} x} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Le second facteur est la dérivée de Arcsin : c'est le changement de variable $u = \operatorname{Arcsin} x$, ou, ce qui revient au même, la reconnaissance d'une dérivée composée $u'\sqrt{u}$ (chapitre 6, proposition 3). Une primitive est $x \mapsto \dfrac{2}{3}(\operatorname{Arcsin} x)^{3/2}$, et $\operatorname{Arcsin}\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$.

$$\boxed{\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{\operatorname{Arcsin} x}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\Big(\frac{\pi}{6}\Big)^{3/2} \approx 0{,}2526}$$

À retenir. En (a), (b) et (c), on calcule une intégrale sans en connaître de primitive : un changement de variable qui conserve l'intervalle d'intégration transforme l'intégrale en une expression où elle réapparaît, et l'on résout une équation. On reconnaît ce cas à une symétrie de l'intervalle, $x \mapsto \dfrac{\pi}{4} - x$, $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ ou $t \mapsto -t$, qui transforme simplement la fonction intégrée. L'erreur la plus répandue est d'oublier le signe de $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$ en même temps que l'échange des bornes : les deux se compensent.

EXERCICE 19 ⋆⋆

1. Par croissances comparées (chapitre 10, proposition 2), $x\ln x$ tend vers 0 en 0, et $(x^2+1)^2$ vers 1 : la fonction se prolonge par continuité en 0 par la valeur 0. Notons g ce prolongement, continu sur $[0\,,1]$, et $I = \displaystyle\int_0^1 g$.

Le produit d'un logarithme, dont la dérivée est simple, et de $\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$, dont on connaît une primitive, suggère une intégration par parties. On ne peut pas l'écrire directement sur $[0\,,1]$, puisque ln n'est pas défini en 0 : on l'écrit sur $[\varepsilon\,,1]$, avec $\varepsilon \in]0\,,1[$, et l'on choisit la primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ qui s'annule en 0,

$$V(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(x^2+1)} = \frac{x^2}{2(x^2+1)},$$

d'où

$$\int_\varepsilon^1 g = \Big[V(x)\ln x\Big]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{V(x)}{x}\,\mathrm{d}x = -V(\varepsilon)\ln\varepsilon - \int_\varepsilon^1 \frac{x}{2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x.$$

Quand ε tend vers 0, le membre de gauche tend vers I, puisque $\varepsilon \mapsto \displaystyle\int_\varepsilon^1 g$ est continue sur $[0\,,1]$ (théorème 6) ; le terme $V(\varepsilon)\ln\varepsilon$, équivalent à $\dfrac{\varepsilon^2\ln\varepsilon}{2}$, tend vers 0, et la dernière intégrale tend vers

$$\int_0^1 \frac{x}{2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{\ln(x^2+1)}{4}\Big]_0^1 = \frac{\ln 2}{4}.$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln 2}{4} \approx -0{,}1733}$$

Le résultat est négatif, comme la fonction intégrée sur $]0\,,1[$ ✓.

Piège. Avec la primitive $-\dfrac{1}{2(x^2+1)}$, le terme de bord $\dfrac{\ln\varepsilon}{2(\varepsilon^2+1)}$ tend vers $-\infty$, et il faudrait le compenser par une intégrale elle aussi divergente. Le choix de la constante d'intégration, ici celle qui annule V en 0, est ce qui rend le calcul propre.

2. Les trois fonctions sont des fractions rationnelles sans pôle sur $[0\,,+\infty[$: on les décompose en éléments simples, comme à l'exercice 16, puis l'on regroupe les logarithmes en un seul avant de faire tendre A vers $+\infty$.

Première intégrale. En multipliant par $2t+1$ et en évaluant en $-\dfrac{1}{2}$, le coefficient de $\dfrac{1}{2t+1}$ vaut $\dfrac{-1/2}{(1/2)^2} = -2$; de même, celui de $\dfrac{1}{(t+1)^2}$ vaut $\dfrac{-1}{-1} = 1$. Enfin, la limite nulle de $tF(t)$ en $+\infty$ donne le coefficient 1 de $\dfrac{1}{t+1}$, puisque $\dfrac{-2}{2t+1} = \dfrac{-1}{t+1/2}$. Ainsi

$$\frac{t}{(t+1)^2(2t+1)} = \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{2}{2t+1}, \qquad \int_0^A \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2(2t+1)} = \ln\frac{A+1}{2A+1} + 1 - \frac{1}{A+1}.$$

$$\boxed{\int_0^A \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2(2t+1)} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1-\ln 2}$$

Deuxième intégrale. La décomposition est

$$\frac{1}{(t^2+4)(t+2)^2} = \frac{1}{16(t+2)} + \frac{1}{8(t+2)^2} - \frac{t}{16(t^2+4)},$$

d'où une primitive $\dfrac{1}{32}\ln\dfrac{(t+2)^2}{t^2+4} - \dfrac{1}{8(t+2)}$, qui vaut $-\dfrac{1}{16}$ en 0 :

$$\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+4)(t+2)^2} = \frac{1}{32}\ln\frac{(A+2)^2}{A^2+4} - \frac{1}{8(A+2)} + \frac{1}{16}, \qquad \boxed{\text{limite } \frac{1}{16}}$$

Troisième intégrale. Avec $t^3+1 = (t+1)(t^2-t+1)$, le coefficient du pôle -1 vaut $\dfrac{-1}{3}$, et

$$\frac{t}{t^3+1} = -\frac{1}{3(t+1)} + \frac{t+1}{3(t^2-t+1)}, \qquad t+1 = \frac{1}{2}(2t-1) + \frac{3}{2}.$$

Avec la forme canonique $t^2-t+1 = (t-\dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{3}{4}$, on obtient

$$\int_0^A \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^3+1} = \frac{1}{6}\ln\frac{A^2-A+1}{(A+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\operatorname{Arctan}\frac{2A-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6}\Big),$$

et, quand A tend vers $+\infty$, le logarithme tend vers $\ln 1 = 0$ et l'arc tangente vers $\dfrac{\pi}{2}$:

$$\boxed{\int_0^A \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^3+1} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\Big) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \approx 1{,}2092}$$

Piège. Chaque logarithme, pris séparément, tend vers $+\infty$ ou $-\infty$: l'erreur la plus répandue est d'écrire une forme indéterminée $\infty-\infty$, ou de conclure à la divergence. La limite existe parce que la fonction intégrée est en $O(\dfrac{1}{t^2})$ en $+\infty$, ce qui force les coefficients des termes $\dfrac{1}{t-\lambda}$ à se compenser : les logarithmes se regroupent en le logarithme d'un quotient qui tend vers une constante.

EXERCICE 20 ⋆⋆

1. On intègre $I_n(x)$ par parties (chapitre 6, proposition 4), en dérivant $t \mapsto (t^2+1)^{-(n+1)}$ et en primitivant 1 en t. C'est le choix naturel : dériver la puissance $-(n+1)$ fait apparaître la puissance $-(n+2)$, c'est-à-dire l'intégrande de I_{n+1}. Les deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et

$$I_n(x) = \Big[\frac{t}{(t^2+1)^{n+1}}\Big]_0^x + 2(n+1)\int_0^x \frac{t^2}{(t^2+1)^{n+2}}\,\mathrm{d}t.$$

On écrit $t^2 = (t^2+1) - 1$ dans la dernière intégrale, qui vaut donc $I_n(x) - I_{n+1}(x)$. Ainsi

$$I_n(x) = \frac{x}{(x^2+1)^{n+1}} + 2(n+1)\big(I_n(x) - I_{n+1}(x)\big),$$

et l'on regroupe les termes en $I_{n+1}(x)$.

$$\boxed{2(n+1)\,I_{n+1}(x) = \frac{x}{(x^2+1)^{n+1}} + (2n+1)\,I_n(x)}$$

Piège. L'erreur la plus répandue est d'intégrer par parties I_{n+1} lui-même : on obtient alors une intégrale de puissance $-(n+3)$, et l'on s'éloigne du but. Pour faire monter l'exposant, on intègre par parties l'intégrale d'exposant le plus bas.

2. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n=0$, $I_0(x) = \operatorname{Arctan} x$ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ quand x tend vers $+\infty$. Si $I_n(x)$ tend vers L_n, la relation de la question 1 montre que $I_{n+1}(x)$ admet une limite finie, puisque

$$0 \leqslant \frac{x}{(x^2+1)^{n+1}} \leqslant \frac{x}{x^2+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad (x \geqslant 0),$$

et cette limite vérifie $2(n+1)L_{n+1} = (2n+1)L_n$. On en déduit, par produit télescopique,

$$L_n = \frac{\pi}{2}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\pi}{2}\times\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)},$$

et l'on complète le numérateur en multipliant haut et bas par $2\times 4\times\cdots\times(2n) = 2^n n!$.

$$\boxed{L_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\,\frac{\pi}{2}}$$

On trouve $L_1 = \dfrac{\pi}{4}$, $L_2 = \dfrac{3\pi}{16}$ et $L_3 = \dfrac{5\pi}{32}$, valeurs confirmées par un calcul symbolique. ✓

3. La proposition 15 (iii) du cours donne $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$: c'est exactement L_n.

$$\boxed{L_n = W_{2n}}$$

Pour le retrouver directement, on effectue le changement de variable $t = \tan\theta$ (chapitre 6, proposition 5), avec $\theta \in [0\,,\operatorname{Arctan} x]$: le facteur $1+t^2$ appelle la tangente, puisque $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ et que $\mathrm{d}t = (1+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$. La fonction tan est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\big[0\,,\dfrac{\pi}{2}\big[$, et

$$I_n(x) = \int_0^{\operatorname{Arctan} x} \frac{1+\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^{n+1}}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\operatorname{Arctan} x} \cos^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

La fonction $u \mapsto \displaystyle\int_0^u \cos^{2n}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (théorème 6), et $\operatorname{Arctan} x$ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$: par composition des limites,

$$\boxed{L_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta = W_{2n}}$$

la dernière égalité étant la proposition 15 (i).
À retenir. La relation de récurrence de la question 1, à la limite, est celle des intégrales de Wallis, $(2n+2)W_{2n+2} = (2n+1)W_{2n}$: le changement de variable $t = \tan\theta$ explique cette coïncidence. C'est aussi la récurrence annoncée par la méthode du cours pour intégrer les éléments simples $\dfrac{1}{(1+u^2)^k}$. L'exercice 46 reviendra sur les intégrales de Wallis.

EXERCICE 21 ⋆⋆

1. Il n'y a ici aucune intégrale à calculer : on suit l'indication, et l'on applique le théorème de Rolle (chapitre 9, théorème 4) à la fonction

$$\varphi(x) = \int_a^x f \times \int_x^b g, \qquad x \in [a\,,b].$$

Par le théorème 6, les fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ et $x \mapsto \int_x^b g = -\int_b^x g$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,,b]$, de dérivées f et $-g$. Leur produit φ est donc dérivable, et

$$\varphi'(x) = f(x)\int_x^b g - g(x)\int_a^x f.$$

De plus, $\varphi(a) = 0$, puisque le premier facteur est nul, et $\varphi(b) = 0$, puisque le second l'est. Le théorème de Rolle fournit $\theta \in]a\,,b[$ tel que $\varphi'(\theta) = 0$.

$$\boxed{\exists\,\theta \in]a\,,b[, \quad f(\theta)\int_\theta^b g = g(\theta)\int_a^\theta f}$$

2. L'idée est de trouver un point $d \in [0\,,1[$ tel que $f(d) = f(1)$, puis d'appliquer le théorème de Rolle sur $[d\,,1]$. Supposons par l'absurde que $f(x) \neq f(1)$ pour tout $x \in [0\,,1[$. La fonction $h = f - f(1)$ est continue et ne s'annule pas sur l'intervalle $[0\,,1[$: elle y garde un signe constant strict (chapitre 8, proposition 15), et l'on peut supposer $h > 0$ sur $[0\,,1[$, quitte à changer f en $-f$. Alors h est continue, positive sur $[0\,,1]$ (avec $h(1) = 0$), et non identiquement nulle ; mais, par hypothèse,

$$\int_0^1 h = \int_0^1 f - f(1) = 0,$$

ce que le théorème 4 interdit. Il existe donc $d \in [0\,,1[$ tel que $f(d) = f(1)$. La fonction f est continue sur $[d\,,1]$, dérivable sur $]d\,,1[$, et prend la même valeur aux deux bornes : le théorème de Rolle conclut.

$$\boxed{\exists\,c \in]d\,,1[\subset [0\,,1], \quad f'(c) = 0}$$

Piège. L'égalité de la moyenne (proposition 7) fournit bien $d \in [0\,,1]$ tel que $f(d) = \displaystyle\int_0^1 f = f(1)$, mais rien n'empêche alors d'avoir $d = 1$, et le théorème de Rolle sur le segment $[1\,,1]$ ne dit rien. L'erreur la plus répandue est de ne pas voir ce cas : c'est le théorème 4, et non la seule proposition 7, qui permet de l'écarter.

EXERCICE 22 ⋆⋆

La valeur absolue $|t-x|$ change d'expression en $t=x$: on découpe donc l'intégrale par la relation de Chasles en ce point, lorsqu'il est dans $[a\,,b]$, puis on dérive les intégrales dont la borne dépend de x par le théorème 6. On note $A=\displaystyle\int_a^b f$ et $B=\displaystyle\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t$.

Cas $x\leqslant a$ et $x\geqslant b$. Pour $x\leqslant a$, on a $|t-x|=t-x$ pour tout $t\in[a\,,b]$, donc $F(x)=B-xA$; pour $x\geqslant b$, de même, $F(x)=xA-B$. Sur ces deux intervalles, F est affine, de dérivée $-A$ puis A.

Cas $a\leqslant x\leqslant b$. La relation de Chasles donne

$$F(x)=\int_a^x(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t+\int_x^b(t-x)f(t)\,\mathrm{d}t=x\int_a^x f-\int_a^x tf(t)\,\mathrm{d}t+\int_x^b tf(t)\,\mathrm{d}t-x\int_x^b f.$$

Les fonctions f et $t\mapsto tf(t)$ sont continues : par le théorème 6, chaque intégrale est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de x sur $[a\,,b]$. En dérivant, les termes $xf(x)$ se compensent deux à deux :

$$F'(x)=\int_a^x f+xf(x)-xf(x)-xf(x)-\int_x^b f+xf(x)=\int_a^x f-\int_x^b f.$$

Raccords. Les expressions coïncident en a et en b, et la dérivée à droite en a, égale à $-\displaystyle\int_a^b f=-A$, est la dérivée à gauche ; de même en b, les deux dérivées valent A. Donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$, et F', continue sur chacun des trois intervalles fermés avec des valeurs qui se raccordent, est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{F\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}),\qquad F'(x)=\begin{cases}-\displaystyle\int_a^b f & \text{si } x\leqslant a\\ \displaystyle\int_a^x f-\int_x^b f & \text{si } a\leqslant x\leqslant b\\ \displaystyle\int_a^b f & \text{si } x\geqslant b\end{cases}}$$

Classe $\mathcal{C}^2$. Sur $]-\infty\,,a[$ et sur $]b\,,+\infty[$, F' est constante, de dérivée nulle. Sur $[a\,,b]$, le théorème 6 donne $F''(x)=f(x)+f(x)=2f(x)$. En a, la dérivée à gauche de F' vaut 0 et sa dérivée à droite vaut $2f(a)$: F' est dérivable en a si et seulement si $f(a)=0$, et de même en b. Réciproquement, si $f(a)=f(b)=0$, la fonction F'', nulle hors de $[a\,,b]$ et égale à $2f$ sur $[a\,,b]$, est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{F\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R})\iff f(a)=f(b)=0,\qquad\text{et alors } F''=2f \text{ sur } [a\,,b],\ F''=0 \text{ ailleurs}}$$

Avec $f(t)=t^2$ sur $[0\,,1]$, on vérifie par un calcul symbolique que F'' vaut 0 à droite de 0 mais 2 à gauche de 1 : F n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$, alors que $f(t)=t(1-t)$ donne une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. ✓

À retenir. La relation $F''=2f$ sur $]a\,,b[$ dit que $\dfrac{1}{2}F$ est une primitive seconde de f. Si $f\geqslant 0$, la fonction F est convexe (chapitre 9, théorème 11) : c'est une moyenne pondérée des fonctions convexes $x\mapsto|t-x|$.

EXERCICE 23 ⋆⋆

On dérive une intégrale dont la borne dépend de x : on l'écrit à l'aide d'une primitive, par le théorème 6, puis on applique la dérivation des fonctions composées. Les fonctions $t\mapsto\operatorname{Arcsin}\sqrt{t}$ et $t\mapsto\operatorname{Arccos}\sqrt{t}$ sont continues sur $[0\,,1]$; par le théorème 6, les fonctions

$$S(u)=\int_0^u\operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t\qquad\text{et}\qquad C(u)=\int_0^u\operatorname{Arccos}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,,1]$, de dérivées $\operatorname{Arcsin}\sqrt{u}$ et $\operatorname{Arccos}\sqrt{u}$. Comme $\sin^2$ et $\cos^2$ sont dérivables à valeurs dans $[0\,,1]$, la fonction $f=S\circ\sin^2+C\circ\cos^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (chapitre 9, théorème 2), et, puisque $\sqrt{\sin^2 x}=|\sin x|$,

$$f'(x)=2\sin x\cos x\left(\operatorname{Arcsin}|\sin x|-\operatorname{Arccos}|\cos x|\right).$$

Soit $y = \operatorname{Arcsin}|\sin x|$, qui appartient à $[0\,,\frac{\pi}{2}]$. Alors $\cos y \geqslant 0$, et

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-\sin^2 x} = |\cos x|\,;$$

comme $y \in [0\,,\pi]$, on en déduit $y = \operatorname{Arccos}|\cos x|$. La parenthèse est nulle.

$$\boxed{f' = 0 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

La fonction f est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Pour trouver sa valeur, on compare

$$f(0) = \int_0^1 \operatorname{Arccos}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \int_0^1 \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t.$$

Ces deux nombres sont égaux, et leur somme vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, puisque $\operatorname{Arcsin} + \operatorname{Arccos} = \frac{\pi}{2}$ sur $[-1\,,1]$ (chapitre 5).

$$\boxed{f(x) = \frac{\pi}{4} \text{ pour tout réel } x}$$

Un calcul numérique de $f(0{,}3)$, $f(1{,}1)$, $f(2{,}5)$ et $f(-4)$ donne bien $0{,}785\,398\ldots$ ✓
Piège. L'erreur la plus répandue est d'écrire $\sqrt{\sin^2 x} = \sin x$ puis $\operatorname{Arcsin}(\sin x) = x$: ces deux égalités sont fausses dès que $x \notin [0\,,\frac{\pi}{2}]$. Elles conduisent ici au bon résultat sur $[0\,,\frac{\pi}{2}]$ seulement, et il faut l'argument ci-dessus, ou la parité et la π-périodicité de f, pour conclure sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 24 ⋆⋆

1. *(a)* On écrit f à l'aide d'une primitive, par le théorème 6 : la fonction $g : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue sur $]0\,,+\infty[$, et $G(x) = \displaystyle\int_1^x g$ y est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée g. Comme $f(x) = G(2x) - G(x)$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, et

$$\boxed{f'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}}{x} < 0}$$

puisque $\mathrm{e}^{-2x} < \mathrm{e}^{-x}$ pour $x > 0$. La fonction f est strictement décroissante sur $]0\,,+\infty[$.

(b) Pour $t \in [x\,,2x]$, on a $\mathrm{e}^{-2x} \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$; on divise par $t > 0$ et l'on intègre sur $[x\,,2x]$, dans l'ordre croissant, avec $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln 2$.

$$\boxed{\mathrm{e}^{-2x}\ln 2 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}\ln 2}$$

Les deux bornes tendent vers $\ln 2$ en 0 et vers 0 en $+\infty$, et le théorème d'encadrement conclut.

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln 2, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

Le facteur $\dfrac{1}{t}$ seul donnerait exactement $\ln 2$: quand x tend vers 0, le facteur e^{-t} est presque constant égal à 1 sur $[x\,,2x]$, et c'est la valeur $\ln 2$ qui subsiste.

2. On sépare $J(\varepsilon, M)$ en deux intégrales, et l'on effectue dans la seconde le changement de variable $u = 2x$ (chapitre 6, proposition 5). Il est naturel parce que $\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ est inchangé par une homothétie : $\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$. Ainsi

$$J(\varepsilon, M) = \int_\varepsilon^M \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{2\varepsilon}^{2M} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_M^{2M} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x,$$

par la relation de Chasles, qui fait disparaître la partie commune entre 2ε et M (avec la convention d'orientation si $2\varepsilon > M$).

$$\boxed{J(\varepsilon, M) = f(\varepsilon) - f(M)}$$

Par la question 1 (b), $0 \leqslant \ln 2 - f(\varepsilon) \leqslant (1 - \mathrm{e}^{-2\varepsilon}) \ln 2 \leqslant 2\varepsilon \ln 2$, puisque $1 - \mathrm{e}^{-u} \leqslant u$ (convexité de l'exponentielle, chapitre 9), et $0 \leqslant f(M) \leqslant \mathrm{e}^{-M} \ln 2 \leqslant \dfrac{\ln 2}{M}$, puisque $\mathrm{e}^M \geqslant 1 + M > M$. Donc

$$|J(\varepsilon, M) - \ln 2| \leqslant |f(\varepsilon) - \ln 2| + f(M) \leqslant 2\varepsilon \ln 2 + \frac{\ln 2}{M}.$$

Soit $\eta > 0$. On pose $\delta = \dfrac{\eta}{4 \ln 2}$ et $A = \dfrac{2 \ln 2}{\eta}$: chacun des deux termes est au plus $\dfrac{\eta}{2}$ dès que $\varepsilon \leqslant \delta$ et $M \geqslant A$.

$$\boxed{\varepsilon \leqslant \frac{\eta}{4 \ln 2} \quad \text{et} \quad M \geqslant \frac{2 \ln 2}{\eta} \implies |J(\varepsilon, M) - \ln 2| \leqslant \eta}$$

Avec $\eta = 10^{-2}$, une intégration numérique entre $\delta \approx 0{,}0036$ et $A \approx 138{,}6$ donne bien J à moins de η de $\ln 2$. ✓

3. Pour t voisin de 0, $\dfrac{\cos(t^2)}{\sin t}$ ressemble à $\dfrac{1}{t}$, dont l'intégrale sur $[x\,, 3x]$ vaut exactement $\ln 3$: on compare les deux fonctions. Pour $0 < x \leqslant \dfrac{1}{3}$, on a $[x\,, 3x] \subset]0\,, 1]$, où $\sin t > 0$, et l'on pose $h(t) = \dfrac{\cos(t^2)}{\sin t} - \dfrac{1}{t}$. Par les développements limités du chapitre 10,

$$h(t) = \frac{t\cos(t^2) - \sin t}{t \sin t} = \frac{t - (t - \frac{t^3}{6}) + o(t^3)}{t^2 + o(t^2)} \sim \frac{t}{6} \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0.$$

Il existe donc $\delta_0 \in]0\,, 1]$ tel que $|h(t)| \leqslant 1$ pour $0 < t \leqslant \delta_0$. Pour $0 < x \leqslant \dfrac{\delta_0}{3}$, l'inégalité triangulaire donne

$$\Big| \int_x^{3x} \frac{\cos(t^2)}{\sin t}\,\mathrm{d}t - \ln 3 \Big| = \Big| \int_x^{3x} h(t)\,\mathrm{d}t \Big| \leqslant 2x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0.$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \int_x^{3x} \frac{\cos(t^2)}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \ln 3}$$

Numériquement, on trouve 1,098 679 pour $x = 10^{-2}$ et 1,098 612 96 pour $x = 10^{-3}$, à comparer à $\ln 3 \approx 1{,}098\,612\,29$. ✓

À retenir. Les trois questions reposent sur la même remarque : sur $[x\,, kx]$, l'intégrale de $\dfrac{1}{t}$ vaut $\ln k$, quel que soit x. Quand l'intégrande est équivalent à $\dfrac{1}{t}$ près de 0, l'intégrale tend vers $\ln k$: c'est le principe des intégrales de Frullani, dont $J(\varepsilon, M)$ est un exemple.

EXERCICE 25 ⋆⋆

1. On ramène l'équation à une équation $G(y) = c$, à l'aide de la primitive $G(y) = \displaystyle\int_0^y \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$ (théorème 6). La fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $y \mapsto \mathrm{e}^{y^2} > 0$: elle est strictement croissante. Pour $y \geqslant 0$, $G(y) \geqslant \displaystyle\int_0^y 1 = y$, donc G tend vers $+\infty$ en $+\infty$; l'intégrande étant pair, G est impaire (chapitre 6, proposition 6), et tend vers $-\infty$ en $-\infty$. Par le théorème de la bijection (chapitre 8, théorème 11), G est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Enfin, par la relation de Chasles,

$$\int_x^y \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1 \iff G(y) = 1 + G(x) \iff y = G^{-1}(1 + G(x)).$$

$$\boxed{\text{pour tout réel } x,\ \text{il existe un unique } y,\ \text{à savoir } \varphi(x) = G^{-1}(1 + G(x))}$$

2. *Régularité de G^{-1}.* La dérivée de G ne s'annule pas, donc G^{-1} est dérivable (chapitre 9, théorème 3), et

$$(G^{-1})' = \frac{1}{G' \circ G^{-1}} = \exp\big(-(G^{-1})^2\big).$$

Par récurrence, si G^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$, le membre de droite l'est aussi, donc G^{-1} est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$: G^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Comme G, de dérivée $\exp(y^2)$, l'est aussi, la composée $\varphi = G^{-1} \circ (1+G)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Dérivée. On dérive la relation $G(\varphi(x)) = 1 + G(x)$: $\varphi'(x)\,\mathrm{e}^{\varphi(x)^2} = \mathrm{e}^{x^2}$.

$$\boxed{\varphi'(x) = \mathrm{e}^{x^2-\varphi(x)^2}}$$

Numériquement, $\varphi(0) \approx 0{,}795\,17$, et la dérivée calculée par un taux d'accroissement en $-1{,}5$, 0 et 0,8 coïncide avec cette formule. ✓

À retenir. On n'a jamais calculé G, qui ne s'exprime pas à l'aide des fonctions usuelles : le théorème 6 en garantit l'existence et la dérivée, et cela suffit pour tout le raisonnement. Comme $1+G(x) > G(x)$, on a aussi $\varphi(x) > x$.

EXERCICE 26 ⋆⋆

1. *Endomorphisme.* Par le théorème 6, $P_0(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc continue : $P_0(f) \in E$. La linéarité de l'intégrale donne celle de P_0.

Noyau. Si $P_0(f) = 0$, on dérive : $f = P_0(f)' = 0$ par le théorème 6.

Image. La fonction $P_0(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et s'annule en 0. Réciproquement, si F est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $F(0) = 0$, alors F' est continue, et le théorème 6 donne $F(x) = F(0) + \displaystyle\int_0^x F' = P_0(F')(x)$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} P_0 = \{0\}, \qquad \operatorname{Im} P_0 = \{F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) : F(0) = 0\}}$$

2. La primitive de f qui s'annule en a est $P_a(f) : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ (théorème 6), et le même raisonnement, avec a à la place de 0, s'applique.

$$\boxed{\operatorname{Ker} P_a = \{0\}, \qquad \operatorname{Im} P_a = \{F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) : F(a) = 0\}}$$

3. *Existence et unicité.* Les primitives de f sont les fonctions $P_0(f) + c$, où c est une constante (chapitre 6, proposition 1). La condition $\displaystyle\int_0^1 (P_0(f) + c) = 0$ équivaut à $c = -\int_0^1 P_0(f)$: il y a une unique primitive convenable,

$$\boxed{\Pi(f) = P_0(f) - \int_0^1 P_0(f)}$$

où l'intégrale désigne la fonction constante correspondante. L'application Π est linéaire, comme P_0 et la forme linéaire $F \mapsto \displaystyle\int_0^1 F$, et $\Pi(f)$ est continue : Π est un endomorphisme de E.

Noyau et image. Si $\Pi(f) = 0$, alors $f = \Pi(f)' = 0$. La fonction $\Pi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ d'intégrale nulle sur $[0\,,1]$; réciproquement, si G est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $\displaystyle\int_0^1 G = 0$, c'est une primitive de G' d'intégrale nulle, donc $G = \Pi(G')$ par l'unicité.

$$\boxed{\operatorname{Ker} \Pi = \{0\}, \qquad \operatorname{Im} \Pi = \left\{G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \int_0^1 G = 0\right\}}$$

À retenir. Les trois endomorphismes sont injectifs sans être surjectifs : la fonction $x \mapsto |x|$, continue mais non dérivable en 0, n'est dans aucune des images. Au chapitre 15, un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie était automatiquement bijectif ; l'espace E n'est pas de dimension finie, et ce résultat tombe. Par une intégration par parties, on peut aussi écrire $\displaystyle\int_0^1 P_0(f) = \int_0^1 (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

EXERCICE 27 ⋆⋆⋆

Comme f est une bijection croissante de $[1\,,2]$ sur $[2\,,3]$, on a $f(1)=2$ et $f(2)=3$, et f^{-1} est continue sur $[2\,,3]$ (chapitre 8, théorème 11).

1. On ne connaît pas f^{-1}, mais on connaît f : le changement de variable $y=f(u)$ (chapitre 6, proposition 5) est naturel, puisqu'il transforme $f^{-1}(y)$ en u. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1\,,2]$, et f^{-1} est continue sur $[2\,,3]=f([1\,,2])$:

$$\int_2^3 f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y=\int_{f(1)}^{f(2)} f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y=\int_1^2 f^{-1}(f(u))\,f'(u)\,\mathrm{d}u=\int_1^2 u\,f'(u)\,\mathrm{d}u.$$

On intègre ensuite par parties (chapitre 6, proposition 4), ce qui fait réapparaître f :

$$\int_1^2 u\,f'(u)\,\mathrm{d}u=\big[u\,f(u)\big]_1^2-\int_1^2 f=2\times 3-1\times 2-\int_1^2 f.$$

$$\boxed{\int_1^2 f+\int_2^3 f^{-1}=2f(2)-1\cdot f(1)=4}$$

Lecture sur la figure. Les deux domaines colorés recouvrent, sans se chevaucher, le rectangle $[0\,,2]\times[0\,,3]$ privé du rectangle blanc $[0\,,1]\times[0\,,2]$: un point (x,y) tel que $1\leqslant x\leqslant 2$ et $2\leqslant y\leqslant 3$ est sous la courbe si $y\leqslant f(x)$, et à gauche de la courbe si $x\leqslant f^{-1}(y)$. L'aire totale vaut $6-2=4$. Pour la fonction de la figure, $f(x)=2+(x-1)^2$, on trouve $\displaystyle\int_1^2 f=\frac{7}{3}$ et $\displaystyle\int_2^3 (1+\sqrt{y-2})\,\mathrm{d}y=\frac{5}{3}$. ✓

2. *L'identité.* Comme $f^{-1}(y_{k+1})=x_{k+1}$ et $f(x_k)=y_k$, chaque terme d'indice k de la somme vaut

$$(x_{k+1}-x_k)\,y_k+(y_{k+1}-y_k)\,x_{k+1}=x_{k+1}y_{k+1}-x_ky_k.$$

La somme est télescopique, et vaut $x_ny_n-x_0y_0=2\times 3-1\times 2$.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\,f(x_k)+\sum_{k=0}^{n-1}(y_{k+1}-y_k)\,f^{-1}(y_{k+1})=4}$$

Première somme. C'est la somme $R_n(f)$ sur $[1\,,2]$: par le théorème 9, elle tend vers $\displaystyle\int_1^2 f$.

Seconde somme. Comme f est strictement croissante, $\sigma_n=(y_0,\dots,y_n)$ est une subdivision de $[2\,,3]$, et $y_{k+1}\in[y_k\,,y_{k+1}]$: c'est la somme de Riemann $S(f^{-1},\sigma_n,\xi)$, avec $\xi_k=y_{k+1}$. Elle n'est pas régulière, et il faut contrôler son pas. La fonction f est continue sur un segment, donc uniformément continue (chapitre 8, théorème 12) : pour tout $\delta>0$, il existe $\alpha>0$ tel que $|x-x'|\leqslant\alpha$ entraîne $|f(x)-f(x')|\leqslant\delta$. Dès que $\dfrac{1}{n}\leqslant\alpha$, le pas de σ_n est donc au plus δ.

Soit alors $\varepsilon>0$, et δ associé à ε et à $f^{-1}\in\mathcal{C}_m([2\,,3],\mathbb{R})$ par le théorème 9. Pour n assez grand, le pas de σ_n est au plus δ, et la seconde somme est à moins de ε de $\displaystyle\int_2^3 f^{-1}$: elle tend vers cette intégrale. En passant à la limite dans l'identité,

$$\boxed{\int_1^2 f+\int_2^3 f^{-1}=4\quad\text{pour } f \text{ seulement continue}}$$

Piège. L'erreur la plus répandue est d'appliquer à la seconde somme la formule des sommes de Riemann régulières : les points y_k ne sont pas équirépartis, et seul le théorème 9, avec un contrôle du pas, s'applique. C'est ici que sert la continuité uniforme, qui manquait au cas $\mathcal{C}^1$.

À retenir. Le même calcul donne, pour toute bijection continue strictement croissante f de $[a\,,b]$ sur $[f(a)\,,f(b)]$, l'égalité $\displaystyle\int_a^b f+\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}=bf(b)-af(a)$. Avec $f=\ln$ sur $[1\,,\mathrm{e}]$, on retrouve $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\ln+\int_0^1 \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y=1+(\mathrm{e}-1)=\mathrm{e}$. ✓

EXERCICE 28 ⋆⋆⋆

Aucune primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ n'est disponible : tout repose sur des encadrements et sur le théorème 6, qui permet de dériver f sans la calculer.

1. Pour $x \in]0\,,1[$, on a $0 < x^2 < x < 1$: le segment $[x^2\,,x]$ est contenu dans $]0\,,1[$, où $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est continue, et $f(x)$ est bien défini. Pour $t \in [x^2\,,x]$, on a $\ln t \leqslant \ln x < 0$, donc $\left|\dfrac{1}{\ln t}\right| \leqslant \dfrac{1}{|\ln x|}$, et l'inégalité triangulaire donne

$$|f(x)| \leqslant \frac{x - x^2}{|\ln x|} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 = f(0).$$

$$\boxed{f \text{ est continue en } 0}$$

2. La fonction ln est concave (chapitre 9) : sa courbe est au-dessous de ses tangentes et au-dessus de ses cordes. La tangente en 1 est la droite $y = t - 1$. La corde entre les points d'abscisses x^2 et 1 passe par $(1,0)$ et $(x^2, 2\ln x)$, de pente $\dfrac{2\ln x}{x^2-1}$; sur $[x^2\,,1]$, la courbe est au-dessus de cette corde.

$$\boxed{\forall t \in [x^2\,,1],\quad \frac{2\ln x}{x^2-1}(t-1) \leqslant \ln t \leqslant t - 1}$$

3. On note $c = \dfrac{2\ln x}{x^2-1} > 0$. Pour $t \in [x^2\,,x]$, les trois membres de l'encadrement précédent sont strictement négatifs, et l'on passe aux inverses, ce qui renverse les inégalités :

$$\frac{1}{t-1} \leqslant \frac{1}{\ln t} \leqslant \frac{1}{c(t-1)}.$$

On intègre sur $[x^2\,,x]$, dans l'ordre croissant, avec $\displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} = \ln(1-x) - \ln(1-x^2) = -\ln(1+x)$, puis on change de signe, puisque $f(x) = -\displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$:

$$\boxed{\frac{x^2-1}{2\ln x}\ln(1+x) \leqslant f(x) \leqslant \ln(1+x)}$$

Quand x tend vers 1, on a $\ln x \sim x - 1$ (chapitre 10), donc $\dfrac{x^2-1}{2\ln x} \sim \dfrac{x+1}{2}$ tend vers 1, et les deux bornes tendent vers $\ln 2$.

$$\boxed{f \text{ se prolonge par continuité en 1, avec } f(1) = \ln 2}$$

Pour $x = 0{,}9$, l'encadrement s'écrit $0{,}578\,7 \leqslant f(x) \approx 0{,}595\,7 \leqslant 0{,}641\,9$. ✓

Piège. L'erreur la plus répandue est d'oublier l'un des deux changements de sens : le passage aux inverses de nombres négatifs, puis le signe $-$ dû aux bornes $x > x^2$ dans le mauvais ordre. Le contrôle est simple : $c = \dfrac{\ln(x^2)}{x^2-1} > 1$, puisque $\ln u < u - 1 < 0$ pour $u = x^2 \in]0\,,1[$, donc la borne inférieure est bien la plus petite.

4. *Sur* $]0\,,1[$. Soit H une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ sur $]0\,,1[$ (théorème 6). Alors $f(x) = H(x^2) - H(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,,1[$, et

$$f'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{2x}{2\ln x} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

En 0 *et en* 1. La fonction f est continue sur $[0\,,1]$ par les questions 1 et 3. Quand x tend vers 0, $f'(x)$ tend vers 0, le numérateur tendant vers -1 et le dénominateur vers $-\infty$; quand x tend vers

1, $\ln x \sim x-1$, et $f'(x)$ tend vers 1. Le théorème de la limite de la dérivée (chapitre 9, théorème 8) montre que f est dérivable en 0 et en 1, avec $f'(0)=0$ et $f'(1)=1$, et que f' y est continue.

$$\boxed{f \in \mathcal{C}^1([0\,,1]), \qquad f'(x) = \frac{x-1}{\ln x} \text{ sur }]0\,,1[, \qquad f'(0)=0, \quad f'(1)=1}$$

5. La fonction $h : t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}$, définie sur $]0\,,1[$, coïncide avec f' ; elle se prolonge donc en une fonction continue sur $[0\,,1]$, par $h(0)=0$ et $h(1)=1$, et ce prolongement est f'. Le théorème 6 donne alors $\displaystyle\int_0^1 h = f(1)-f(0)$.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \ln 2}$$

Une intégration numérique donne 0,693 147 18… ✓
À retenir. On a calculé une intégrale dont on ne connaît aucune primitive explicite, en la reconnaissant comme la dérivée d'une fonction f définie par une autre intégrale. Le seul calcul effectif est celui de $f(1)$, obtenu par encadrement.

EXERCICE 29 ⋆⋆⋆

1. La fonction f est continue sur le segment $[0\,,1]$, donc bornée (chapitre 8, théorème 10) ; on note $M = \max|f|$. L'inégalité triangulaire donne

$$|u_n| \leqslant \int_0^1 t^n |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{M}{n+1}.$$

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

2. On intègre par parties (chapitre 6, proposition 4), en primitivant t^n en $\dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ et en dérivant f. C'est le choix naturel : la primitivation fait sortir un facteur $\dfrac{1}{n+1}$, et l'intégrale qui reste est du type de la question 1, avec f' à la place de f. Avec $v_m = \displaystyle\int_0^1 t^m f'(t)\,\mathrm{d}t$,

$$u_n = \Big[\frac{t^{n+1}}{n+1}\,f(t)\Big]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(1)-v_{n+1}}{n+1}.$$

La fonction f' est continue, et la question 1, appliquée à f', montre que v_{n+1} tend vers 0. Donc $(n+1)u_n$ tend vers $f(1)\neq 0$, ce qui signifie $u_n \sim \dfrac{f(1)}{n+1} \sim \dfrac{f(1)}{n}$.

$$\boxed{u_n \sim \frac{f(1)}{n}}$$

3. *Sinus.* La fonction $f(t) = \sin\dfrac{\pi t}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f(1)=1$.

$$\boxed{\int_0^1 t^n \sin\frac{\pi t}{2}\,\mathrm{d}t \sim \frac{1}{n}}$$

Cosinus. Ici $f(1) = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, et la question 2 ne conclut pas. On revient à l'égalité exacte de la question 2, $(n+1)u_n = -v_{n+1}$, avec cette fois $f'(t) = -\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi t}{2}$:

$$(n+1)\,u_n = \frac{\pi}{2}\int_0^1 t^{n+1}\sin\frac{\pi t}{2}\,\mathrm{d}t \sim \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{n+1},$$

par le cas du sinus au rang $n+1$. Donc $u_n \sim \dfrac{\pi}{2(n+1)^2} \sim \dfrac{\pi}{2n^2}$.

$$\boxed{\int_0^1 t^n \cos\frac{\pi t}{2}\,\mathrm{d}t \sim \frac{\pi}{2n^2}}$$

Pour $n = 10^4$, on calcule numériquement $n \times 0{,}000\,099\,99\ldots \approx 0{,}999\,90$ et n^2 fois la seconde intégrale $\approx 1{,}570\,3$, contre $\dfrac{\pi}{2} \approx 1{,}570\,8$. ✓

Piège. L'erreur la plus répandue est d'écrire $u_n \sim \dfrac{0}{n}$ quand $f(1) = 0$: un équivalent n'est jamais la suite nulle (chapitre 10). L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$ ne voit, pour n grand, que les valeurs de f près de 1 ; si $f(1) = 0$, il faut regarder l'ordre suivant, ici $f'(1)$.

EXERCICE 30 ⋆⋆⋆

On note $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ et $b_n = a_n\dfrac{\pi}{2}$, de sorte que $\dfrac{\pi}{2} - b_n = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$.

1. Pour $t \in [0\,,\frac{\pi}{2}]$, on a $a_n t \in [0\,,b_n] \subset [0\,,\frac{\pi}{2}[$, où le cosinus est strictement positif : l'intégrande est continu sur le segment, et I_n existe. À t fixé, la suite $(a_n t)$ est croissante dans $[0\,,\frac{\pi}{2}[$, où le cosinus est décroissant et positif ; donc $\dfrac{t}{\cos(a_n t)}$ croît avec n, et la croissance de l'intégrale conclut.

$$\boxed{(I_n) \text{ est croissante}}$$

2. Pour minorer, on utilise $\cos u = \sin(\frac{\pi}{2} - u) \leqslant \frac{\pi}{2} - u$ pour $u \in [0\,,\frac{\pi}{2}]$, puis le changement de variable $u = a_n t$, pour $n \geqslant 1$ (chapitre 6, proposition 5), naturel puisque $a_n t$ est l'argument du cosinus :

$$I_n \geqslant \int_0^{\pi/2} \frac{t\,\mathrm{d}t}{\frac{\pi}{2} - a_n t} = \frac{1}{a_n^2}\int_0^{b_n} \frac{u\,\mathrm{d}u}{\frac{\pi}{2} - u} \geqslant \int_0^{b_n} \Big(\frac{\pi/2}{\frac{\pi}{2} - u} - 1\Big)\mathrm{d}u,$$

car $\dfrac{1}{a_n^2} \geqslant 1$ et l'intégrale est positive. La dernière intégrale vaut $\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{\pi/2}{\pi/2 - b_n} - b_n = \dfrac{\pi}{2}\ln(n+1) - b_n$.

$$\boxed{I_n \geqslant \frac{\pi}{2}\ln(n+1) - \frac{\pi}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

3. *La fonction auxiliaire.* La fonction $\varphi(u) = \dfrac{u}{\cos u} - \dfrac{\pi/2}{\pi/2 - u}$ est continue sur $[0\,,\frac{\pi}{2}[$. On pose $u = \dfrac{\pi}{2} - h$, avec $h \to 0^+$; alors $\cos u = \sin h$, et

$$\varphi(u) = \frac{\pi}{2}\Big(\frac{1}{\sin h} - \frac{1}{h}\Big) - \frac{h}{\sin h} = \frac{\pi}{2} \times \frac{h - \sin h}{h\sin h} - \frac{h}{\sin h} \xrightarrow[h\to 0^+]{} -1,$$

puisque $h - \sin h \sim \dfrac{h^3}{6}$ et $h\sin h \sim h^2$ (chapitre 10). Prolongée par $\varphi(\frac{\pi}{2}) = -1$, φ est continue sur le segment $[0\,,\frac{\pi}{2}]$, donc bornée par un réel K (chapitre 8, théorème 10).

Le calcul. Le même changement de variable $u = a_n t$ donne cette fois l'égalité

$$I_n = \frac{1}{a_n^2}\int_0^{b_n} \frac{u\,\mathrm{d}u}{\cos u} = \frac{1}{a_n^2}\Big(\int_0^{b_n} \frac{\pi/2}{\frac{\pi}{2} - u}\,\mathrm{d}u + \int_0^{b_n} \varphi\Big) = \frac{1}{a_n^2}\Big(\frac{\pi}{2}\ln(n+1) + R_n\Big),$$

avec $|R_n| \leqslant \dfrac{K\pi}{2}$. Comme a_n tend vers 1 et que $\ln(n+1) = \ln n + \ln\big(1 + \dfrac{1}{n}\big) \sim \ln n$, on obtient $\dfrac{2I_n}{\pi \ln n} \to 1$.

$$\boxed{I_n \sim \frac{\pi}{2}\ln n}$$

À retenir. On peut aller plus loin. La fonction $x \mapsto \int_0^x \varphi$ est continue sur $[0\,,\frac{\pi}{2}]$, donc R_n tend vers $C = \int_0^{\pi/2} \varphi \approx -1{,}4525$, et l'on vérifie que $I_n - \frac{\pi}{2}\ln n$ tend vers C. La convergence est lente : on trouve numériquement $-0{,}647$, $-1{,}305$, $-1{,}431$ et $-1{,}450$ pour $n = 10$, 10^2, 10^3 et 10^4. Le rapport $\dfrac{2I_n}{\pi \ln n}$ tend vers 1 plus lentement encore, puisque l'écart est de l'ordre de $\dfrac{2C}{\pi \ln n}$. La méthode est générale : pour trouver un équivalent d'une intégrale dont l'intégrande devient grand près d'une borne, on retranche une fonction simple qui a la même singularité, dont on sait calculer l'intégrale, et l'on montre que la différence reste bornée.

EXERCICE 31 ⋆⋆⋆

On intègre par parties (chapitre 6, proposition 4), en dérivant f et en primitivant $\cos(nt)$ en $\dfrac{\sin(nt)}{n}$. C'est le choix naturel : l'hypothèse de convexité porte sur f', qui est croissante (chapitre 9, théorème 10), et le crochet est nul puisque $\sin(nt)$ s'annule en 0 et en 2π :

$$a_n = \Big[\frac{f(t)\sin(nt)}{n}\Big]_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t.$$

On découpe $[0\,,2\pi]$, par la relation de Chasles, en n intervalles $[\frac{2k\pi}{n}\,,\frac{(2k+2)\pi}{n}]$, pour $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, et chacun en deux moitiés de longueur $\frac{\pi}{n}$. Sur la seconde moitié, le changement de variable $t = s + \frac{\pi}{n}$ et la relation $\sin(ns+\pi) = -\sin(ns)$ donnent

$$\int_{2k\pi/n}^{(2k+2)\pi/n} f'(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \int_{2k\pi/n}^{(2k+1)\pi/n} \Big(f'(s) - f'\Big(s+\frac{\pi}{n}\Big)\Big)\sin(ns)\,\mathrm{d}s.$$

Sur l'intervalle d'intégration, $ns \in [2k\pi\,,(2k+1)\pi]$, donc $\sin(ns) \geqslant 0$; et $f'(s) - f'(s+\frac{\pi}{n}) \leqslant 0$, puisque f' est croissante. Chaque morceau est négatif, donc $\int_0^{2\pi} f'(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$.

$$\boxed{a_n = -\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \geqslant 0}$$

Pour $f(t) = t^2$, un calcul direct donne $a_n = \dfrac{4\pi}{n^2} > 0$. ✓

À retenir. Le découpage compare la valeur de f' sur une arche positive du sinus à sa valeur sur l'arche négative qui suit : comme f' croît, l'arche négative pèse plus. Pour f concave, on obtient de même $a_n \leqslant 0$. Les nombres a_n sont, au facteur $\frac{1}{\pi}$ près, les coefficients de Fourier de f, que l'on étudiera en seconde année.

EXERCICE 32 ⋆

Dans les trois cas, on applique la formule de Taylor avec reste intégral (théorème 7) en $a = 0$, à l'ordre n qui fait apparaître le polynôme voulu ; pour $x \geqslant 0$, le facteur $(x-t)^n$ est positif sur $[0\,,x]$, et le signe du reste est celui de la dérivée $f^{(n+1)}$.

(a) Pour $f(t) = \ln(1+t)$, on a $f'''(t) = \dfrac{2}{(1+t)^3} > 0$ et $f''''(t) = -\dfrac{6}{(1+t)^4} < 0$. Les formules aux ordres 2 et 3 donnent

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)\,\mathrm{d}t = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} f''''(t)\,\mathrm{d}t,$$

où le premier reste est positif et le second négatif.

$$\boxed{x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \qquad (x \geqslant 0)}$$

(b) Les dérivées d'ordre pair du sinus sont nulles en 0, donc ses polynômes de Taylor d'ordres 4 et 6 sont $x - \dfrac{x^3}{6}$ et $x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$. Les restes font intervenir $\sin^{(5)} = \cos$ et $\sin^{(7)} = -\cos$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{24} \cos t\,\mathrm{d}t = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \int_0^x \frac{(x-t)^6}{720} \cos t\,\mathrm{d}t.$$

Pour $x \in [0\,,\frac{\pi}{2}]$, on a $\cos t \geqslant 0$ sur $[0\,,x]$: le premier reste est positif, et le second est retranché.

$$\boxed{x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \qquad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)}$$

(c) Pour $g(t) = (1+t)^{-1/3}$, on calcule par récurrence

$$g'(t) = -\frac{1}{3}(1+t)^{-4/3}, \quad g''(t) = \frac{4}{9}(1+t)^{-7/3}, \quad g'''(t) = -\frac{28}{27}(1+t)^{-10/3}, \quad g''''(t) = \frac{280}{81}(1+t)^{-13/3}.$$

Les coefficients de Taylor en 0 sont 1, $-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{4}{9} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{9}$ et $-\dfrac{28}{27} \times \dfrac{1}{6} = -\dfrac{14}{81}$. Le reste d'ordre 2 contient $g''' < 0$, et le reste d'ordre 3 contient $g'''' > 0$.

$$\boxed{1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \leqslant 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} \qquad (x \geqslant 0)}$$

Les trois encadrements ont été contrôlés numériquement sur $[0\,,50]$ et sur $[0\,,\frac{\pi}{2}]$. ✓

Piège. Le signe du reste est celui de $f^{(n+1)}$ seulement pour $x \geqslant 0$. Pour $x < 0$, on a $\displaystyle\int_0^x = -\int_x^0$, et le facteur $(x-t)^n$ a le signe de $(-1)^n$: l'erreur la plus répandue est d'appliquer le même raisonnement sans regarder le sens des bornes. Par exemple, $\ln(1+x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ reste vrai pour $x \in]-1\,,0]$, mais $\ln(1+x) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2}$ devient faux.

EXERCICE 33 ⋆

1. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange (théorème 8) au cosinus, en 0, à l'ordre 4 : le polynôme de Taylor est $1 - \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^4}{24}$, et $|\cos^{(5)}| = |\sin| \leqslant 1$.

$$\boxed{\left|\cos a - 1 + \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{24}\right| \leqslant \frac{a^5}{5!} = \frac{a^5}{120}}$$

Pour $a = \dfrac{1}{2}$, on a $1 - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{384} = \dfrac{384 - 48 + 1}{384} = \dfrac{337}{384}$ et $\dfrac{(1/2)^5}{120} = \dfrac{1}{3840}$.

$$\boxed{\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leqslant \cos\frac{1}{2} \leqslant \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}}$$

Numériquement, $\cos\dfrac{1}{2} - \dfrac{337}{384} \approx -2{,}16 \times 10^{-5}$, nettement moins que $\dfrac{1}{3840} \approx 2{,}6 \times 10^{-4}$. La raison est que la dérivée cinquième du cosinus est nulle en 0 : le polynôme d'ordre 4 est aussi celui d'ordre 5, et le théorème 8 à l'ordre 5 donne la majoration $\dfrac{a^6}{720} = \dfrac{1}{46\,080} \approx 2{,}17 \times 10^{-5}$, presque atteinte. ✓

2. Pour $f(t) = \ln(1+t)$, on a $f'''(t) = \dfrac{2}{(1+t)^3}$, majoré par 2 sur $[0\,,x]$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, en 0, donne une erreur au plus $2 \times \dfrac{x^3}{3!}$.

$$\boxed{\left|\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right| \leqslant \frac{x^3}{3} \qquad (x > 0)}$$

Pour $x = 0{,}003$, on a $x - \dfrac{x^2}{2} = 0{,}003 - 0{,}000\,004\,5 = 0{,}002\,995\,5$ et $\dfrac{x^3}{3} = 9 \times 10^{-9} < 10^{-8}$. L'exercice 32 (a) précise le signe : l'erreur est positive, et 0,002 995 5 est une valeur approchée par défaut.

$$\boxed{\ln(1{,}003) \approx 0{,}002\,995\,5 \ \text{ à } 10^{-8} \text{ près, par défaut}}$$

La valeur réelle est $\ln(1{,}003) = 0{,}002\,995\,508\,98\ldots$: l'écart, $8{,}98 \times 10^{-9}$, est presque égal à la majoration, parce que $f'''(t)$ vaut presque 2 sur un intervalle aussi court. ✓

EXERCICE 34 ⋆⋆

On applique la formule de Taylor avec reste intégral (théorème 7) à $f(x) = \ln(1+x^2)$, en 0 et au point 1. L'ordre se choisit en regardant l'intégrande : on a $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ et

$$f''(x) = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2},$$

de sorte que le facteur $(1-t)$ du reste d'ordre 1 complète le carré $(1-t)^2$ attendu. C'est donc l'ordre 1 qui convient, et, comme $f(0) = f'(0) = 0$,

$$\ln 2 = f(1) = f(0) + f'(0) + \int_0^1 (1-t)\, f''(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{2}}$$

Un calcul symbolique de l'intégrale, par décomposition en éléments simples, confirme ce résultat. ✓

À retenir. La formule de Taylor avec reste intégral se lit dans les deux sens : elle approche f par son polynôme de Taylor, mais elle permet aussi, comme ici, de calculer une intégrale de la forme $\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, g(t)\,\mathrm{d}t$ quand on reconnaît en g une dérivée $(n+1)$-ième. À l'ordre 2, le reste ferait intervenir $f'''(t) = \dfrac{4t(t^2-3)}{(1+t^2)^3}$ et le facteur $\dfrac{(1-t)^2}{2}$, ce qui ne donne pas l'intégrande de l'énoncé.

EXERCICE 35 ⋆⋆

1. On note $g = \sin^2$. On a $g'(t) = 2\sin t\cos t = \sin 2t$, $g''(t) = 2\cos 2t$, $g'''(t) = -4\sin 2t$ et $g''''(t) = -8\cos 2t$, d'où $g(0) = g'(0) = g'''(0) = 0$ et $g''(0) = 2$: les polynômes de Taylor de g en 0 aux ordres 2 et 3 valent tous deux x^2.

Majoration. La formule de Taylor avec reste intégral (théorème 7) à l'ordre 2 s'écrit

$$\sin^2 x = x^2 - 4\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\sin 2t\,\mathrm{d}t.$$

Pour $x \in [0\,,1]$ et $t \in [0\,,x]$, on a $2t \in [0\,,2] \subset [0\,,\pi]$, donc $\sin 2t \geqslant 0$, et le reste est négatif.

Minoration. À l'ordre 3, le reste fait intervenir $\cos 2t$, qui change de signe en $t = \dfrac{\pi}{4} < 1$: on ne peut plus raisonner sur le signe. On utilise plutôt l'inégalité de Taylor-Lagrange (théorème 8), avec $|g''''| \leqslant 8$: $|\sin^2 x - x^2| \leqslant 8 \times \dfrac{x^4}{24} = \dfrac{x^4}{3}$.

$$\boxed{x^2 - \frac{x^4}{3} \leqslant \sin^2 x \leqslant x^2 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)}$$

Piège. Il faut choisir l'outil selon le signe de la dérivée : le reste intégral ne donne une inégalité que si $g^{(n+1)}$ garde un signe constant sur $[0\,,x]$, ce qui n'est pas le cas de $\cos 2t$ sur $[0\,,1]$. L'inégalité de Taylor-Lagrange, elle, n'exige qu'une majoration.

2. On applique la question 1 à $x_k = \dfrac{1}{\sqrt{n+k}} \in]0\,,1]$, pour lequel $x_k^2 = \dfrac{1}{n+k}$, et l'on somme :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{1}{\sqrt{n+k}} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}.$$

La seconde somme de gauche compte n termes au plus égaux à $\dfrac{1}{n^2}$: elle est au plus $\dfrac{1}{n}$, et tend vers 0. La première est une somme de Riemann (théorème 9), pour la fonction continue $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur $[0\,,1]$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = R'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2.$$

Le théorème d'encadrement conclut.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{1}{\sqrt{n+k}} = \ln 2}$$

Numériquement, la somme vaut 0,653 5 pour $n = 10$, 0,692 73 pour $n = 1000$ et 0,693 143 pour $n = 10^5$, contre $\ln 2 \approx 0{,}693\,147$. ✓

À retenir. Les termes $\sin^2\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}$ tendent tous vers 0, mais ils sont au nombre de n : l'erreur la plus répandue est de conclure que la somme tend vers 0. L'encadrement de la question 1 ramène la somme à une somme de Riemann, à une erreur près qui, elle, tend bien vers 0.

EXERCICE 36 ⋆⋆

1. Le polynôme réel P est de degré impair : il admet une racine réelle x_0 (chapitre 8, proposition 13). L'hypothèse, en $x = x_0$, donne $f^{(n)}(x_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: tous les polynômes de Taylor de f en x_0 sont nuls.

Soit $A > 0$, et M_A le maximum de $|P|$ sur le segment $[x_0 - A\,, x_0 + A]$ (chapitre 8, théorème 10). Pour x dans ce segment et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|f^{(n+1)}| \leqslant |P| \leqslant M_A$ entre x_0 et x, et l'inégalité de Taylor-Lagrange (théorème 8) en x_0, à l'ordre n, donne

$$|f(x)| = \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\right| \leqslant M_A \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

par les croissances comparées (chapitre 7, théorème 7). Donc $f(x) = 0$ pour $|x - x_0| \leqslant A$, et ce pour tout $A > 0$.

$$\boxed{f = 0}$$

2. Non. La fonction $f = \sin$ vérifie $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$ pour tout n et tout x, puisque ses dérivées sont $\pm\sin$ et $\pm\cos$: le polynôme constant $P = 1$, de degré 0, pair, convient, ou encore $P = X^2 + 1$.

$$\boxed{\text{non : } f = \sin \text{ et } P = 1 \text{ sont un contre-exemple}}$$

À retenir. La démonstration n'utilise le degré impair que pour obtenir une racine réelle de P. Le résultat reste donc vrai pour tout polynôme P qui a une racine réelle, par exemple $P = X^2$, et c'est l'absence de racine réelle, et non la parité du degré, qui fait tomber le résultat. L'argument est celui de la proposition 11 du cours, qui montre la convergence des polynômes de Taylor de l'exponentielle : ici, la limite est la fonction nulle.

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆

1. Comme $f(0) = 0$, on a $g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$: c'est le taux d'accroissement de f en 0, qui tend vers $f'(0)$.

$$\boxed{g \text{ se prolonge par continuité en } 0, \text{ avec } g(0) = f'(0)}$$

2. *Formule de Leibniz.* Sur chacun des intervalles $]-\infty\,, 0[$ et $]0\,, +\infty[$, la fonction g est le produit de f et de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, toutes deux de classe $\mathcal{C}^\infty$, et $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(k)} = \dfrac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$ par récurrence. La formule de Leibniz (chapitre 9, théorème 9) donne

$$g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} (-x)^j,$$

où l'on a posé $j = n - k$, puis utilisé $\binom{n}{k} k! = \dfrac{n!}{j!}$ et $(-1)^k x^j = (-1)^n (-x)^j$.

Formule de Taylor. La dernière somme est le polynôme de Taylor de f *au point* x, évalué en 0, puisque $(-x)^j = (0 - x)^j$. La formule de Taylor avec reste intégral (théorème 7), entre x et 0, et l'hypothèse $f(0) = 0$ donnent donc

$$0 = f(0) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} (0 - x)^j + \int_x^0 \frac{(0 - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t,$$

d'où $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}(-x)^j = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$. En reportant, les facteurs $(-1)^n n!$ se simplifient.

$$\boxed{g^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \neq 0)}$$

On a vérifié cette formule pour $f = \sin$, $x \mapsto \mathrm{e}^x - 1$ et $x \mapsto \ln(1+x)$, pour $n \leqslant 3$, en $x = 0{,}7$ et en $x = -0{,}3$. ✓

3. On compare $f^{(n+1)}(t)$ à sa valeur en 0. Comme $\displaystyle\int_0^x t^n \,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n+1}$,

$$g^{(n)}(x) - \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1} = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n (f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(0)) \,\mathrm{d}t.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de $f^{(n+1)}$ en 0, il existe $\delta > 0$ tel que $|f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(0)| \leqslant \varepsilon$ pour $|t| \leqslant \delta$. Pour $0 < |x| \leqslant \delta$, tout t entre 0 et x vérifie $|t| \leqslant \delta$, et l'inégalité triangulaire, appliquée sur le segment d'extrémités 0 et x, majore l'intégrale par $\varepsilon \dfrac{|x|^{n+1}}{n+1}$. Donc $\left|g^{(n)}(x) - \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{n+1}$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} g^{(n)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}}$$

4. On montre par récurrence sur n que le prolongement de g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, avec $g^{(n)}(0) = \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$. Pour $n = 0$, c'est la question 1. Supposons-le au rang n. La fonction $g^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et sa dérivée $g^{(n+1)}$ y admet la limite $\dfrac{f^{(n+2)}(0)}{n+2}$ en 0, par la question 3. Le théorème de la limite de la dérivée (chapitre 9, théorème 8) montre que $g^{(n)}$ est dérivable en 0, de dérivée cette limite, et que $g^{(n+1)}$ est continue en 0 ; elle l'est sur $\mathbb{R}^*$, où g est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donc g est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \qquad g^{(n)}(0) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}}$$

On retrouve les coefficients attendus : $\dfrac{g^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}$ est bien le coefficient de x^n dans le développement limité de $\dfrac{f(x)}{x}$ (chapitre 10). Pour $f = \sin$, on obtient que $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$, prolongée par 1, est de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec $g''(0) = -\dfrac{1}{3}$. ✓

Piège. La formule de Leibniz donne $g^{(n)}(x)$ comme une somme de termes qui, pris séparément, tendent vers l'infini en 0 : l'erreur la plus répandue est d'en conclure que $g^{(n)}$ n'a pas de limite. Les termes se compensent, et c'est la formule de Taylor qui rend cette compensation visible, en remplaçant la somme par une intégrale de taille $|x|^{n+1}$.

Sommes de Riemann et calcul approché

EXERCICE 38 ⋆

On applique la méthode du cours : on met $\dfrac{1}{n}$ en facteur, on écrit le terme général sous la forme $g(\dfrac{k}{n})$ pour une fonction g indépendante de n, on lit l'intervalle sur les bornes de k, puis on conclut par le théorème 9. Lorsque k va de 0 à $n-1$, on reconnaît $R_n(g)$; lorsqu'il va de 1 à n, on reconnaît $R'_n(g)$; dans les deux cas, l'intervalle est $[0\,,1]$. Reste à calculer l'intégrale, et c'est là qu'il faut choisir une technique.

(a) La somme vaut $R_n(g)$ pour $g(t) = \sin(\pi t)$, qui est continue. Une primitive est $-\dfrac{1}{\pi}\cos(\pi t)$.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \sin(\pi t)\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\Big]_0^1 = \boxed{\frac{2}{\pi}}$$

C'est la valeur moyenne de sin sur une arche, environ 0,64.

(b) On divise numérateur et dénominateur par n^2 : $\dfrac{k}{n^2+k^2} = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{k/n}{1+(k/n)^2}$, et la somme est $R_n(g)$ avec $g(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$. L'intégrande est de la forme $\dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u}$, avec $u = 1+t^2$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2+k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big]_0^1 = \boxed{\frac{\ln 2}{2}}$$

(c) On écrit $\dfrac{1}{n^2}\,k\,\mathrm{e}^{-k/n} = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{k}{n}\,\mathrm{e}^{-k/n}$: c'est $R_n'(g)$ avec $g(t) = t\,\mathrm{e}^{-t}$. Pour l'intégrale, on intègre par parties (chapitre 6, proposition 4) : le facteur polynomial t disparaît quand on le dérive, et e^{-t} a une primitive immédiate.

$$\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \big[-t\,\mathrm{e}^{-t}\big]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-1} + 1 - \mathrm{e}^{-1}, \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\lim = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}}$$

(d) Comme $\ln(k^k) - \ln(n^k) = k\ln\dfrac{k}{n}$, le terme général est $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\frac{k}{n} = R_n'(g)$, avec $g(t) = t\ln t$ pour $t > 0$ et $g(0) = 0$. Cette fonction est continue sur $[0\,,1]$, puisque $t\ln t$ tend vers 0 en 0 (croissances comparées), et le théorème 9 s'applique. Pour l'intégrale, on intègre par parties en dérivant $\ln t$ et en primitivant t : pour $t > 0$, la fonction $G(t) = \dfrac{t^2}{2}\ln t - \dfrac{t^2}{4}$ vérifie $G' = g$. Pour $\varepsilon \in]0\,,1]$, on a donc $\displaystyle\int_\varepsilon^1 g = G(1) - G(\varepsilon)$. Quand ε tend vers 0, le premier membre tend vers $\displaystyle\int_0^1 g$ (la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^1 g$ est continue, par le théorème 6), et $G(\varepsilon)$ tend vers 0.

$$\int_0^1 t\ln t\,\mathrm{d}t = G(1) = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

Piège. L'intégrale est bien celle d'une fonction continue sur le segment $[0\,,1]$: il ne s'agit pas d'une intégrale « impropre ». Mais on ne peut pas intégrer par parties directement sur $[0\,,1]$, puisque ln n'y est pas définie en 0 : on passe par $[\varepsilon\,,1]$.

(e) C'est $R_n'(g)$ avec $g(t) = \cos^2(\pi t)$. On linéarise : $\cos^2(\pi t) = \dfrac{1+\cos(2\pi t)}{2}$, et le cosinus a une intégrale nulle sur la période $[0\,,1]$.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1+\cos(2\pi t)}{2}\,\mathrm{d}t = \boxed{\frac{1}{2}}$$

(f) On factorise n^2 au dénominateur : $\dfrac{n}{(n+k)^2} = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{1}{(1+k/n)^2}$, et l'on reconnaît $R_n'(g)$ avec $g(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2}$, de primitive $-\dfrac{1}{1+t}$.

$$n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Big[-\frac{1}{1+t}\Big]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

(g) On divise chaque $\sqrt{k}$ par $\sqrt{n}$: le terme général est $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k/n} = R_n'(\sqrt{\cdot})$, la racine carrée étant continue sur $[0\,,1]$.

$$\frac{\sqrt{1}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Autrement dit, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \sim \frac{2}{3}\,n^{3/2}$: la somme se comporte comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^n \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.

(h) On factorise n dans la racine : $\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}} = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{\sqrt{4-(k/n)^2}}$. La fonction $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{4-t^2}}$ est continue sur $[0\,,1]$, et l'on reconnaît la dérivée de $\operatorname{Arcsin}\dfrac{t}{2}$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Big[\operatorname{Arcsin}\frac{t}{2}\Big]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

(i) Le cours ramène un produit à une somme par le logarithme : $\ln\Big(\dfrac{n!}{n^n}\Big)^{1/n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k}{n} = S_n$. On aimerait conclure que S_n tend vers $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$, mais la fonction ln, non bornée au voisinage de 0, n'est pas continue par morceaux sur $[0\,,1]$: le théorème 9 ne s'applique pas. On contourne la difficulté par un encadrement direct, en utilisant la croissance de ln. Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et $t \in [\dfrac{k}{n}\,,\dfrac{k+1}{n}]$, on a $\ln\dfrac{k}{n} \leqslant \ln t \leqslant \ln\dfrac{k+1}{n}$, donc, par croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{n}\ln\frac{k}{n} \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln t\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\ln\frac{k+1}{n}.$$

On somme pour k de 1 à $n-1$, avec la relation de Chasles, et l'on pose $J_n = \displaystyle\int_{1/n}^{1} \ln t\,\mathrm{d}t$. Comme le terme d'indice n de S_n est $\ln 1 = 0$, et celui d'indice 1 vaut $-\dfrac{\ln n}{n}$, on obtient

$$S_n \leqslant J_n \leqslant S_n + \frac{\ln n}{n}, \qquad \text{soit} \qquad J_n - \frac{\ln n}{n} \leqslant S_n \leqslant J_n.$$

Une primitive de ln est $t\ln t - t$ (chapitre 6), d'où $J_n = -1 + \dfrac{\ln n}{n} + \dfrac{1}{n}$, qui tend vers -1 par croissances comparées, de même que $J_n - \dfrac{\ln n}{n}$. Par encadrement, $S_n \to -1$, et par continuité de l'exponentielle :

$$\boxed{\Big(\frac{n!}{n^n}\Big)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\mathrm{e}}}$$

La formule de Stirling (théorème 10) confirme ce résultat : $\dfrac{n!}{n^n} \sim \sqrt{2\pi n}\,\mathrm{e}^{-n}$, et $\dfrac{1}{n}\ln\big(\sqrt{2\pi n}\big) \to 0$. Numériquement, pour $n = 500$, l'encadrement donne $-0{,}998 \leqslant S_{500} \approx -0{,}992 \leqslant -0{,}986$ ✓.
Piège. L'erreur la plus répandue est d'appliquer le théorème 9 à ln sur $[0\,,1]$: le résultat est juste, mais le raisonnement ne l'est pas, faute de continuité par morceaux. L'encadrement par la monotonie est l'outil qui remplace le théorème quand la fonction n'est pas bornée au bord.

(j) Le logarithme du terme général est $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\big(1+\frac{k^2}{n^2}\big) = R_n'(g)$, avec $g(t) = \ln(1+t^2)$ continue sur $[0\,,1]$. On intègre par parties en dérivant le logarithme, qui devient une fraction rationnelle, et en primitivant 1 en t :

$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \big[t\ln(1+t^2)\big]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln 2 - 2\int_0^1 \Big(1 - \frac{1}{1+t^2}\Big)\,\mathrm{d}t = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Par continuité de l'exponentielle,

$$\Big(\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{k^2}{n^2}\Big)\Big)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{\ln 2 - 2 + \pi/2} = \boxed{2\,\mathrm{e}^{\pi/2-2} \approx 1{,}3021}$$

Toutes ces limites ont été contrôlées numériquement pour $n = 4\,000$ ✓.

EXERCICE 39 ⋆⋆

1. Dans les trois sommes, k va jusqu'à $3n$, $4n$ ou $2n$: les points $\dfrac{k}{n}$ parcourent $[0\,,3]$, $[0\,,4]$ ou $[0\,,2]$ avec le pas $\dfrac{1}{n}$. Sur $[0\,,c]$, avec $N = cn$ intervalles, le pas est $\dfrac{c}{N} = \dfrac{1}{n}$, et l'on reconnaît $R'_N(g) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{cn} g(\frac{k}{n})$, qui tend vers $\displaystyle\int_0^c g$ par le théorème 9.

Pour la première somme, $\dfrac{n}{n^2+k^2} = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{1}{1+(k/n)^2}$:

$$\sum_{k=1}^{3n} \frac{n}{n^2+k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^3 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \boxed{\operatorname{Arctan} 3}$$

Pour la deuxième, $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{1}{\sqrt{1+(k/n)^2}}$. Une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est $\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$, ce que l'on vérifie en dérivant : $\dfrac{1+t/\sqrt{1+t^2}}{t+\sqrt{1+t^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

$$\sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Big[\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\Big]_0^4 = \boxed{\ln\left(4+\sqrt{17}\right)}$$

La troisième est $R'_{2n}(g)$ sur $[0\,,2]$, avec $g(t) = 2t\,\mathrm{e}^{1+3t}$. On intègre par parties, en dérivant le facteur polynomial $2t$ et en primitivant l'exponentielle en $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{1+3t}$:

$$\int_0^2 2t\,\mathrm{e}^{1+3t}\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{2t}{3}\,\mathrm{e}^{1+3t}\Big]_0^2 - \frac{2}{3}\int_0^2 \mathrm{e}^{1+3t}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\,\mathrm{e}^7 - \frac{2}{9}(\mathrm{e}^7 - \mathrm{e}),$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{2k}{n}\,\mathrm{e}^{1+3k/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{\frac{2\mathrm{e}}{9}(1+5\mathrm{e}^6) \approx 1\,219{,}09}$$

Piège. L'erreur la plus répandue, signalée dans le cours, est d'intégrer sur $[0\,,1]$ par réflexe. Le facteur devant la somme reste $\dfrac{1}{n}$, alors que la longueur de l'intervalle est 3, 4 ou 2 : c'est le nombre de termes, cn, qui fixe l'intervalle.

2. On fait apparaître une somme de Riemann en factorisant n^2 :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(k/n)^2},$$

où le second facteur tend vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} \neq 0$. Une suite de limite finie non nulle ℓ est équivalente à ℓ (chapitre 10), d'où

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} \sim \frac{\pi}{4n}}$$

Pour la seconde somme, on pose $k = n+j$, avec $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n+j)^2} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+j/n)^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{2n}}$$

par l'exercice précédent, (f). Pour $n = 10\,000$, les rapports de chaque somme à son équivalent valent 0,99997 et 0,99993 ✓.

À retenir. Une somme de Riemann donne une limite ; si cette limite est nulle, on cherche le bon facteur de normalisation. Ici, sans le facteur n, chaque somme tend vers 0, et c'est le produit par n qui tend vers une intégrale.

EXERCICE 40 ⋆⋆

1. La somme double se factorise, puisque les indices k et ℓ varient indépendamment :

$$S_n = \Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big)\Big(\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} f\Big(\frac{\ell}{n}\Big)\Big) = R'_n(f)^2.$$

Par le théorème 9 et la continuité de $x \mapsto x^2$,

$$\boxed{S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Big(\int_0^1 f\Big)^2}$$

Pour T_n, on découpe le carré des indices en trois parties : $k < \ell$, $k > \ell$ et $k = \ell$. Les deux premières donnent la même somme, en échangeant les noms des indices. En notant $D_n = \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})^2$ la somme diagonale, on a donc $n^2 S_n = 2\sum_{k<\ell} + D_n$ et $n^2 T_n = \sum_{k<\ell} + D_n$, d'où

$$T_n = \frac{1}{2}\Big(S_n + \frac{D_n}{n^2}\Big).$$

Or $\dfrac{D_n}{n^2} = \dfrac{1}{n} R'_n(f^2)$, où $R'_n(f^2)$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 f^2$: ce terme tend vers 0.

$$\boxed{T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\Big(\int_0^1 f\Big)^2}$$

À retenir. Le résultat est naturel : T_n porte sur la moitié du carré $[0\,,1]^2$ découpé par sa diagonale, et la diagonale elle-même, qui ne contient que n termes sur n^2, ne compte pas à la limite.

2. La somme proposée n'est pas une somme de Riemann de fg, puisque f et g ne sont pas évaluées au même point. On la compare à $R_n(fg) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})g(\frac{k}{n})$, qui tend vers $\displaystyle\int_0^1 fg$ par le théorème 9. Soit $M = \max_{[0,1]} |f|$, qui existe par le théorème des bornes atteintes (chapitre 8, théorème 10), et $\varepsilon > 0$. La fonction g, continue sur un segment, y est uniformément continue (théorème de Heine, chapitre 8, théorème 12) : il existe $\delta > 0$ tel que $|g(x) - g(y)| \leqslant \varepsilon$ dès que $|x - y| \leqslant \delta$. Pour $n \geqslant \dfrac{1}{\delta}$, chacun des écarts $|g(\frac{k+1}{n}) - g(\frac{k}{n})|$ est au plus ε, donc

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)g\Big(\frac{k+1}{n}\Big) - R_n(fg)\Big| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M\varepsilon = M\varepsilon.$$

La différence tend vers 0, et

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\, g\Big(\frac{k+1}{n}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}$$

On a contrôlé numériquement les trois limites avec $f(t) = \cos 3t + t$, $g = \exp$ et $n = 400$ ✓. C'est un cas particulier de la souplesse du théorème 9 : décaler un peu les points d'évaluation ne change pas la limite, et c'est la continuité uniforme qui le garantit.

EXERCICE 41 ⋆⋆

Pour $n \geqslant 1$, on note $x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$. L'inégalité de Jensen (chapitre 9, proposition 7), appliquée à φ avec les points $f(x_0)$, …, $f(x_{n-1})$ et les poids égaux $\lambda_k = \dfrac{1}{n}$, donne

$$\varphi\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Big) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f(x_k)), \qquad \text{soit} \qquad \varphi\Big(\frac{R_n(f)}{b-a}\Big) \leqslant \frac{R_n(\varphi\circ f)}{b-a}.$$

Les fonctions f et $\varphi \circ f$ sont continues sur $[a\,,b]$: par le théorème 9, $R_n(f)$ et $R_n(\varphi\circ f)$ tendent vers leurs intégrales. Comme φ est continue, le membre de gauche tend vers $\varphi(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f)$ (caractérisation séquentielle de la continuité, chapitre 8, théorème 7). On passe à la limite dans l'inégalité large (chapitre 7, théorème 5) :

$$\boxed{\varphi\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(t))\,\mathrm{d}t}$$

L'hypothèse de continuité de φ a servi exactement à ce passage à la limite.

Pour $\varphi : x \mapsto x^2$, convexe puisque $\varphi'' = 2 \geqslant 0$ (chapitre 9, théorème 11), on obtient, après multiplication par $(b-a)^2$,

$$\boxed{\Big(\int_a^b f\Big)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2}$$

C'est le cas particulier $g = 1$ de l'inégalité de Cauchy-Schwarz de l'exercice 15. Pour $\varphi = \exp$, également convexe,

$$\boxed{\exp\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\Big) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{e}^f}$$

Pour $f(t) = t$ sur $[0\,,1]$, ces inégalités s'écrivent $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{3}$ et $\mathrm{e}^{1/2} \approx 1{,}649 \leqslant \mathrm{e} - 1 \approx 1{,}718$ ✓.

À retenir. En appliquant la dernière inégalité à $\ln h$, pour h continue et strictement positive, on obtient $\exp\big(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \ln h\big) \leqslant \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b h$: c'est l'inégalité entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique, version continue de celle du chapitre 9. Les sommes de Riemann transportent ainsi toute inégalité sur des moyennes finies en une inégalité intégrale.

EXERCICE 42 ⋆⋆

On note $h = \dfrac{1}{n}$ et $x_k = kh$. Par la relation de Chasles,

$$nI - \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = n\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\,\mathrm{d}t.$$

Soit $M_2 = \max\limits_{[0,1]} |f''|$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 (théorème 8), en x_k, donne pour $t \in [x_k\,, x_{k+1}]$

$$\big|f(t) - f(x_k) - f'(x_k)(t-x_k)\big| \leqslant M_2\,\frac{(t-x_k)^2}{2}.$$

On intègre sur $[x_k\,, x_{k+1}]$, avec $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t-x_k)\,\mathrm{d}t = \frac{h^2}{2}$ et $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(t-x_k)^2}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{h^3}{6}$:

$$\Big|\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\,\mathrm{d}t - \frac{h^2}{2}\,f'(x_k)\Big| \leqslant \frac{M_2 h^3}{6}.$$

En sommant ces n inégalités et en multipliant par n, avec $h = \dfrac{1}{n}$,

$$\Big|nI - \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'(x_k)\Big| \leqslant n\cdot n\,\frac{M_2}{6n^3} = \frac{M_2}{6n}.$$

Le terme $\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'(x_k)$ est $R_n(f')$, qui tend vers $\displaystyle\int_0^1 f' = f(1)-f(0)$ par le théorème 9, f' étant continue.

$$\boxed{nI - \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{f(1)-f(0)}{2}}$$

Pour $f = \exp$, la limite vaut $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2} \approx 0{,}85914$, et l'on calcule 0,84482 pour $n = 10$, 0,85771 pour $n = 100$ et 0,85900 pour $n = 1\,000$ ✓.

Ce résultat s'écrit $I - R_n(f) = \dfrac{f(1)-f(0)}{2n} + o(\dfrac{1}{n})$. Si $f(1) \neq f(0)$, l'erreur de la méthode des rectangles est donc équivalente à $\dfrac{f(1)-f(0)}{2n}$: elle est exactement d'ordre $\dfrac{1}{n}$, et la majoration en $\dfrac{1}{n}$ de la proposition 13 ne peut pas être améliorée en ordre de grandeur. Multiplier le nombre de points par 10 ne fait gagner qu'une décimale, comme le montrait le tableau du cours.

À retenir. Puisque $T_n(f) = \dfrac{R_n(f)+R'_n(f)}{2}$ et $R'_n(f) - R_n(f) = \dfrac{f(1)-f(0)}{n}$, on a exactement $T_n(f) = R_n(f) + \dfrac{f(1)-f(0)}{2n}$: la méthode des trapèzes est la méthode des rectangles à laquelle on ajoute le terme correctif trouvé ici. C'est pourquoi son erreur est d'un ordre plus petit, en $\dfrac{1}{n^2}$ (proposition 14).

EXERCICE 43 ⋆⋆⋆

On établit d'abord l'inégalité suggérée. La fonction $\psi : u \mapsto \ln(1+u)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, avec $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$ et $\psi''(u) = -\dfrac{1}{(1+u)^2}$, donc $|\psi''(u)| \leqslant \dfrac{1}{(1/2)^2} = 4$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 en 0 (théorème 8) donne

$$\boxed{|\ln(1+u) - u| \leqslant 4\,\frac{u^2}{2} = 2u^2 \qquad \text{pour } |u| \leqslant \frac{1}{2}}$$

Soit $M = \max_{[0,1]} |f|$, qui existe par le théorème des bornes atteintes, et $n \geqslant \max(1, 2M)$. Pour tout k, le nombre $u_k = \dfrac{1}{n} f(\dfrac{k}{n})$ vérifie $|u_k| \leqslant \dfrac{M}{n} \leqslant \dfrac{1}{2}$: tous les facteurs du produit P_n sont strictement positifs, et l'on peut en prendre le logarithme. On compare alors $\ln P_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1+u_k)$ à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = R'_n(f)$:

$$|\ln P_n - R'_n(f)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\ln(1+u_k) - u_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2u_k^2 \leqslant n \cdot \frac{2M^2}{n^2} = \frac{2M^2}{n}.$$

Ce majorant tend vers 0, et $R'_n(f)$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 f$ par le théorème 9 : $\ln P_n$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 f$. Par continuité de l'exponentielle,

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} \Big(1 + \frac{1}{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp\Big(\int_0^1 f\Big)}$$

Pour $f = 1$, on retrouve la limite $(1+\dfrac{1}{n})^n \to \mathrm{e}$ du chapitre 10. Pour $f(x) = x^2$, la limite est $\mathrm{e}^{1/3} \approx 1{,}39561$, et le produit vaut 1,39567 pour $n = 10\,000$ ✓.

Piège. Il ne suffit pas de dire que $\ln(1+u_k) \sim u_k$ pour chaque k : on somme n termes, et n erreurs « négligeables » peuvent ne pas l'être ensemble. C'est la majoration *uniforme* en $\dfrac{2M^2}{n^2}$, la même pour tous les k, qui permet de contrôler la somme des n erreurs.

EXERCICE 44 ⋆⋆⋆

1. La fonction f est continue, positive et non identiquement nulle, et $a < b$. Par la contraposée du théorème 4 :

$$\boxed{I = \int_a^b f > 0}$$

On peut aussi dire que f atteint un minimum $m > 0$, d'où $I \geqslant m(b-a) > 0$ par la proposition 7.

2. On introduit $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$. Par le théorème 6, F est de classe $\mathcal{C}^1$ et $F' = f > 0$: elle est continue et strictement croissante sur $[a\,,b]$, avec $F(a) = 0$ et $F(b) = I$. Par le théorème de la bijection continue (chapitre 8, théorème 11), F est une bijection de $[a\,,b]$ sur $[0\,,I]$, et sa réciproque F^{-1} est continue.

Soit $(x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a\,,b]$, avec donc $x_0 = a$. Par la relation de Chasles,

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f = F(x_k) - F(x_{k-1}),$$

et les n conditions de l'énoncé équivalent, de proche en proche à partir de $F(x_0) = 0$, à $F(x_k) = \dfrac{kI}{n}$ pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$. Réciproquement, les réels $x_k = F^{-1}(\dfrac{kI}{n})$ vérifient $x_0 = a$, $x_n = F^{-1}(I) = b$, et ils sont strictement croissants puisque F^{-1} l'est : ils forment une subdivision qui convient.

$$\boxed{\text{la subdivision existe et est unique : } x_{n,k} = F^{-1}\Big(\frac{kI}{n}\Big), \quad 0 \leqslant k \leqslant n}$$

3. Par la question 2,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k}) = \frac{1}{I}\cdot\frac{I}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(f\circ F^{-1})\Big(0 + k\,\frac{I}{n}\Big) = \frac{1}{I}\,R_n(f\circ F^{-1}),$$

où R_n est la somme des rectangles sur le segment $[0\,,I]$. La fonction $f\circ F^{-1}$ est continue sur $[0\,,I]$, et le théorème 9 donne la limite $\dfrac{1}{I}\displaystyle\int_0^I f(F^{-1}(y))\,\mathrm{d}y$. Pour calculer cette intégrale, on effectue le changement de variable $y = F(x)$ (chapitre 6, proposition 5) : c'est le changement naturel, puisqu'il fait disparaître la réciproque F^{-1}, et que $\mathrm{d}y = F'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$ fait apparaître un second facteur f. La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,,b]$, avec $F(a) = 0$ et $F(b) = I$:

$$\int_0^I f(F^{-1}(y))\,\mathrm{d}y = \int_a^b f(F^{-1}(F(x)))\,F'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{I}\int_a^b f^2}$$

Pour $f(x) = 1 + x$ sur $[0\,,1]$, on trouve $I = \dfrac{3}{2}$, $\displaystyle\int_0^1 (1+x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{7}{3}$, et la limite vaut $\dfrac{14}{9} \approx 1{,}5556$; avec $x_{n,k} = -1 + \sqrt{1 + 3k/n}$, la moyenne calculée vaut 1,5551 pour $n = 1\,000$ ✓.

À retenir. Les points $x_{n,k}$ se resserrent là où f est grande, puisque chaque intervalle porte la même aire. La moyenne des valeurs de f en ces points dépasse donc la valeur moyenne de f : en effet, par l'exercice 41 appliqué à $x \mapsto x^2$, $\dfrac{1}{I}\displaystyle\int_a^b f^2 \geqslant \frac{I}{b-a}$. Sur l'exemple, $\dfrac{14}{9} \geqslant \dfrac{3}{2}$.

EXERCICE 45 ⋆⋆⋆

1. Pour l'inégalité de droite, on utilise la position de la courbe sous ses cordes (chapitre 9, proposition 9). Pour $t \in [a\,,b]$, la corde joignant les points d'abscisses a et b donne

$$f(t) \leqslant \frac{b-t}{b-a}\,f(a) + \frac{t-a}{b-a}\,f(b).$$

On intègre sur $[a\,,b]$, avec $\displaystyle\int_a^b (b-t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (t-a)\,\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^2}{2}$:

$$\int_a^b f \leqslant \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big).$$

Pour l'inégalité de gauche, on remarque que m est le milieu de t et de $a+b-t$. La convexité, avec les poids $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$, donne

$$f(m) \leqslant \frac{f(t)+f(a+b-t)}{2} \qquad \text{pour tout } t \in [a\,,b].$$

On intègre sur $[a\,,b]$. Le changement de variable affine $u = a+b-t$, qui échange a et b, montre que $\displaystyle\int_a^b f(a+b-t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$: on obtient $(b-a)f(m) \leqslant \displaystyle\int_a^b f$.

$$\boxed{f(m) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}}$$

Géométriquement, l'aire sous la courbe est comprise entre celle du rectangle de hauteur $f(m)$, qui est aussi celle du trapèze limité par la tangente en m quand f est dérivable, et celle du trapèze limité par la corde.

2. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 (théorème 8) en m : pour tout $t \in [a\,,b]$,

$$\big|f(t) - f(m) - f'(m)(t-m)\big| \leqslant M_2\,\frac{(t-m)^2}{2}.$$

On intègre sur $[a\,,b]$. Le terme du premier ordre disparaît, car $\displaystyle\int_a^b (t-m)\,\mathrm{d}t = 0$ par symétrie : c'est tout l'intérêt du point milieu. Par ailleurs, en notant $\ell = \dfrac{b-a}{2}$,

$$\int_a^b \frac{(t-m)^2}{2}\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{(t-m)^3}{6}\Big]_a^b = \frac{2\ell^3}{6} = \frac{(b-a)^3}{24}.$$

Par l'inégalité triangulaire (théorème 3 (iv)),

$$\boxed{\Big|\int_a^b f - (b-a)f(m)\Big| \leqslant M_2\,\frac{(b-a)^3}{24}}$$

3. On applique la question 2 sur chaque segment $[x_k\,,x_{k+1}]$, de longueur $h = \dfrac{b-a}{n}$ et de milieu $m_k = \dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}$, le réel M_2 majorant encore $|f''|$ sur ce segment. Par la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire,

$$\Big|\int_a^b f - h\sum_{k=0}^{n-1} f(m_k)\Big| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\Big|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f - hf(m_k)\Big| \leqslant n\,\frac{M_2 h^3}{24},$$

$$\boxed{\Big|\int_a^b f - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\Big)\Big| \leqslant M_2\,\frac{(b-a)^3}{24n^2}}$$

C'est la majoration admise dans la deuxième remarque qui suit la proposition 14.

4. On suppose f convexe et, comme à la question 1, continue. On note $M_n(f)$ la somme du point milieu. L'inégalité de gauche de la question 1, sur chaque $[x_k\,,x_{k+1}]$, donne $hf(m_k) \leqslant \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f$; celle de droite donne $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f \leqslant h\,\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}$. En sommant,

$$\boxed{f \text{ convexe } \Longrightarrow\ M_n(f) \leqslant \int_a^b f \leqslant T_n(f)}$$

La méthode du point milieu donne une valeur par défaut, celle des trapèzes une valeur par excès. On retrouve, sans supposer f de classe $\mathcal{C}^2$, la première remarque qui suit la proposition 14.

5. Les milieux sont $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{8}$, et $f(\frac{j}{8}) = \dfrac{256}{64+j^2}$, d'où

$$M_4(f) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f\Big(\frac{2k+1}{8}\Big) = \frac{64}{65}+\frac{64}{73}+\frac{64}{89}+\frac{64}{113}, \qquad \boxed{M_4(f) \approx 3{,}146\,801}$$

$$M_4(f)-\pi \approx +5{,}2\times 10^{-3}, \qquad T_4(f)-\pi \approx 3{,}131\,176-\pi \approx -1{,}04\times 10^{-2}.$$

L'erreur du point milieu est environ la moitié de celle des trapèzes, et de signe opposé, ce qu'annonçaient les constantes $\frac{1}{24}$ et $\frac{1}{12}$. Avec $M_2 = \max\limits_{[0,1]} |f''| = 8$, la question 3 garantit une erreur au plus $\dfrac{8}{24\times 16} \approx 2{,}1\times 10^{-2}$, quatre fois plus que l'erreur réelle.

Piège. La question 4 ne s'applique pas ici : $f''(x) = \dfrac{8(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$ est négative sur $[0\,,\frac{1}{\sqrt{3}}]$, et f n'est pas convexe sur $[0\,,1]$. Les signes observés, point milieu par excès et trapèzes par défaut, sont ceux d'une fonction concave, ce que f est sur la plus grande partie de l'intervalle.

À retenir. Les deux erreurs étant à peu près dans le rapport $-\frac{1}{2}$, la combinaison $\dfrac{2M_4(f)+T_4(f)}{3}$ les compense : elle vaut 3,141 592 50, à $1{,}5\times 10^{-7}$ de π, avec seulement neuf évaluations de f. C'est la méthode de Simpson, que l'on rencontrera en informatique.

Intégrales de Wallis et constante de Stirling

EXERCICE 46 ⋆⋆

1. Pour $a_0 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$, on effectue le changement de variable $t = \sin\theta$, avec $\theta \in [0\,,\frac{\pi}{2}]$ (chapitre 6, proposition 5) : c'est le changement naturel devant $\sqrt{1-t^2}$, qui devient $\sqrt{1-\sin^2\theta} = \cos\theta$, positif sur cet intervalle. Avec $\mathrm{d}t = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$,

$$a_0 = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = W_2, \qquad \boxed{a_0 = \frac{\pi}{4}}$$

par la proposition 15 (iii). C'est l'aire d'un quart de disque de rayon 1. Pour a_1, l'intégrande $t\sqrt{1-t^2}$ est de la forme $-\frac{1}{2}u'u^{1/2}$, avec $u = 1-t^2$: une primitive est $-\frac{1}{3}(1-t^2)^{3/2}$.

$$a_1 = \Big[-\frac{1}{3}(1-t^2)^{3/2}\Big]_0^1, \qquad \boxed{a_1 = \frac{1}{3}}$$

2. Pour $t \in [0\,,1]$, on a $t^{n+1} \leqslant t^n$, donc $t^{n+1}\sqrt{1-t^2} \leqslant t^n\sqrt{1-t^2}$, et la croissance de l'intégrale donne $a_{n+1} \leqslant a_n$. La suite est décroissante, et minorée par 0 par positivité : elle converge. Pour la limite, $\sqrt{1-t^2} \leqslant 1$ donne

$$0 \leqslant a_n \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}, \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{(a_n) \text{ est décroissante et } \lim_{n\to+\infty} a_n = 0}$$

De plus, $a_n > 0$ par le théorème 4, l'intégrande étant continu, positif et non nul en $\frac{1}{2}$.

3. On intègre par parties, pour abaisser l'exposant de t : c'est la technique naturelle, comme pour les intégrales de Wallis, et le facteur $t\sqrt{1-t^2}$ a une primitive explicite, trouvée à la question 1. On écrit $t^{n+2}\sqrt{1-t^2} = t^{n+1}\cdot t\sqrt{1-t^2}$, on dérive t^{n+1} et l'on primitive $t\sqrt{1-t^2}$ en $-\frac{1}{3}(1-t^2)^{3/2}$:

$$a_{n+2} = \Big[-\frac{t^{n+1}(1-t^2)^{3/2}}{3}\Big]_0^1 + \frac{n+1}{3}\int_0^1 t^n(1-t^2)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{n+1}{3}\,(a_n - a_{n+2}),$$

le crochet étant nul aux deux bornes. On regroupe les termes en a_{n+2} : $(n+4)\,a_{n+2} = (n+1)\,a_n$.

$$\boxed{a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4}\,a_n}$$

On contrôle avec $n=0$: $a_2 = \frac{1}{4}\,a_0 = \frac{\pi}{16}$, et l'on trouve bien $W_2 - W_4 = \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{16}$ par la question 5 ci-dessous ✓.

4. Dans la proposition 15, la relation de récurrence fait apparaître le produit constant nW_nW_{n-1}. On cherche ici l'analogue : posons $v_n = (n+1)(n+2)(n+3)\,a_na_{n+1}$. Par la question 3,

$$v_{n+1} = (n+2)(n+3)(n+4)\,a_{n+1}a_{n+2} = (n+2)(n+3)(n+4)\,a_{n+1}\,\frac{n+1}{n+4}\,a_n = v_n.$$

La suite (v_n) est constante, égale à $v_0 = 6\,a_0a_1 = 6\times\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{3}$:

$$\boxed{(n+1)(n+2)(n+3)\,a_na_{n+1} = \frac{\pi}{2}}$$

Comme dans la démonstration du cours, on montre ensuite que $a_{n+1}\sim a_n$. Par décroissance, on a $a_{n+2}\leqslant a_{n+1}\leqslant a_n$ et, en divisant par $a_n>0$,

$$\frac{n+1}{n+4} = \frac{a_{n+2}}{a_n} \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1.$$

Par encadrement, $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to 1$. Ainsi $\frac{\pi}{2} = (n+1)(n+2)(n+3)\,a_na_{n+1}\sim n^3a_n^2$, donc $n^3a_n^2\to\frac{\pi}{2}$ et, par continuité de la racine carrée, $n^{3/2}a_n\to\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

$$\boxed{a_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{n^{3/2}}}$$

Pour $n = 2\,000$, le rapport des deux membres vaut 0,9989 ✓.

5. Le même changement de variable qu'à la question 1, $t=\sin\theta$, transforme $t^n\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ en $\sin^n\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$. Avec $\cos^2 = 1-\sin^2$ et la proposition 15 (ii),

$$a_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\,(1-\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = W_n - W_{n+2} = W_n - \frac{n+1}{n+2}\,W_n, \qquad \boxed{a_n = \frac{W_n}{n+2}}$$

On retrouve $a_0 = \frac{W_0}{2} = \frac{\pi}{4}$ et $a_1 = \frac{W_1}{3} = \frac{1}{3}$ ✓. Par la proposition 15 (v), $a_n\sim\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,n^{-3/2}$: c'est l'équivalent de la question 4.

À retenir. Les deux méthodes ont des rôles différents. La question 4 montre que le procédé du cours (récurrence, produit constant, décroissance) s'adapte à d'autres familles d'intégrales ; la question 5 montre qu'un changement de variable bien choisi ramène souvent une famille nouvelle à une famille connue.

EXERCICE 47 ⋆⋆⋆

1. L'intégrande $t^2\cos^{2n}t$ est continu, positif sur $[0\,,\frac{\pi}{2}]$, et non nul en $\frac{\pi}{4}$: par le théorème 4, $b_n>0$. Pour la majoration, on utilise la concavité de sin sur $[0\,,\frac{\pi}{2}]$, où $\sin''=-\sin\leqslant 0$ (chapitre 9, théorème 11). La fonction $-\sin$ est convexe, et sa courbe est au-dessous de sa corde entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (chapitre 9, proposition 9) : la courbe de sin est donc au-dessus de la corde joignant $(0,0)$ à $(\frac{\pi}{2},1)$, et

$$\sin t\geqslant\frac{2}{\pi}t,\qquad\text{soit}\qquad t^2\leqslant\frac{\pi^2}{4}\sin^2 t\qquad\text{pour } t\in\Big[0\,,\frac{\pi}{2}\Big].$$

On multiplie par $\cos^{2n}t\geqslant 0$, on remplace $\sin^2$ par $1-\cos^2$, et l'on intègre :

$$\boxed{0<b_n\leqslant\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi/2}(\cos^{2n}t-\cos^{2n+2}t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{4}\,(a_{2n}-a_{2n+2})}$$

2. La relation rappelée, au rang $2n$, donne $a_{2n+2}=\dfrac{2n+1}{2n+2}\,a_{2n}$, donc $a_{2n}-a_{2n+2}=\dfrac{a_{2n}}{2n+2}$. En divisant la question 1 par $a_{2n}>0$,

$$0<\frac{b_n}{a_{2n}}\leqslant\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{2n+2}=\frac{\pi^2}{8(n+1)},\qquad\text{d'où}\qquad\boxed{\frac{b_n}{a_{2n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}$$

3. On procède par deux intégrations par parties. Le but est de faire apparaître le facteur t^2 de b_n à partir de a_{2n+2}, qui n'en contient pas : la technique naturelle est d'intégrer par parties en primitivant le facteur polynomial, 1 puis t, ce qui augmente son degré, et en dérivant la puissance de cos.

Première formule. On écrit $a_{2n+2}=\displaystyle\int_0^{\pi/2}1\cdot\cos^{2n+2}t\,\mathrm{d}t$, on primitive 1 en t et l'on dérive $\cos^{2n+2}t$ en $-(2n+2)\sin t\cos^{2n+1}t$. Le crochet $\big[t\cos^{2n+2}t\big]_0^{\pi/2}$ est nul :

$$\boxed{a_{2n+2}=(2n+2)\int_0^{\pi/2}t\sin t\,\cos^{2n+1}t\,\mathrm{d}t}$$

Deuxième formule. On intègre par parties $J=\displaystyle\int_0^{\pi/2}t\cdot\sin t\cos^{2n+1}t\,\mathrm{d}t$, en primitivant t en $\dfrac{t^2}{2}$ et en dérivant $v(t)=\sin t\cos^{2n+1}t$:

$$v'(t)=\cos^{2n+2}t-(2n+1)\sin^2t\cos^{2n}t=(2n+2)\cos^{2n+2}t-(2n+1)\cos^{2n}t,$$

en remplaçant $\sin^2$ par $1-\cos^2$. Le crochet $\big[\dfrac{t^2}{2}\,v(t)\big]_0^{\pi/2}$ est nul, car $v(0)=0$ et $\cos\dfrac{\pi}{2}=0$. Donc

$$J=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}t^2\big((2n+2)\cos^{2n+2}t-(2n+1)\cos^{2n}t\big)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\big((2n+1)\,b_n-(2n+2)\,b_{n+1}\big).$$

Avec la première formule, $a_{2n+2}=(2n+2)J=(n+1)\big((2n+1)\,b_n-(2n+2)\,b_{n+1}\big)$, soit

$$\boxed{\frac{a_{2n+2}}{n+1}=(2n+1)\,b_n-(2n+2)\,b_{n+1}}$$

Troisième formule. On divise la deuxième par $(n+1)\,a_{2n+2}>0$:

$$\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{(2n+1)\,b_n}{(n+1)\,a_{2n+2}}-\frac{2\,b_{n+1}}{a_{2n+2}}.$$

Or $a_{2n+2} = \dfrac{2n+1}{2n+2}\,a_{2n}$ donne $\dfrac{2n+1}{(n+1)\,a_{2n+2}} = \dfrac{2n+1}{n+1}\cdot\dfrac{2n+2}{(2n+1)\,a_{2n}} = \dfrac{2}{a_{2n}}$. Ainsi

$$\boxed{2\Big(\frac{b_n}{a_{2n}} - \frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\Big) = \frac{1}{(n+1)^2}}$$

Les trois formules ont été contrôlées numériquement pour n de 0 à 4 ✓.

4. On somme la troisième formule pour j allant de 0 à $n-1$: la somme est télescopique.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{(j+1)^2} = 2\Big(\frac{b_0}{a_0} - \frac{b_n}{a_{2n}}\Big).$$

Or $b_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^3}{24}$ et $a_0 = \dfrac{\pi}{2}$, donc $\dfrac{b_0}{a_0} = \dfrac{\pi^2}{12}$, et $\dfrac{b_n}{a_{2n}} \to 0$ par la question 2.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}}$$

Pour $n = 10$, les deux membres de l'égalité télescopique valent 1,549 77 ✓, encore loin de la limite $\dfrac{\pi^2}{6} \approx 1{,}644\,93$. La question 2 donne même une vitesse : $0 < \dfrac{\pi^2}{6} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{2b_n}{a_{2n}} \leqslant \frac{\pi^2}{4(n+1)}$.

À retenir. Ce résultat, dû à Euler, est le premier exemple de ce que le chapitre 20 appellera la somme d'une série. La démonstration n'utilise que des outils de ce chapitre : positivité, comparaison à une corde, intégration par parties et la relation de récurrence de Wallis.

Exercices de synthèse

EXERCICE 48 ⋆⋆

1. Faux. La fonction g définie par $g(0) = 0$ et $g(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ pour $x \in]0\,,1]$ est bornée et continue en tout point sauf en 0. Elle n'est pas continue par morceaux : sur tout intervalle $]0\,,x_1[$, elle n'a pas de limite en 0, puisqu'elle y prend les valeurs 1 et -1. C'est l'exemple du cours qui suit la proposition 2 : la définition exige des limites finies aux bords de chaque morceau, et pas seulement un nombre fini de discontinuités.

2. Vrai. Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée, et f_i le morceau d'indice i, continu sur $[x_{i-1}\,,x_i]$ et positif comme limite de valeurs positives. Par la proposition 6, $\displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} f = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i \geqslant 0$, et ces n intégrales positives ont une somme nulle par la relation de Chasles : elles sont toutes nulles. Par le théorème 4, chaque f_i est nulle, donc f est nulle sur chaque $]x_{i-1}\,,x_i[$: elle ne peut être non nulle qu'aux points x_i.

3. Faux. Soit f l'indicatrice de $\{\dfrac{1}{2}\}$ sur $[0\,,1]$, qui est en escalier. Par la proposition 6, $\displaystyle\int_0^x f = 0$ pour tout x : la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f$ est nulle, donc dérivable, alors que f n'est pas continue en $\dfrac{1}{2}$. Sa dérivée, nulle, ne coïncide d'ailleurs pas avec f en $\dfrac{1}{2}$: le théorème 6 exige la continuité.

4. Vrai. Par la proposition 7, il existe $c \in [a\,,b]$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f = 0$.

5. Vrai. La fonction f est une primitive de la fonction continue f', donc $f(1) - f(0) = \displaystyle\int_0^1 f'$ par le théorème 6, qui vaut pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. L'inégalité triangulaire complexe (théorème 5) conclut. Le résultat est faux pour les fonctions seulement continues par morceaux : il exige que f soit une primitive de f'.

6. Faux. La fonction $f(t) = 6t^2 - 6t + 1$ vérifie

$$\int_0^1 f = 2 - 3 + 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 t\, f(t)\, \mathrm{d}t = \frac{6}{4} - \frac{6}{3} + \frac{1}{2} = 0,$$

sans être nulle. C'est la question 4 de l'exercice 14 : deux conditions d'orthogonalité forcent au moins deux changements de signe, mais pas la nullité.

7. Vrai. La somme proposée vaut $R'_n(f) + \dfrac{f(0)}{n}$. Le premier terme tend vers $\displaystyle\int_0^1 f$ par le théorème 9, et le second vers 0. Un nombre fixé de termes supplémentaires, chacun de poids $\dfrac{1}{n}$, ne change pas la limite.

8. Faux. La fonction plate f, égale à $\mathrm{e}^{-1/x}$ pour $x > 0$ et à 0 pour $x \leqslant 0$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et toutes ses dérivées sont nulles en 0 (exercice 30 du chapitre 9). Tous ses polynômes de Taylor en 0 sont nuls, et leur valeur en $x = 1$ tend vers $0 \neq \mathrm{e}^{-1} = f(1)$. C'est la troisième remarque qui suit le théorème 8.

9. Vrai. Pour $x \in]0\,,1]$, la fonction φ égale à 1 sur $[0\,,x]$ et à 0 ailleurs est en escalier, et $\displaystyle\int_0^1 f\varphi = \int_0^x f = 0$. La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f$ est donc nulle sur $[0\,,1]$, et par le théorème 6, $f = F' = 0$.

10. Vrai. La démonstration de la proposition 14 établit, sur chaque segment $[\alpha\,,\beta]$ de la subdivision, de longueur $h = \beta - \alpha$, l'égalité

$$\int_\alpha^\beta f - h\,\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} = \int_\alpha^\beta \theta f'', \qquad \text{avec } \theta \leqslant 0.$$

Si f est convexe, $f'' \geqslant 0$, et cette quantité est négative : en sommant, $\displaystyle\int_a^b f \leqslant T_n(f)$. C'est aussi la question 4 de l'exercice 45, qui n'utilise que la position de la courbe sous ses cordes.

Vrai : $2, 4, 5, 7, 9, 10$;	Faux : $1, 3, 6, 8$

Piège. Les assertions 2 et 3 opposent continuité et continuité par morceaux : une fonction continue par morceaux est « invisible » de l'intégrale en un nombre fini de points, ce qui rend la 2 vraie avec la restriction « sauf en un nombre fini de points » et la 3 fausse. L'assertion 8 rappelle que la formule de Taylor donne une égalité exacte, mais que le reste ne tend pas toujours vers 0.

EXERCICE 49 ⋆⋆

1. On a $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$, soit $\boxed{I_0 = \mathrm{e} - 1}$. Pour la relation, on intègre par parties : c'est la technique naturelle, puisque le facteur polynomial $(1-x)^{n+1}$ perd un degré quand on le dérive, et que e^x est sa propre primitive. On dérive $(1-x)^{n+1}$ en $-(n+1)(1-x)^n$:

$$I_{n+1} = \left[\mathrm{e}^x (1-x)^{n+1}\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 \mathrm{e}^x (1-x)^n \,\mathrm{d}x = (0-1) + (n+1) I_n.$$

$$\boxed{I_{n+1} = (n+1)\, I_n - 1}$$

En particulier $I_1 = \mathrm{e} - 2$.

2. Voici une fonction possible, qui applique la relation n fois à partir de I_0.

```
import math

def I(n):
    v = math.e - 1                  # valeur flottante de I_0
    for k in range(n):              # passage de I_k a I_(k+1)
        v = (k + 1) * v - 1
    return v

for n in range(26):
    print(n, I(n))
```

Le tableau compare quelques valeurs affichées aux valeurs exactes, calculées en précision étendue.

n	0	5	10	15	16	17	18	20	25
I(n)	1,718 28	0,193 82	0,099 11	0,066 20	0,059 25	0,007 21	−0,870	−351,7	$-2{,}24 \times 10^9$
I_n	1,718 28	0,193 82	0,099 11	0,066 39	0,062 27	0,058 63	0,055 39	0,049 88	0,039 94

La suite semble d'abord décroître vers 0, puis, vers $n = 17$, elle devient brutalement négative et part vers $-\infty$: à $n = 25$, elle vaut environ $-2{,}24 \times 10^9$.

$$\boxed{\text{les valeurs calculées décroissent jusqu'à } n \approx 16, \text{ puis divergent vers } -\infty}$$

3. Pour $x \in [0\,,1]$, on a $0 \leqslant (1-x)^{n+1} \leqslant (1-x)^n$, d'où $I_{n+1} \leqslant I_n$ par croissance de l'intégrale. De plus $1 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}$, donc

$$0 < \frac{1}{n+1} = \int_0^1 (1-x)^n \,\mathrm{d}x \leqslant I_n \leqslant \mathrm{e}\int_0^1 (1-x)^n \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{n+1}.$$

$$\boxed{(I_n) \text{ est décroissante, } \frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}, \text{ et } \lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

En particulier $I_n > 0$ pour tout n : les valeurs négatives affichées à la question 2 sont fausses.

4. En soustrayant les relations $J_{n+1} = (n+1)J_n - 1$ et $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$, le terme constant disparaît :

$$J_{n+1} - I_{n+1} = (n+1)(J_n - I_n).$$

Par récurrence immédiate, à partir de $J_0 - I_0 = \alpha - (\mathrm{e} - 1)$,

$$\boxed{J_n - I_n = n!\,(\alpha - (\mathrm{e} - 1))}$$

5. Comme $I_n \to 0$ et $n! \to +\infty$, la question 4 donne :

$$\boxed{\alpha = \mathrm{e} - 1 :\ J_n = I_n \to 0; \quad \alpha > \mathrm{e} - 1 :\ J_n \to +\infty; \quad \alpha < \mathrm{e} - 1 :\ J_n \to -\infty}$$

L'ordinateur ne connaît pas $\mathrm{e}-1$, mais seulement un nombre flottant voisin α, avec ici

$$\alpha-(\mathrm{e}-1)\approx -1{,}45\times 10^{-16}.$$

La fonction `I` calcule donc J_n, et non I_n : l'erreur initiale est multipliée par $n!$. On calcule

$$18!\times(-1{,}45\times 10^{-16})\approx -0{,}93 \qquad \text{et} \qquad 25!\times(-1{,}45\times 10^{-16})\approx -2{,}24\times 10^{9}\,:$$

le signe change donc vers $n=18$, et la valeur affichée pour $n=25$ est exactement celle de l'erreur. Les erreurs d'arrondi commises à chaque étape s'ajoutent, mais elles sont multipliées par des facteurs plus petits, et c'est l'erreur initiale qui domine.

À retenir. Une relation de récurrence exacte peut être inutilisable numériquement : il faut regarder comment elle propage les erreurs. Ici, il suffit de la parcourir à l'envers, $I_n=\dfrac{I_{n+1}+1}{n+1}$, ce qui *divise* l'erreur par $n+1$ à chaque étape : en partant de la valeur grossière $I_{60}\approx 0$, on obtient I_{25} avec toutes ses décimales, $0{,}039\,938\,729\,673\ldots$ C'est l'encadrement de la question 3 qui garantit la limite que l'ordinateur ne voyait pas.

EXERCICE 50 ⋆⋆

1. La fonction sh est strictement croissante : les $n+1$ réels $s_k=\mathrm{sh}(k)$, pour $0\leqslant k\leqslant n$, sont deux à deux distincts. On note $L_0,\ldots,L_n$ les polynômes interpolateurs de Lagrange associés (chapitre 13, théorème 13) : $L_k\in\mathbb{R}_n[X]$ et $L_k(s_j)$ vaut 1 si $j=k$ et 0 sinon. Tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$ s'écrit alors $P=\sum_{k=0}^{n}P(s_k)\,L_k$, par l'unicité dans le théorème 13, puisque les deux membres sont dans $\mathbb{R}_n[X]$ et prennent les mêmes valeurs aux $n+1$ points s_k.

Existence. Pour $P\in\mathbb{R}_n[X]$, la linéarité de l'intégrale donne

$$\int_1^3 P(\sin t)\,\mathrm{e}^{-t^3}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n}P(s_k)\int_1^3 L_k(\sin t)\,\mathrm{e}^{-t^3}\,\mathrm{d}t.$$

Unicité. Si $(\mu_0,\ldots,\mu_n)$ convient aussi, on applique la formule à $P=L_j$: le second membre vaut $\sum_k \mu_k L_j(s_k)=\mu_j$, et le premier est le même pour les deux familles.

$$\boxed{\lambda_k=\int_1^3 L_k(\sin t)\,\mathrm{e}^{-t^3}\,\mathrm{d}t, \qquad L_k=\prod_{j\neq k}\frac{X-\mathrm{sh}(j)}{\mathrm{sh}(k)-\mathrm{sh}(j)}}$$

On a contrôlé numériquement, pour $n=2$, que ces réels donnent la valeur exacte de l'intégrale pour $P=1$, X et $3X^2-X+2$ ✓.

2. Les points $\cos(k\pi)=(-1)^k$ ne prennent que les deux valeurs 1 et -1. Pour $n\geqslant 2$, le polynôme $P=X^2-1$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$ et s'annule en tous ces points : le second membre est nul quels que soient les λ_k. Le premier membre vaut

$$\int_1^3(\sin^2 t-1)\,\mathrm{e}^{-t^3}\,\mathrm{d}t=-\int_1^3\cos^2 t\,\mathrm{e}^{-t^3}\,\mathrm{d}t<0,$$

par le théorème 4, l'intégrande $\cos^2 t\,\mathrm{e}^{-t^3}$ étant continu, positif et non nul en 2. Numériquement, il vaut environ $-0{,}0136$.

$$\boxed{\text{non : pour } n\geqslant 2,\ \text{aucune famille } (\lambda_k) \text{ ne convient avec les points } \cos(k\pi)}$$

À retenir. L'intégrale compliquée $\displaystyle\int_1^3 P(\sin t)\,\mathrm{e}^{-t^3}\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, et l'on vient de l'écrire comme combinaison des $n+1$ évaluations aux points s_k : c'est le principe de toutes les formules de quadrature. La seule chose qui compte est que les points soient distincts ; la méthode du point milieu et celle des trapèzes en sont des cas où les poids sont explicites.

EXERCICE 51 ⋆⋆⋆

1. Les nombres $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$ ont pour somme $2\cos t$ et pour produit 1. Ce sont donc les racines du polynôme unitaire de degré 2 de l'énoncé.

$$\boxed{X^2 - 2X\cos t + 1 = (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})}$$

2. (a) Par la question 1, avec $X = \theta$ réel, et comme $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}$,

$$1 - 2\theta\cos t + \theta^2 = (\theta - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{(\theta - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} = |\theta - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}|^2.$$

Ce nombre est positif, et il est nul si et seulement si $\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, ce qui imposerait $|\theta| = 1$ avec θ réel, c'est-à-dire $\theta = \pm 1$, cas exclus. Donc $1 - 2\theta\cos t + \theta^2 > 0$ pour tout t, et f, composée de fonctions continues, est continue sur $[0\,,2\pi]$.

$$\boxed{1 - 2\theta\cos t + \theta^2 = |\theta - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}|^2 > 0}$$

(b) Soit $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$. Par la question précédente, $f(\dfrac{2k\pi}{n}) = \ln|\theta - \omega^k|^2$, et la somme des logarithmes est le logarithme du produit :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{2k\pi}{n}\Big) = \ln\Big|\prod_{k=0}^{n-1}(\theta - \omega^k)\Big|^2.$$

Par la factorisation $X^n - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega^k)$ (chapitre 13, proposition 17), évaluée en θ, le produit vaut $\theta^n - 1$, qui n'est pas nul car $\theta \neq \pm 1$.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{2k\pi}{n}\Big) = 2\ln|\theta^n - 1|}$$

Pour $\theta = 0{,}7$ et $n = 7$, les deux membres valent $-0{,}1704$ ✓.

(c) On ne connaît pas de primitive de f : on calcule l'intégrale comme limite de sommes de Riemann. La fonction f est continue sur $[0\,,2\pi]$, et la somme des rectangles de pas $\dfrac{2\pi}{n}$ est, par (b),

$$R_n(f) = \frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{2k\pi}{n}\Big) = \frac{4\pi}{n}\ln|\theta^n - 1|,$$

qui tend vers $\displaystyle\int_0^{2\pi} f$ par le théorème 9.

— Si $|\theta| < 1$, alors $\theta^n \to 0$ et $\ln|\theta^n - 1| \to 0$: $R_n(f) \to 0$.

— Si $|\theta| > 1$, on factorise : $\ln|\theta^n - 1| = n\ln|\theta| + \ln|1 - \theta^{-n}|$, où le second terme tend vers 0. Donc $R_n(f) = 4\pi\ln|\theta| + \dfrac{4\pi}{n}\ln|1 - \theta^{-n}| \to 4\pi\ln|\theta|$.

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2\theta\cos t + \theta^2)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } |\theta| < 1 \\ 4\pi\ln|\theta| & \text{si } |\theta| > 1 \end{cases}}$$

Une intégration numérique confirme ces valeurs pour $\theta = 0{,}5$, $-0{,}3$, 2 et -3 ✓. Les deux cas sont cohérents entre eux : en remplaçant θ par $\dfrac{1}{\theta}$, l'intégrande devient $f(t) - 2\ln|\theta|$, et l'intégrale diminue de $4\pi\ln|\theta|$.

À retenir. Ici, la somme de Riemann n'est pas une approximation de l'intégrale : c'est elle qu'on sait calculer exactement, grâce à l'algèbre des racines de l'unité, et le théorème 9 transfère le résultat à l'intégrale. C'est le chemin inverse de celui de la méthode des rectangles.

EXERCICE 52 ⋆⋆⋆

1. Comme $a = b\pi$, on a $a - bX = b(\pi - X)$, donc $P_n = \dfrac{b^n}{n!}X^n(\pi - X)^n$, expression visiblement inchangée quand on remplace X par $\pi - X$:

$$\boxed{P_n(\pi - X) = P_n(X)}$$

En 0. Par la formule du binôme, $P_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}(-b)^j X^{n+j}$: les monômes ont des degrés compris entre n et $2n$. Comme $P_n^{(k)}(0) = k!\,c_k$, où c_k est le coefficient de X^k (chapitre 13, théorème 6), on obtient $P_n^{(k)}(0) = 0$ si $k < n$ ou $k > 2n$, et, pour $k = n + j$ avec $0 \leqslant j \leqslant n$,

$$P_n^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!}\binom{n}{j}a^{n-j}(-b)^j,$$

qui est un entier, puisque $\dfrac{k!}{n!} = (n+1)(n+2)\cdots k$ en est un.

En π. On dérive k fois l'égalité $P_n(\pi - x) = P_n(x)$: $(-1)^k P_n^{(k)}(\pi - x) = P_n^{(k)}(x)$. En $x = 0$, $P_n^{(k)}(\pi) = (-1)^k P_n^{(k)}(0)$.

$$\boxed{P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad P_n^{(k)}(\pi) = (-1)^k P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z} \quad \text{pour tous } k, n}$$

Piège. Le facteur $\dfrac{1}{n!}$ semble empêcher les coefficients d'être entiers, et ils ne le sont pas. Ce sont les *dérivées* en 0 qui le sont : la k-ième dérivée multiplie le coefficient par $k!$, qui est divisible par $n!$ puisque seuls les degrés $k \geqslant n$ apparaissent.

2. On procède par intégrations par parties répétées : c'est la technique naturelle, puisque P_n est un polynôme, dont les dérivées successives finissent par s'annuler, alors que sin et cos ont des primitives immédiates. Pour un polynôme Q quelconque, deux intégrations par parties, en dérivant Q puis Q', donnent

$$\int_0^\pi Q\sin = \big[-Q\cos\big]_0^\pi + \int_0^\pi Q'\cos = Q(\pi)+Q(0)+\big[Q'\sin\big]_0^\pi - \int_0^\pi Q''\sin = Q(0)+Q(\pi)-\int_0^\pi Q''\sin\,.$$

On applique cette relation à $Q = P_n$, puis à P_n'', …, jusqu'à $P_n^{(2n)}$. Comme P_n est de degré $2n$, $P_n^{(2n+2)} = 0$, et il reste

$$I_n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\big(P_n^{(2j)}(0) + P_n^{(2j)}(\pi)\big).$$

Par la question 1, c'est une somme d'entiers : $\boxed{I_n \in \mathbb{Z}}$.

3. Sur $]0\,,\pi[$, on a $t > 0$, $a - bt = b(\pi - t) > 0$ et $\sin t > 0$: l'intégrande $P_n(t)\sin t$ est continu, positif sur $[0\,,\pi]$, et non nul en $\dfrac{\pi}{2}$. Par le théorème 4, $\boxed{I_n > 0}$.

4. Pour $t \in [0\,,\pi]$, on a $0 \leqslant t \leqslant \pi$ et $0 \leqslant a - bt \leqslant a$, donc on a $0 \leqslant t(a-bt) \leqslant \pi a$ et $0 \leqslant P_n(t)\sin t \leqslant \dfrac{(\pi a)^n}{n!}$. Par l'inégalité de la moyenne (proposition 7), sur un intervalle de longueur π :

$$\boxed{I_n \leqslant \pi\,\frac{\xi^n}{n!} \qquad \text{avec } \xi = \pi a}$$

On peut faire mieux : le maximum de $t(a-bt) = bt(\pi - t)$ est atteint en $\dfrac{\pi}{2}$ et vaut $\dfrac{b\pi^2}{4} = \dfrac{\pi a}{4}$, mais toute constante convient pour la suite.

5. Par croissances comparées (chapitre 7, théorème 7), $\dfrac{\xi^n}{n!} \to 0$. Il existe donc un rang n tel que $\pi\,\dfrac{\xi^n}{n!} < 1$, et pour ce rang, I_n est un entier tel que $0 < I_n < 1$, ce qui est impossible. L'hypothèse $\pi = \dfrac{a}{b}$ est donc fausse.

$$\boxed{\pi \text{ est irrationnel}}$$

À retenir. La structure est celle de la démonstration de l'irrationalité de e dans le cours (proposition 12) : une quantité construite à partir de l'hypothèse est un entier, elle est strictement positive, et elle est trop petite pour l'être. La positivité stricte (théorème 4) est indispensable : sans elle, on aurait seulement $I_n = 0$, ce qui n'est pas contradictoire.

Les quatre derniers exercices sont des problèmes en autonomie ; le corrigé commence par l'idée directrice.

EXERCICE 53 ⋆⋆⋆⋆

Idée. La différence $f(x)^2 - f(y)^2$ est l'intégrale de $(f^2)' = 2ff'$. On sépare le produit $|f|\,|f'|$ par l'inégalité $2uv \leqslant \dfrac{u^2}{\varepsilon} + \varepsilon v^2$, puis on fait la moyenne en y pour remplacer $f(y)^2$ par une intégrale.

Soit $\varepsilon > 0$ et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,,b]$. Pour tous réels u, v, on a $0 \leqslant \left(\dfrac{u}{\sqrt{\varepsilon}} - \sqrt{\varepsilon}\,v\right)^2$, c'est-à-dire

$$2uv \leqslant \frac{u^2}{\varepsilon} + \varepsilon v^2.$$

Soit x, $y \in [a\,,b]$. La fonction f^2 est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée $2ff'$, donc, par le théorème 6 et l'inégalité triangulaire,

$$f(x)^2 - f(y)^2 = \int_y^x 2f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b 2|f|\,|f'| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_a^b f^2 + \varepsilon \int_a^b f'^2.$$

Le cas $y = a$ est l'indication de l'énoncé. On fixe x et l'on intègre cette inégalité par rapport à y sur $[a\,,b]$, puis l'on divise par $b - a$:

$$f(x)^2 \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_a^b f^2 + \varepsilon \int_a^b f'^2.$$

Le second membre ne dépend pas de x, et f^2 atteint son maximum sur le segment $[a\,,b]$:

$$\boxed{\max_{[a,b]} f^2 \leqslant D\int_a^b f^2 + \varepsilon \int_a^b f'^2, \qquad D = \frac{1}{b-a} + \frac{1}{\varepsilon}}$$

La constante D ne dépend que de a, b et ε, et pas de f, comme l'exige l'énoncé. On a contrôlé l'inégalité sur des fonctions trigonométriques et polynomiales aléatoires, pour $\varepsilon = 0{,}01$ et $\varepsilon = 0{,}5$ ✓.

Piège. Le terme $\varepsilon \displaystyle\int f'^2$ ne peut pas être supprimé : aucune inégalité $\max f^2 \leqslant D\displaystyle\int_a^b f^2$ n'est vraie pour toutes les f. Pour $f_k(x) = \mathrm{e}^{-k(x-a)}$, on a $\max f_k^2 = 1$, alors que $\displaystyle\int_a^b f_k^2 \leqslant \frac{1}{2k}$ tend vers 0. Une fonction peut avoir une intégrale de f^2 minuscule et un maximum élevé, à condition de varier vite ; c'est ce que mesure $\displaystyle\int f'^2$, qui vaut ici environ $\dfrac{k}{2}$.

À retenir. Le prix à payer pour un petit coefficient ε devant $\displaystyle\int f'^2$ est un grand coefficient D, de l'ordre de $\dfrac{1}{\varepsilon}$, devant $\displaystyle\int f^2$. Ce type d'inégalité, qui contrôle les valeurs d'une fonction par des intégrales de la fonction et de sa dérivée, est fondamental en analyse ; il complète l'exercice 54 du chapitre 9, où f' était contrôlée par f et f''.

EXERCICE 54 ⋆⋆⋆⋆

Idée. On majore $\sqrt{1+u^2}$ par $1+|u|$, ce qui ramène L à $1+\displaystyle\int_0^1 |f'|$. Comme f' est croissante, elle change de signe au plus une fois : f descend puis remonte, et chaque trajet vertical est au plus 1. Pour l'optimalité, on prend des fonctions $|2x-1|^p$, dont la courbe ressemble de plus en plus à un chemin en forme de « V » plat, qui longe le bord inférieur puis les deux bords verticaux du carré.

Majoration. Pour tout réel u, $(1+|u|)^2 = 1+2|u|+u^2 \geqslant 1+u^2$, avec égalité si et seulement si $u=0$; donc $\sqrt{1+u^2} \leqslant 1+|u|$, et l'inégalité est stricte pour $u \neq 0$. Ainsi $L \leqslant 1+\displaystyle\int_0^1 |f'|$. Montrons que $\displaystyle\int_0^1 |f'| \leqslant 2$, en distinguant trois cas selon le signe de f', qui est continue et croissante.

— Si $f'(0) \geqslant 0$, alors $f' \geqslant 0$ sur $[0\,,1]$, et $\displaystyle\int_0^1 |f'| = f(1)-f(0) \leqslant 1$, puisque f est à valeurs dans $[0\,,1]$.

— Si $f'(1) \leqslant 0$, de même $\displaystyle\int_0^1 |f'| = f(0)-f(1) \leqslant 1$.

— Sinon, $f'(0) < 0 < f'(1)$, et le théorème des valeurs intermédiaires fournit c tel que $f'(c)=0$. Par croissance, $f' \leqslant 0$ sur $[0\,,c]$ et $f' \geqslant 0$ sur $[c\,,1]$, d'où

$$\int_0^1 |f'| = -\int_0^c f' + \int_c^1 f' = \big(f(0)-f(c)\big) + \big(f(1)-f(c)\big) \leqslant 1+1.$$

Dans tous les cas, $L \leqslant 3$. Pour l'inégalité stricte, la fonction $g = 1+|f'|-\sqrt{1+f'^2}$ est continue et positive. Si f' n'est pas identiquement nulle, g ne l'est pas, et $\displaystyle\int_0^1 g > 0$ par le théorème 4, d'où $L < 1+\displaystyle\int_0^1 |f'| \leqslant 3$. Si $f'=0$, alors $L=1<3$.

$$\boxed{L<3}$$

Optimalité. Pour $p \geqslant 2$, la fonction $f_p(x) = |2x-1|^p$ est à valeurs dans $[0\,,1]$, de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée $f_p'(x) = 2p\,|2x-1|^{p-1}$ pour $x \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $-2p\,|2x-1|^{p-1}$ pour $x \leqslant \dfrac{1}{2}$, qui est croissante. Par la symétrie $x \mapsto 1-x$, puis par le changement de variable $u = 2x-1$ sur $[\dfrac{1}{2}\,,1]$,

$$L_p = 2\int_{1/2}^1 \sqrt{1+4p^2(2x-1)^{2p-2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1+4p^2u^{2p-2}}\,\mathrm{d}u.$$

Soit $\delta \in]0\,,1[$. On minore l'intégrande par 1 sur $[0\,,\delta]$, et par $2pu^{p-1}$ sur $[\delta\,,1]$:

$$L_p \geqslant \delta + \int_\delta^1 2pu^{p-1}\,\mathrm{d}u = \delta + 2\big(1-\delta^p\big).$$

Soit $M<3$. On choisit $\delta \in]0\,,1[$ tel que $2+\delta > M$; comme $\delta^p \to 0$ quand $p \to +\infty$, on a $2+\delta-2\delta^p > M$ pour p assez grand, et donc $L_p > M$.

$$\boxed{\sup L = 3 : \text{ le nombre 3 ne peut pas être remplacé par un nombre plus petit}}$$

Numériquement, $L_2 \approx 2{,}323$, $L_{10} \approx 2{,}701$, $L_{100} \approx 2{,}945$ et $L_{1000} \approx 2{,}992$ ✓.
À retenir. La borne 3 n'est jamais atteinte, mais elle est approchée : c'est une borne supérieure, pas un maximum. Elle se lit sur la figure du chemin limite, qui parcourt un côté vertical de longueur 1, puis le côté inférieur, de longueur 1, puis l'autre côté vertical. Une courbe de pente croissante, prisonnière du carré, ne peut pas être plus longue que ce chemin.

EXERCICE 55 ⋆⋆⋆⋆

Idée. On décompose $\dfrac{P'}{P}$ en somme de termes $\dfrac{m_j}{X-a_j}$, ce qui ramène le problème au calcul de $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-a}\,\mathrm{d}x$ pour un seul complexe a de module différent de 1. On écrit ce quotient comme une somme géométrique finie, plus un reste que l'on majore, et l'on utilise $\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x=0$ pour k entier non nul.

Si P est constant, $P'=0$, l'intégrale est nulle et P n'a pas de racine : le résultat est vrai. Sinon, P est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ (chapitre 13, proposition 16) : $P=\lambda(X-a_1)^{m_1}\cdots(X-a_r)^{m_r}$, avec des a_j distincts, et par hypothèse $|a_j|\neq 1$. La décomposition de la dérivée logarithmique (chapitre 13, proposition 24), évaluée en un point z qui n'est pas racine, donne $\dfrac{P'(z)}{P(z)}=\displaystyle\sum_{j=1}^{r}\frac{m_j}{z-a_j}$. Avec $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, la linéarité de l'intégrale donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}P'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})}{P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})}\,\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^{r}m_j\,K(a_j),\qquad\text{où}\qquad K(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-a}\,\mathrm{d}x.$$

Les intégrandes sont continus, puisque $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\neq a_j$. Il reste à montrer que $K(a)=1$ si $|a|<1$ et $K(a)=0$ si $|a|>1$. On utilise deux outils.

— Pour $k\in\mathbb{Z}^*$, $x\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\mathrm{i}k}$ est une primitive de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$, et elle prend la même valeur en 0 et en 2π : $\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x=0$.

— Pour $q\in\mathbb{C}$, $q\neq 1$, et $N\in\mathbb{N}$, la somme géométrique donne $\dfrac{1}{1-q}=\displaystyle\sum_{k=0}^{N}q^k+\frac{q^{N+1}}{1-q}$.

Cas $|a|<1$. On écrit $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-a}=\dfrac{1}{1-q}$ avec $q=a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$, de module $|a|<1$. Par la somme géométrique, et comme $\displaystyle\int_0^{2\pi}q^k\,\mathrm{d}x=a^k\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x$ est nul pour $k\geqslant 1$ et vaut 2π pour $k=0$,

$$2\pi K(a)=2\pi+\int_0^{2\pi}\frac{q^{N+1}}{1-q}\,\mathrm{d}x.$$

Comme $|1-q|\geqslant 1-|q|=1-|a|$, l'inégalité triangulaire complexe (théorème 5) donne

$$|2\pi K(a)-2\pi|\leqslant 2\pi\,\frac{|a|^{N+1}}{1-|a|}.$$

Le premier membre ne dépend pas de N, et le second tend vers 0 quand $N\to+\infty$: $K(a)=1$.

Cas $|a|>1$. On écrit cette fois $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-a}=-\dfrac{q}{1-q}$ avec $q=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{a}$, de module $\dfrac{1}{|a|}<1$. La somme géométrique, multipliée par q, donne $\dfrac{q}{1-q}=\displaystyle\sum_{k=1}^{N+1}q^k+\frac{q^{N+2}}{1-q}$, où chaque q^k, pour $k\geqslant 1$, est d'intégrale nulle. Donc

$$|2\pi K(a)|=\Big|\int_0^{2\pi}\frac{q^{N+2}}{1-q}\,\mathrm{d}x\Big|\leqslant 2\pi\,\frac{|a|^{-(N+2)}}{1-|a|^{-1}}\xrightarrow[N\to+\infty]{}0,$$

et $K(a)=0$. En reportant,

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}P'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})}{P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})}\,\mathrm{d}x=\sum_{|a_j|<1}m_j=\text{nombre de racines de module }<1,\ \text{comptées avec multiplicité}}$$

Pour $P=(X-0{,}5)(X+0{,}3\mathrm{i})(X-2)(X-1{,}5\mathrm{i})^2$, une intégration numérique donne 2,000, et pour $P=(X-0{,}2)^3(X+3)$, elle donne 3,000 ✓.

Piège. L'erreur la plus répandue est de développer $\dfrac{1}{1-q}$ en « somme infinie » $\sum q^k$ et d'intégrer terme à terme : c'est une manipulation de série, qui n'est pas justifiée à ce stade. La somme géométrique *finie*, avec son reste explicite, donne le même résultat de façon rigoureuse.

À retenir. L'intégrale compte les racines : c'est un entier, alors que l'intégrande n'a rien d'entier. Ce résultat est un cas particulier du principe de l'argument, qui sera étudié en analyse complexe ; il dit que l'argument de $P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$ fait autant de tours autour de 0, quand x parcourt $[0\,,2\pi]$, que P a de racines dans le disque.

EXERCICE 56 ⋆⋆⋆⋆

Idée. Le polynôme $P=3X^2-2X^3$ réalise trois bijections de $[-\dfrac{1}{2}\,,0]$, $[0\,,1]$ et $[1\,,\dfrac{3}{2}]$ sur $[0\,,1]$. Tout $y\in[0\,,1]$ a donc trois antécédents $r\leqslant x\leqslant q$, et, par les relations entre coefficients et racines, $r+x+q=\dfrac{3}{2}$. On effectue dans les deux intégrales extérieures les changements de variable $X=r(x)$ et $X=q(x)$, qui les ramènent à $[0\,,1]$; la relation $r'+q'=-1$ fait le reste.

Étude de P. On a $P'(X)=6X(1-X)$, et les factorisations

$$P=X^2(3-2X),\qquad 1-P=(X-1)^2(2X+1)$$

montrent que $0\leqslant P(X)\leqslant 1$ si et seulement si $X\in[-\dfrac{1}{2}\,,\dfrac{3}{2}]$. En particulier, $f\circ P$ est définie et continue sur ce segment, et les deux membres de l'égalité ont un sens.

Les deux autres antécédents. Pour $x\in[0\,,1]$, on factorise $P(X)-P(x)$ par $X-x$:

$$P(X)-P(x)=-(X-x)(2X^2+(2x-3)X+2x^2-3x).$$

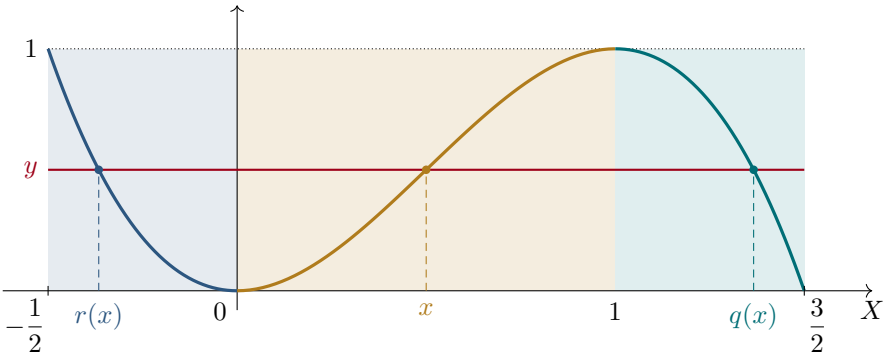
Le discriminant du second facteur vaut $(2x-3)^2-8(2x^2-3x)=9+12x(1-x)\geqslant 9>0$. Ses racines sont

$$r(x)=\frac{3-2x-\sqrt{9+12x-12x^2}}{4},\qquad q(x)=\frac{3-2x+\sqrt{9+12x-12x^2}}{4}.$$

La quantité sous la racine reste supérieure à 9, donc r et q sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,,1]$. Par construction, $P(r(x))=P(q(x))=P(x)$; la somme des racines donne $r(x)+q(x)=\dfrac{3-2x}{2}$, d'où

$$r'(x)+q'(x)=-1,\qquad r(0)=0,\quad r(1)=-\frac{1}{2},\quad q(0)=\frac{3}{2},\quad q(1)=1.$$

Enfin, comme $P(r(x))=P(x)\in[0\,,1]$, l'étude de P montre que $r(x)$ et $q(x)$ appartiennent à $[-\dfrac{1}{2}\,,\dfrac{3}{2}]$, où $f\circ P$ est continue.



La courbe de P sur $[-\dfrac{1}{2}\,,\dfrac{3}{2}]$ se compose de trois arcs monotones, chacun réalisant une bijection sur $[0\,,1]$. Pour $x=\dfrac{1}{2}$, le niveau $y=P(x)=\dfrac{1}{2}$ est atteint aussi en $r(x)=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\approx-0{,}37$ et en $q(x)=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\approx 1{,}37$, et l'on vérifie $r(x)+x+q(x)=\dfrac{3}{2}$.

Les changements de variable. Dans $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} f\big(P(X)\big)\,\mathrm{d}X$, on pose $X = r(x)$, avec x allant de 1 à 0 (chapitre 6, proposition 5) :

$$\int_{-1/2}^{0} f\big(P(X)\big)\,\mathrm{d}X = \int_{1}^{0} f\Big(P\big(r(x)\big)\Big)\,r'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{1} f\big(P(x)\big)\,r'(x)\,\mathrm{d}x.$$

De même, avec $X = q(x)$, x allant de 1 à 0 :

$$\int_{1}^{3/2} f\big(P(X)\big)\,\mathrm{d}X = \int_{1}^{0} f\Big(P\big(q(x)\big)\Big)\,q'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{1} f\big(P(x)\big)\,q'(x)\,\mathrm{d}x.$$

En ajoutant, avec $r' + q' = -1$:

$$\int_{-1/2}^{0} f(P) + \int_{1}^{3/2} f(P) = -\int_{0}^{1} f\big(P(x)\big)\big(r'(x) + q'(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} f(P).$$

Par la relation de Chasles, en ajoutant l'intégrale sur $[0\,,1]$,

$$\boxed{\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2 - 2x^3)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} f(3x^2 - 2x^3)\,\mathrm{d}x}$$

L'égalité a été contrôlée numériquement pour $f = \exp$, $f = \sqrt{\cdot}$ et $f(y) = \cos 5y$ ✓.
Piège. Le changement de variable « naturel » $y = P(X)$ sur chacun des trois intervalles fait apparaître la réciproque de P, dont la dérivée est infinie aux points où P' s'annule : la proposition 5 du chapitre 6 ne s'applique pas directement. On contourne la difficulté en paramétrant les deux arcs extérieurs par l'arc central, avec les fonctions r et q, qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ jusqu'au bord.
À retenir. Tout repose sur la relation $r + x + q = \dfrac{3}{2}$, somme des racines du polynôme $2X^3 - 3X^2 + y$ (chapitre 13, théorème 4). La même méthode montre que, pour un polynôme de degré 3 qui réalise ainsi trois bijections sur le même intervalle, l'intégrale de $f \circ P$ sur les deux arcs extérieurs est égale à celle sur l'arc central : c'est la dérivée de la somme des racines, constante, qui l'impose.