EXERCICES – CHAPITRE 18

INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Dans toute la feuille, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $a < b$ deux réels. Comme dans le cours, on note $\mathcal{E}([a\,,b],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a\,,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, $\mathcal{C}_m([a\,,b],\mathbb{K})$ celui des fonctions continues par morceaux, et $\lfloor x\rfloor$ la partie entière du réel x. Lorsqu'un énoncé demande la limite d'une intégrale $\int_0^A$ quand A tend vers $+\infty$, il s'agit de la limite d'une fonction de la variable A, au sens du chapitre 8 : aucune intégrale sur un intervalle non borné n'est utilisée.

Fonctions en escalier et fonctions continues par morceaux

EXERCICE 1 ⋆

1. Soit $m < n$ deux entiers relatifs. Justifier que la restriction de la partie entière à $[m\,,n]$ est une fonction en escalier, en donnant une subdivision adaptée, puis calculer $\displaystyle\int_m^n \lfloor x\rfloor\,\mathrm{d}x$.
2. Justifier que $x \mapsto x|x|$ est continue par morceaux sur $[-1\,,2]$, et calculer $\displaystyle\int_{-1}^2 x|x|\,\mathrm{d}x$.
3. Pour tout réel a, calculer $I(a) = \displaystyle\int_0^1 \min(x,a)\,\mathrm{d}x$, en distinguant selon la position de a par rapport à 0 et à 1.
4. Calculer $\displaystyle\int_0^2 \min\left(x^2+1,\ x^2+3x-2\right)\mathrm{d}x$.
5. Pour $x \geqslant 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \lfloor t\rfloor\,\mathrm{d}t$. Calculer $F(x)$ lorsque $x \in [N\,,N+1[$, avec $N \in \mathbb{N}$, puis donner un équivalent simple de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2 ⋆⋆⋆

Lemme de Riemann-Lebesgue. Pour $f \in \mathcal{C}_m([a\,,b],\mathbb{K})$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t.$$

On veut montrer que la suite $(u_n(f))$ tend vers 0 pour toute fonction f continue par morceaux.

1. On suppose dans cette question que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,,b]$. Montrer qu'il existe une constante C telle que $|u_n(f)| \leqslant \frac{C}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$, et conclure.
2. Soit $[\alpha\,,\beta]$ un segment contenu dans $[a\,,b]$, et f la fonction égale à 1 sur $[\alpha\,,\beta]$ et à 0 ailleurs. Calculer $u_n(f)$ pour $n \geqslant 1$, et montrer que $u_n(f)$ tend vers 0. En déduire que $u_n(\varphi)$ tend vers 0 pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{E}([a\,,b],\mathbb{K})$.
3. Soit $f \in \mathcal{C}_m([a\,,b],\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. À l'aide du théorème d'approximation du cours, montrer qu'il existe $\varphi \in \mathcal{E}([a\,,b],\mathbb{R})$ telle que $|u_n(f) - u_n(\varphi)| \leqslant \varepsilon$ pour tout n, et conclure. Étendre le résultat aux fonctions à valeurs complexes.
4. En déduire que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_m([a\,,b],\mathbb{R})$,

$$\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Pourquoi la première question ne suffisait-elle pas ?

Intégrale d'une fonction continue par morceaux

EXERCICE 3 ⋆

Soit $a < b < c$ trois réels et $f : [a\,,c] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f \leqslant \max\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f,\ \frac{1}{c-b}\int_b^c f\Big),$$

et interpréter ce résultat en termes de valeurs moyennes.

EXERCICE 4 ⋆

1. Sans chercher de primitive, montrer que

$$\frac{\ln 2}{\sqrt{3}} \leqslant \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\tan x}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{3}\,\ln 2.$$

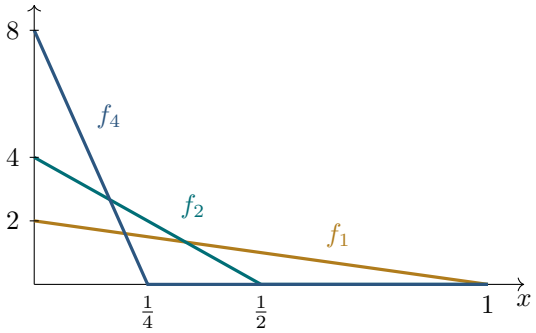
2. Pour $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n \sin(nt)}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $|I_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, et en déduire la limite de la suite (I_n).

EXERCICE 5 ⋆

1. Montrer que $|\sin u - \sin v| \leqslant |u - v|$ pour tous réels u et v.
2. Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ continue. Pour tout réel x, on pose $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$. Montrer que F est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, et donner une constante de Lipschitz.

EXERCICE 6 ⋆

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit $f_n : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = 2n(1-nx)$ si $0 \leqslant x < \frac{1}{n}$, et $f_n(x) = 0$ sinon.



La figure représente f_1, f_2 et f_4 : les triangles s'affinent et s'élèvent en gardant la même aire.

1. Montrer que f_n est continue sur $[0\,,1]$, et calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Montrer que, pour tout $x \in]0\,,1]$, la suite $(f_n(x))$ est nulle à partir d'un certain rang. Que vaut $f_n(0)$?
3. Soit g une fonction définie sur $[0\,,1]$, nulle sur $]0\,,1]$. Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 f_n$ et $\displaystyle\int_0^1 g$. Quelle prudence ce résultat impose-t-il ?

EXERCICE 7 ⋆⋆

1. Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $|f| \leqslant 1$ et $\displaystyle\int_a^b f = b - a$. Que dire de f ?
2. Déterminer les fonctions $f : [0\,,1] \to [0\,,1]$ continues telles que $\displaystyle\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$.
3. Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4$. Montrer que f est la fonction nulle ou la fonction constante égale à 1.

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ continue et positive, telle que $\displaystyle\int_0^1 f \leqslant \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.
2. L'hypothèse de positivité est-elle utile ?

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\left|\displaystyle\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$. Montrer que f garde un signe constant sur $[a\,,b]$.
2. Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{C}$ continue telle que $\left|\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$. Montrer qu'il existe un réel θ et une fonction $g : [0\,,1] \to \mathbb{R}_+$ continue tels que $f(t) = g(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ pour tout $t \in [0\,,1]$. On pourra reprendre la démonstration du théorème 5 du cours.

EXERCICE 10 ⋆⋆

Déterminer la limite des suites de termes généraux suivants, en encadrant chaque intégrale.

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^{nt}}$ (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-n\sin t}\,\mathrm{d}t$

Pour (c), on pourra utiliser l'inégalité $\sin t \geqslant \frac{2t}{\pi}$ sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$, établie au chapitre 9 par concavité du sinus.

EXERCICE 11 ⋆⋆

Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer la limite de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x$. On pourra, pour $\alpha \in]0\,,1[$, couper l'intégrale en α.

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. Soit $f : [0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue, admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que
$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell.$$
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T-périodique, avec $T > 0$. On rappelle que $\int_x^{x+T} f$ ne dépend pas du réel x (chapitre 6). Déterminer la limite de $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers $+\infty$.

EXERCICE 13 ⋆⋆

Soit $f : [0\,,\pi] \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi f(t)\cos t\,\mathrm{d}t = 0.$$

1. Montrer que f s'annule au moins deux fois sur l'intervalle $]0\,,\pi[$. On pourra raisonner par l'absurde et considérer $\int_0^\pi f(t)\sin(t-\alpha)\,\mathrm{d}t$ pour un réel α bien choisi.
2. Donner un exemple de fonction f non nulle vérifiant les hypothèses.

EXERCICE 14 ⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 1$ et $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ continue, non identiquement nulle, telle que

$$\int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{pour tout } k \in [\![0\,;n-1]\!].$$

On veut montrer que f change au moins n fois de signe, c'est-à-dire qu'il existe des réels y_0, …, y_n de $[a\,,b]$ tels que

$$y_0 < y_1 < \cdots < y_n \qquad \text{et} \qquad f(y_{i-1})f(y_i) < 0 \quad \text{pour tout } i \in [\![1\,;n]\!].$$

1. Traiter le cas $n = 1$.
2. Traiter le cas $n = 2$. On pourra raisonner par l'absurde et multiplier f par une fonction affine bien choisie.
3. Traiter le cas général.
4. Vérifier que $t \mapsto 6t^2 - 6t + 1$ satisfait les hypothèses pour $n = 2$ sur $[0\,,1]$. Le résultat peut-il être amélioré ?

EXERCICE 15 ⋆⋆⋆

Inégalités de Hölder et de Minkowski. Pour $p \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{C}_m([0\,,1],\mathbb{R})$, on pose

$$N_p(f) = \Big(\int_0^1 |f|^p\Big)^{1/p}.$$

1. Soit f continue sur $[0\,,1]$. Montrer que $N_p(f)$ tend vers $\max\limits_{[0,1]}|f|$ quand p tend vers $+\infty$.
2. Soit $p > 1$, et $q = \frac{p}{p-1}$, de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
   (a) Montrer l'inégalité de Young : $a^{1/p}b^{1/q} \leqslant \dfrac{a}{p} + \dfrac{b}{q}$ pour tous réels a, $b \geqslant 0$. On pourra utiliser la concavité du logarithme (chapitre 9).
   (b) En commençant par le cas où $N_p(f) = N_q(g) = 1$, montrer l'inégalité de Hölder : pour toutes fonctions f, $g \in \mathcal{C}_m([0\,,1],\mathbb{R})$,
   $$\int_0^1 |fg| \leqslant N_p(f)\,N_q(g).$$
   Quelle inégalité obtient-on pour $p = 2$?
   (c) Soit $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2$. Comparer $N_{p_1}(f)$ et $N_{p_2}(f)$.
3. Soit f, $g \in \mathcal{C}_m([0\,,1],\mathbb{R})$ et $p > 1$.
   (a) Montrer que $N_p(f+g)^p \leqslant \displaystyle\int_0^1 |f|\,|f+g|^{p-1} + \int_0^1 |g|\,|f+g|^{p-1}$.
   (b) En appliquant l'inégalité de Hölder, montrer l'inégalité de Minkowski :
   $$N_p(f+g) \leqslant N_p(f) + N_p(g).$$

EXERCICE 16 ⋆

1. Calculer les intégrales suivantes.

   (a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{t+1}{t(t-1)^3}\,\mathrm{d}t$ (c) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2+x+1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$ (e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^4}{t^2+2t+5}\,\mathrm{d}t$ (d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^4-4}$

2. Déterminer une primitive des fonctions suivantes, sur un intervalle ne contenant aucun pôle.

   (a) $x \mapsto \dfrac{1}{(x^2-1)(x-2)^2}$ (c) $x \mapsto \dfrac{1}{x(x^3+1)}$ (d) $x \mapsto \dfrac{x^7}{(x^4+1)^2}$

   (b) $x \mapsto \dfrac{x}{x^4-x^2-2}$ (e) $x \mapsto \dfrac{1}{x^3-1}$

EXERCICE 17 ⋆

1. Soit $f : [-1\,,1] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer les limites, quand x tend vers 0, de

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{x^2}\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Que deviennent ces résultats si l'on suppose seulement f continue par morceaux sur $[-1\,,1]$?

EXERCICE 18 ⋆⋆

Calculer les intégrales suivantes.

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ pour tout réel $x > 0$.

(c) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sin t\,\mathrm{e}^{-t^4}\,\mathrm{d}t$, sans aucun calcul de primitive.

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{2+\cos x}}\,\mathrm{d}x.$

(e) $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{\operatorname{Arcsin} x}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

EXERCICE 19 ⋆⋆

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{x\ln x}{(x^2+1)^2}$, définie sur $]0\,,1]$, se prolonge en une fonction continue sur $[0\,,1]$, puis calculer son intégrale sur $[0\,,1]$.

2. Pour $A > 0$, calculer les intégrales suivantes, puis déterminer leur limite quand A tend vers $+\infty$.

$$\int_0^A \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2(2t+1)}, \qquad \int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+4)(t+2)^2}, \qquad \int_0^A \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^3+1}.$$

EXERCICE 20 ⋆⋆

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^{n+1}}$.

1. Exprimer $I_{n+1}(x)$ en fonction de $I_n(x)$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n(x)$ admet une limite finie L_n quand x tend vers $+\infty$, et calculer L_n.
3. Comparer L_n et l'intégrale de Wallis W_{2n} du cours. Retrouver ce résultat par un calcul direct de L_n.

EXERCICE 21 ⋆⋆

1. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a\,,b]$. Montrer qu'il existe $\theta \in [a\,,b]$ tel que
$$f(\theta)\int_\theta^b g = g(\theta)\int_a^\theta f.$$
On pourra étudier la fonction $x \mapsto \int_a^x f \times \int_x^b g$.
2. Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(1) = \displaystyle\int_0^1 f$. Montrer qu'il existe $c \in [0\,,1]$ tel que $f'(c) = 0$.

EXERCICE 22 ⋆⋆

Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ continue. Pour tout réel x, on pose $F(x) = \displaystyle\int_a^b |t-x|\, f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, en calculant F', puis déterminer à quelle condition sur f la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 23 ⋆⋆

Pour tout réel x, on pose
$$f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t.$$
Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer f', et en déduire une expression simple de f.

EXERCICE 24 ⋆⋆

1. Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,,+\infty[$, calculer f' et en déduire les variations de f.
   (b) Montrer que $\mathrm{e}^{-2x}\ln 2 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}\ln 2$ pour tout $x > 0$, puis déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Pour $0 < \varepsilon < M$, on pose $J(\varepsilon, M) = \displaystyle\int_\varepsilon^M \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $J(\varepsilon, M) = f(\varepsilon) - f(M)$, puis que, pour tout $\eta > 0$, il existe $\delta > 0$ et $A > 0$ tels que $|J(\varepsilon, M) - \ln 2| \leqslant \eta$ dès que $\varepsilon \leqslant \delta$ et $M \geqslant A$.
3. Déterminer la limite de $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos(t^2)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers 0 par valeurs positives.

EXERCICE 25 ⋆⋆

1. Montrer que, pour tout réel x, il existe un unique réel y tel que $\displaystyle\int_x^y \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$.
2. On note $\varphi(x)$ ce réel. Montrer que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et exprimer $\varphi'(x)$ en fonction de x et de $\varphi(x)$.

EXERCICE 26 ⋆⋆

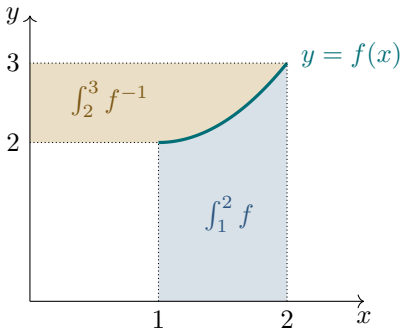
On note $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Pour $f \in E$, on note $P_0(f)$ la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que P_0 est un endomorphisme de E, et déterminer son noyau et son image.
2. Mêmes questions pour l'application P_a qui envoie $f \in E$ sur sa primitive qui s'annule en $a \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que tout $f \in E$ admet une unique primitive G telle que $\displaystyle\int_0^1 G = 0$, et que l'application Π qui envoie f sur G est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau et son image.

EXERCICE 27 ⋆⋆⋆

Soit $f : [1\,,2] \to [2\,,3]$ une bijection continue et strictement croissante. On veut montrer que

$$\int_1^2 f + \int_2^3 f^{-1} = 4.$$



Sur la figure, l'aire bleutée représente la première intégrale, et l'aire ocre la seconde, lue en intégrant selon l'axe des ordonnées.

1. On suppose dans cette question que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Démontrer l'égalité, et l'interpréter sur la figure.
2. On suppose seulement f continue. Soit $n \geqslant 1$, $x_k = 1 + \frac{k}{n}$ et $y_k = f(x_k)$ pour $k \in [\![0\,;n]\!]$. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\, f(x_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k)\, f^{-1}(y_{k+1}) = 4,$$
puis démontrer l'égalité à l'aide du théorème 9 du cours sur les sommes de Riemann.

EXERCICE 28 ⋆⋆⋆

Une intégrale calculée sans primitive. Pour $x \in]0\,,1[$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$, et l'on pose $f(0) = 0$.

1. Justifier que f est bien définie, et montrer que f est continue en 0.
2. Soit $x \in]0\,,1[$. Montrer que, pour tout $t \in [x^2\,,1]$,
$$\frac{2\ln x}{x^2-1}\,(t-1) \leqslant \ln t \leqslant t-1.$$
3. En déduire que f se prolonge par continuité en 1, en précisant la valeur $f(1)$.
4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,,1]$, et calculer f'.
5. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$, après avoir justifié que la fonction intégrée se prolonge en une fonction continue sur $[0\,,1]$.

EXERCICE 29 ⋆⋆⋆

Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ continue. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite (u_n) tend vers 0.
2. On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $f(1) \neq 0$. Déterminer un équivalent de u_n.
3. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_0^1 t^n \sin\frac{\pi t}{2}\,\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_0^1 t^n \cos\frac{\pi t}{2}\,\mathrm{d}t$.

EXERCICE 30 ⋆⋆⋆

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\cos\left(\frac{nt}{n+1}\right)}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de I_n, et montrer que la suite (I_n) est monotone.
2. Déterminer la limite de (I_n).
3. Montrer que $I_n \sim \dfrac{\pi}{2}\ln n$ quand n tend vers $+\infty$. On pourra montrer que la fonction
$$u \longmapsto \frac{u}{\cos u} - \frac{\pi/2}{\pi/2-u}$$
est bornée sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$.

EXERCICE 31 ⋆⋆⋆

Soit $f : [0\,,2\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$a_n = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$
On pourra découper $[0\,,2\pi]$ en intervalles de longueur $\frac{\pi}{n}$.

Formules de Taylor globales

EXERCICE 32 ⋆

À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer les encadrements suivants.

(a) Pour tout $x \geqslant 0$, $\quad x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

(b) Pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$, $\quad x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.

(c) Pour tout $x \geqslant 0$, $\quad 1 - \dfrac{x}{3} + \dfrac{2x^2}{9} - \dfrac{14x^3}{81} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \leqslant 1 - \dfrac{x}{3} + \dfrac{2x^2}{9}$.

EXERCICE 33 ⋆

1. Montrer que, pour tout réel $a > 0$, $\left|\cos a - 1 + \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^4}{24}\right| \leqslant \dfrac{a^5}{120}$, et en déduire que
$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leqslant \cos\frac{1}{2} \leqslant \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}.$$
2. Montrer que $\left|\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}\right| \leqslant \dfrac{x^3}{3}$ pour tout $x > 0$, et en déduire une valeur approchée décimale de $\ln(1{,}003)$ à 10^{-8} près.

EXERCICE 34 ⋆⋆

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$ entre 0 et 1, à un ordre que l'on choisira, montrer que
$$\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{2}.$$

EXERCICE 35 ⋆⋆

1. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que $x^2 - \dfrac{x^4}{3} \leqslant \sin^2 x \leqslant x^2$ pour tout $x \in [0\,,1]$.
2. En déduire la limite de la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{1}{\sqrt{n+k}}$.

EXERCICE 36 ⋆⋆

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré impair tel que
$$|f^{(n)}(x)| \leqslant |P(x)| \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout réel } x.$$
1. Montrer que f est la fonction nulle.
2. Le résultat subsiste-t-il si le degré de P est pair ?

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$, et g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \neq 0$, calculer $g^{(n)}(x)$ à l'aide de la formule de Leibniz, puis, en reconnaissant une formule de Taylor, montrer que
$$g^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$
3. Calculer la limite de $g^{(n)}(x)$ quand x tend vers 0.
4. En déduire que le prolongement de g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Sommes de Riemann et calcul approché

EXERCICE 38 ⋆

Déterminer les limites des suites de termes généraux suivants.

(a) $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2+k^2}$

(c) $\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,\mathrm{e}^{-k/n}$

(d) $\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k^k) - \ln(n^k)\right)$

(e) $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos^2\frac{k\pi}{n}$

(f) $n\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$

(g) $\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$

(i) $\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)^{1/n}$

(j) $\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right)^{1/n}$

EXERCICE 39 ⋆⋆

1. Déterminer les limites des suites de termes généraux suivants, en prenant garde à l'intervalle d'intégration.
$$\sum_{k=1}^{3n} \frac{n}{n^2+k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}, \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{2k}{n}\,\mathrm{e}^{1+3k/n}.$$
2. Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$ et de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$.

EXERCICE 40 ⋆⋆

Soit f, $g : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ continues.

1. Déterminer la limite de $S_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)f\Big(\frac{\ell}{n}\Big)$, puis celle de $T_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)f\Big(\frac{\ell}{n}\Big)$.
2. Déterminer la limite de $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\,g\Big(\frac{k+1}{n}\Big)$. On pourra utiliser la continuité uniforme de g (chapitre 8).

EXERCICE 41 ⋆⋆

Inégalité de Jensen intégrale. Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ continue et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et convexe. À l'aide de sommes de Riemann et de l'inégalité de Jensen du chapitre 9, démontrer que

$$\varphi\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(t))\,\mathrm{d}t.$$

Que donne cette inégalité pour $\varphi : x \mapsto x^2$, puis pour $\varphi = \exp$?

EXERCICE 42 ⋆⋆

Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $I = \displaystyle\int_0^1 f$. Déterminer la limite de

$$n\Big(I - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big) = nI - \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big).$$

On pourra appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 sur chaque intervalle $\big[\frac{k}{n}\,,\frac{k+1}{n}\big]$. Que retrouve-t-on sur la vitesse de convergence de la méthode des rectangles ?

EXERCICE 43 ⋆⋆⋆

Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer la limite de

$$\prod_{k=1}^{n}\Big(1 + \frac{1}{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big)$$

quand n tend vers $+\infty$. On pourra montrer que $|\ln(1+u) - u| \leqslant 2u^2$ pour $|u| \leqslant \frac{1}{2}$.

EXERCICE 44 ⋆⋆⋆

Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ continue, à valeurs strictement positives, et $I = \displaystyle\int_a^b f$.

1. Montrer que $I > 0$.
2. Soit $n \geqslant 1$. Montrer qu'il existe une unique subdivision $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $[a\,,b]$ telle que

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f = \frac{I}{n} \qquad \text{pour tout } k \in [\![1\,;n]\!].$$

   Les réels x_k dépendent de n ; on les note $x_{n,k}$ lorsqu'il faut le préciser.
3. Déterminer la limite de $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k})$ quand n tend vers $+\infty$. On pourra exprimer $x_{n,k}$ à l'aide de la réciproque de la fonction $x \mapsto \int_a^x f$.

EXERCICE 45 ⋆⋆⋆

Inégalités de Hermite-Hadamard et méthode du point milieu. Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ et $m = \frac{a+b}{2}$.

1. On suppose f continue et convexe. Montrer que

$$f(m) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

   Pour l'inégalité de gauche, on pourra comparer $f(t)$ et $f(a+b-t)$ à $f(m)$.
2. On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$, et l'on note $M_2 = \max\limits_{[a,b]} |f''|$. Montrer que

$$\Big|\int_a^b f - (b-a)f(m)\Big| \leqslant M_2\,\frac{(b-a)^3}{24}.$$

3. Pour $n \geqslant 1$, on note $x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$. En déduire que

$$\Big|\int_a^b f - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\Big)\Big| \leqslant M_2\,\frac{(b-a)^3}{24n^2}.$$

C'est la majoration de l'erreur de la méthode du point milieu, admise dans le cours.

4. Montrer que, si f est continue et convexe, la méthode du point milieu donne une valeur approchée par défaut de $\int_a^b f$, et celle des trapèzes une valeur approchée par excès.

5. Pour $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ sur $[0\,,1]$, calculer la valeur approchée de π donnée par la méthode du point milieu avec $n = 4$, et la comparer à la valeur $T_4(f) \approx 3{,}1312$ donnée par la méthode des trapèzes dans le cours.

Intégrales de Wallis et constante de Stirling

EXERCICE 46 ⋆⋆

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer a_0 et a_1.

2. Montrer que la suite (a_n) est monotone, puis convergente, et calculer sa limite.

3. Montrer que $a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+4}\,a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. En s'inspirant de la démonstration de la proposition 15 du cours, en déduire un équivalent de a_n quand n tend vers $+\infty$.

5. Retrouver ce résultat en exprimant a_n à l'aide des intégrales de Wallis W_n.

EXERCICE 47 ⋆⋆⋆

Les intégrales de Wallis donnent la limite de $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n t\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad b_n = \int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2n} t\,\mathrm{d}t.$$

On rappelle que a_n est l'intégrale de Wallis W_n du cours, que $a_n > 0$ et que $(n+2)\,a_{n+2} = (n+1)\,a_n$.

1. Montrer que $0 < b_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\,(a_{2n} - a_{2n+2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en comparant la courbe de sin à l'une de ses cordes sur $\big[0\,,\frac{\pi}{2}\big]$.

2. En déduire que $\dfrac{b_n}{a_{2n}}$ tend vers 0.

3. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les formules suivantes :

$$a_{2n+2} = (2n+2)\int_0^{\pi/2} t\sin t\,\cos^{2n+1} t\,\mathrm{d}t, \qquad \frac{a_{2n+2}}{n+1} = (2n+1)\,b_n - (2n+2)\,b_{n+1},$$

$$2\Big(\frac{b_n}{a_{2n}} - \frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\Big) = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

4. En déduire que la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ converge, et calculer sa limite.

Exercices de synthèse

EXERCICE 48 ⋆⋆

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

1. Une fonction bornée sur $[0\,,1]$, continue en tout point sauf en 0, est continue par morceaux sur $[0\,,1]$.
2. Si $f \in \mathcal{C}_m([a\,,b],\mathbb{R})$ est positive et d'intégrale nulle, alors f est nulle sauf en un nombre fini de points.
3. Si $f \in \mathcal{C}_m([0\,,1],\mathbb{R})$ et si la fonction $x \mapsto \int_0^x f$ est dérivable sur $[0\,,1]$, alors f est continue sur $[0\,,1]$.
4. Si f est continue sur $[a\,,b]$ et si $\int_a^b f = 0$, alors f s'annule au moins une fois sur $[a\,,b]$.
5. Pour toute fonction $f : [0\,,1] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $|f(1) - f(0)| \leqslant \displaystyle\int_0^1 |f'|$.
6. Si f est continue sur $[0\,,1]$ et si $\int_0^1 f = \int_0^1 t\,f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est la fonction nulle.
7. Pour toute fonction f continue sur $[0\,,1]$, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f$, bien que la somme comporte $n+1$ termes.
8. Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, alors, pour tout réel x, la suite des valeurs en x des polynômes de Taylor de f en 0 converge vers $f(x)$.
9. Si f est continue sur $[0\,,1]$ et si $\int_0^1 f\varphi = 0$ pour toute fonction en escalier φ sur $[0\,,1]$, alors f est la fonction nulle.
10. Si f est convexe et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a\,,b]$, la méthode des trapèzes fournit une valeur approchée par excès de $\int_a^b f$.

EXERCICE 49 ⋆⋆

Une récurrence instable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x (1-x)^n\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0, et montrer que $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Écrire une fonction Python `I(n)` qui calcule I_n à l'aide de cette relation, en partant de la valeur `math.e - 1`. Afficher les valeurs obtenues pour n allant de 0 à 25 : que semble faire la suite ?
3. Montrer que la suite (I_n) est décroissante et convergente, et préciser sa limite.
4. Soit α un réel. On définit la suite (J_n) par $J_0 = \alpha$ et $J_{n+1} = (n+1)J_n - 1$. Montrer que $J_{n+1} - I_{n+1} = (n+1)(J_n - I_n)$ pour tout n, et exprimer $J_n - I_n$ en fonction de n et de α.
5. En déduire le comportement de (J_n) selon la valeur de α, et expliquer l'observation de la deuxième question.

EXERCICE 50 ⋆⋆

Une formule de quadrature exacte. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$,
$$\int_1^3 P(\sin t)\, \mathrm{e}^{-t^3}\, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, P\big(\operatorname{sh}(k)\big).$$
On pourra utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange (chapitre 13).
2. Pour $n \geqslant 2$, existe-t-il encore de tels réels λ_k si l'on remplace les points $\operatorname{sh}(k)$ par les points $\cos(k\pi)$?

EXERCICE 51 ⋆⋆⋆

Une intégrale calculée par un produit. Soit θ un réel différent de 1 et de -1.

1. Pour t réel, factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $X^2 - 2X\cos t + 1$.
2. On pose $f(t) = \ln(1 - 2\theta\cos t + \theta^2)$.
   (a) Montrer que f est bien définie et continue sur $[0\,, 2\pi]$.
   (b) Pour $n \geqslant 1$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{2k\pi}{n}\Big)$. On pourra utiliser la factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2\theta\cos t + \theta^2)\, \mathrm{d}t$, en distinguant les cas $|\theta| < 1$ et $|\theta| > 1$.

EXERCICE 52 ⋆⋆⋆

Le nombre π est irrationnel. On suit ici une démonstration publiée par Ivan Niven en 1947. On suppose par l'absurde que $\pi = \frac{a}{b}$, avec a et b entiers naturels non nuls, et l'on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$P_n(X) = \frac{X^n(a - bX)^n}{n!}.$$

1. Montrer que, pour tous k et n dans $\mathbb{N}$, les nombres $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\pi)$ sont des entiers. On pourra remarquer que $P_n(\pi - X) = P_n(X)$.
2. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} P_n(t)\sin t\, \mathrm{d}t$ est un entier.
3. Montrer que $I_n > 0$.
4. Trouver une constante $\xi > 0$ telle que $I_n \leqslant \pi\, \dfrac{\xi^n}{n!}$ pour tout n.
5. En déduire une contradiction. Qu'a-t-on démontré ?

Les quatre derniers exercices sont des problèmes à traiter en autonomie : l'énoncé fixe le but, et c'est à vous de trouver le chemin.

EXERCICE 53 ⋆⋆⋆⋆

Soit $a < b$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $D > 0$ tel que, pour toute fonction $f : [a\,, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$,
$$\max_{[a,b]} f^2 \leqslant D \int_a^b f^2 + \varepsilon \int_a^b f'^2.$$
On pourra commencer par majorer $|f(x)^2 - f(a)^2|$ pour $x \in [a\,, b]$.

EXERCICE 54 ⋆⋆⋆⋆

Soit $f : [0\,,1] \to [0\,,1]$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dont la dérivée est croissante. On appelle *longueur* de la courbe de f le réel

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que $L < 3$, puis que le nombre 3 ne peut pas être remplacé par un nombre plus petit.

EXERCICE 55 ⋆⋆⋆⋆

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul qui n'admet aucune racine de module 1. Montrer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,P'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})}{P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})}\,\mathrm{d}x$$

est égal au nombre de racines de P de module strictement inférieur à 1, comptées avec leur multiplicité.

EXERCICE 56 ⋆⋆⋆⋆

Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2 - 2x^3)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(3x^2 - 2x^3)\,\mathrm{d}x.$$