EXERCICES – CHAPITRE 19

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Dans toute la feuille, on reprend les notations du cours : $\langle x, y\rangle$ désigne un produit scalaire, $\|x\|$ la norme associée, $A^\perp$ l'orthogonal d'une partie A, p_F la projection orthogonale sur un sous-espace F de dimension finie et $d(x, F)$ la distance de x à F. Sauf mention contraire, $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont munis du produit scalaire canonique $\langle X, Y\rangle = X^T Y$, et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$. On note $\mathcal{C}([a\,,b],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[a\,,b]$ à valeurs réelles, et $\mathcal{C}_m([a\,,b],\mathbb{R})$ celui des fonctions continues par morceaux.

Produit scalaire

EXERCICE 1 ⋆

1. Pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ dans $\mathbb{R}^2$, on considère les applications

$$\varphi_1(x,y) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2}, \qquad \varphi_2(x,y) = 4x_1y_1 - x_2y_2,$$

$$\varphi_3(x,y) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 10x_2y_2.$$

   Lesquelles sont des produits scalaires sur $\mathbb{R}^2$?

2. Soit a et b deux réels. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la formule

$$\varphi(x,y) = x_1y_1 + 4x_1y_2 + bx_2y_1 + ax_2y_2$$

   définisse un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 2 ⋆

Dans chacun des cas suivants, montrer que la formule proposée définit un produit scalaire sur l'espace E indiqué.

(a) $E = \mathcal{C}^1([-1\,,1],\mathbb{R})$ et $\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + \displaystyle\int_{-1}^{1} f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$.

(b) $E = \mathbb{R}[X]$ et $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(0)\,Q^{(k)}(0)$; on justifiera que cette somme ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls.

(c) $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)\,Q^{(k)}(a_k)$, où a_0, …, a_n sont des réels quelconques, non nécessairement distincts.

EXERCICE 3 ⋆⋆

Soit $w : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour f, $g \in \mathcal{C}([0\,,1],\mathbb{R})$, on pose

$$\langle f, g\rangle_w = \int_0^1 f(t)g(t)w(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle_w$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([0\,,1],\mathbb{R})$ si et seulement si w est à valeurs positives et l'ensemble de ses zéros ne contient aucun intervalle $[\alpha\,,\beta]$ avec $\alpha < \beta$. Comparer avec la proposition 2 du cours.

Norme associée et inégalité de Cauchy-Schwarz

EXERCICE 4 ⋆

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$ et tous réels $x_1, \ldots, x_n$,
$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k}\Big)^2 \leqslant \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$
2. Soit x, y, z trois réels tels que $2x^2+y^2+5z^2 \leqslant 1$. Montrer que $(x+y+z)^2 \leqslant \frac{17}{10}$. Cette majoration peut-elle être améliorée ?

EXERCICE 5 ⋆

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \leqslant 2^{n/2}\sqrt{n+1}$.
2. Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|\operatorname{tr} A| \leqslant \sqrt{n}\,\|A\|$, où $\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)}$.
3. Montrer que, pour toutes matrices symétriques $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,
$$\big(\operatorname{tr}(AB+BA)\big)^2 \leqslant 4\operatorname{tr}(A^2)\operatorname{tr}(B^2).$$

EXERCICE 6 ⋆

Soit E un espace préhilbertien réel, $p \geqslant 1$ et $x_1, \ldots, x_p$ des vecteurs de E. Pour $x \in E$, on pose
$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} \|x - x_i\|^2 \qquad \text{et l'on note} \qquad m = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_i.$$
Montrer que $f(x) = f(m) + p\|x-m\|^2$ pour tout $x \in E$, et en déduire que f atteint son minimum en un unique point, que l'on précisera.

EXERCICE 7 ⋆⋆

Soit $a < b$ et $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = 0$.

1. Montrer que, pour tout $t \in [a\,,b]$,
$$f(t)^2 \leqslant (t-a)\int_a^t f'(u)^2\,\mathrm{d}u.$$
2. En déduire que
$$\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'(u)^2\,\mathrm{d}u.$$

EXERCICE 8 ⋆⋆

Montrer que la formule
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t + f(1)g(0) + f(0)g(1)$$
définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^1([0\,,1], \mathbb{R})$.

EXERCICE 9 ⋆⋆

Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$s_k = \int_0^1 t^k f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad H_n = (s_{i+j})_{0\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R});$$

le réel s_k est le moment d'ordre k de f.

1. Montrer que $X^T H_n X \geqslant 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.
2. En déduire que $s_{p+q}^2 \leqslant s_{2p}\, s_{2q}$ pour tous p, $q \in \mathbb{N}$, puis retrouver cette inégalité directement à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

EXERCICE 10 ⋆⋆

Des normes qui ne proviennent pas d'un produit scalaire. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle *norme* sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ telle que, pour tous x, $y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$N(x) = 0 \implies x = 0, \qquad N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x) \qquad \text{et} \qquad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y).$$

On dit que N *dérive d'un produit scalaire* s'il existe un produit scalaire sur E dont la norme associée est N. La norme associée à un produit scalaire est une norme en ce sens, d'après le cours.

1. Soit E un espace préhilbertien réel, x et y deux vecteurs distincts de E tels que $\|x\| \leqslant 1$ et $\|y\| \leqslant 1$, et $t \in]0\,,1[$. Montrer que $\|(1-t)x + ty\| < 1$. Interpréter géométriquement.
2. Pour $f \in \mathcal{C}([0\,,1], \mathbb{R})$, on pose $N_\infty(f) = \max_{[0,1]} |f|$. Montrer que N_∞ est une norme sur $\mathcal{C}([0\,,1], \mathbb{R})$, et qu'elle ne dérive pas d'un produit scalaire.
3. Soit $a < b$. Montrer que la formule

$$N_1(P) = \int_a^b |P(t)|\,\mathrm{d}t$$

définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$ qui ne dérive pas d'un produit scalaire. On pourra utiliser l'identité du parallélogramme. Même question pour l'application qui à P associe le maximum de $|P|$ sur $[a\,,b]$.

EXERCICE 11 ⋆⋆⋆

Normes vérifiant l'identité du parallélogramme. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et N une norme sur E, au sens de l'exercice 10, telle que

$$N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = 2N(x)^2 + 2N(y)^2 \qquad \text{pour tous } x, y \in E.$$

On veut montrer que N dérive d'un produit scalaire. Pour x, $y \in E$, on pose

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\big(N(x+y)^2 - N(x-y)^2\big).$$

1. Montrer que φ est symétrique, que $\varphi(x,x) = N(x)^2$ et que $\varphi(0,y) = 0$ pour tous x, $y \in E$.
2. Montrer que, pour tous x, x', $y \in E$,

$$\varphi(x,y) + \varphi(x',y) = 2\varphi\Big(\frac{x+x'}{2}, y\Big),$$

puis que $\varphi(x+x',y) = \varphi(x,y) + \varphi(x',y)$.

3. Montrer que $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x,y)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$, puis pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$, puis pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$.
4. Montrer que $|N(u) - N(v)| \leqslant N(u-v)$ pour tous u, $v \in E$. En déduire que, pour x et y fixés, la fonction $\lambda \mapsto \varphi(\lambda x, y)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et conclure.

Orthogonalité et algorithme de Gram-Schmidt

EXERCICE 12 ⋆

On se place dans $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire canonique.

1. Soit F le sous-espace d'équations $x - y + 2z + t = 0$ et $-x + 2y + 3z - t = 0$. Déterminer une base de $F^\perp$.
2. Soit $G = \text{Vect}\big((1,1,1,0),(2,1,1,-1)\big)$. Déterminer une base de $G^\perp$.
3. Soit H le sous-espace d'équations $x+y-z+t=0$ et $x+2y+3z+t=0$. Déterminer un système d'équations de $H^\perp$.

EXERCICE 13 ⋆

Soit E un espace préhilbertien réel.

1. Soit x, $y \in E$. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x+\lambda y\| \geqslant \|x\|$ pour tout réel λ. Interpréter géométriquement.
2. Soit F et G deux sous-espaces de E. Montrer que F et G sont orthogonaux si et seulement si $\|u+v\| \geqslant \|u\|$ pour tous $u \in F$ et $v \in G$.

EXERCICE 14 ⋆

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1,0,1)$, $v = (1,1,1)$ et $w = (-1,-1,0)$. Orthonormaliser la base (u,v,w) par l'algorithme de Gram-Schmidt.
2. Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer une base orthonormée du sous-espace F d'équations $x + z + t = 0$ et $x - y + z = 0$.

EXERCICE 15 ⋆

Montrer que les formules suivantes définissent des produits scalaires, puis orthonormaliser la base canonique de l'espace considéré par l'algorithme de Gram-Schmidt.

(a) Sur $\mathbb{R}^3$, $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$.

(b) Sur $\mathbb{R}_2[X]$, $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_0^2 P(t)Q(t)\,t\,\mathrm{d}t$.

EXERCICE 16 ⋆⋆

Polynômes de Tchebychev. On note T_n l'unique polynôme tel que $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ pour tout réel θ (exercice 53 de la feuille du chapitre 13).

1. Montrer que la formule $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_0^\pi P(\cos\theta)\,Q(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer $\langle T_k, T_\ell\rangle$ pour tous k, $\ell \in \mathbb{N}$.
3. Soit $N \in \mathbb{N}$. Pour ce produit scalaire, orthonormaliser par l'algorithme de Gram-Schmidt la base canonique $(1, X, \ldots, X^N)$ de l'espace $\mathbb{R}_N[X]$.

EXERCICE 17 ⋆⋆⋆

Familles obtusangles. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$, et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de $p \geqslant 2$ vecteurs de E telle que $\langle x_i, x_j \rangle < 0$ pour tous $i \neq j$.

1. Soit λ_1, …, λ_{p-1} des réels tels que $\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i = 0$. On note I_+ l'ensemble des indices i tels que $\lambda_i > 0$, I_- celui des indices i tels que $\lambda_i < 0$, et $u = \sum_{i \in I_+} \lambda_i x_i$. Montrer que $\|u\|^2 \leqslant 0$.
2. En calculant $\langle u, x_p \rangle$, montrer que I_+ est vide, puis que tous les λ_i sont nuls.
3. En déduire que $p \leqslant n+1$.
4. Construire, dans $\mathbb{R}^2$, une famille de trois vecteurs vérifiant l'hypothèse.

EXERCICE 18 ⋆⋆⋆

Polynômes de Legendre et équation différentielle. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t,$$

et l'on note φ l'application qui à $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $\varphi(P) = \left((1-X^2)P'\right)'$.

1. Calculer $\varphi(X^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et en déduire que φ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire P_n de degré au plus n tel que $\varphi(P_n) + n(n+1)P_n = 0$, et qu'il est de degré n. On pourra écrire la matrice de $\varphi + n(n+1)\mathrm{id}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que $\langle \varphi(P), Q \rangle = \langle P, \varphi(Q) \rangle$ pour tous P, $Q \in \mathbb{R}[X]$. En déduire que la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale.
4. En déduire que P_n est un multiple non nul du polynôme Q_n que fournit la méthode de Gram-Schmidt appliquée à $(1, X, \dots, X^n)$ (proposition 7 du cours), et que 1 n'est pas racine de P_n. Montrer enfin que P_n est proportionnel au polynôme $\left[(X^2-1)^n\right]^{(n)}$ de l'exercice 59 de la feuille du chapitre 13.

Bases orthonormées

EXERCICE 19 ⋆

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^T A = I_n$, c'est-à-dire dont les colonnes forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant n\sqrt{n}.$$
2. Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leqslant n.$$
On pourra introduire la colonne U dont tous les coefficients valent 1, et calculer $\|AU\|$.

EXERCICE 20 ⋆⋆

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E ; en particulier, E est de dimension finie.

EXERCICE 21 ⋆⋆

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

1. Soit $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$ une famille de vecteurs de E. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un produit scalaire sur E pour lequel $\mathcal{F}$ est orthonormée.
2. Dans $E = \mathbb{R}^2$, on considère la famille $\mathcal{F} = ((1,1),(0,2))$. Déterminer le produit scalaire pour lequel $\mathcal{F}$ est une base orthonormée, puis une inéquation cartésienne de la boule unité $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leqslant 1\}$ pour ce produit scalaire. Représenter B.

EXERCICE 22 ⋆⋆

Soit E un espace euclidien. On note $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace des formes linéaires sur E.

1. Montrer que l'application Φ qui à $a \in E$ associe la forme linéaire $x \mapsto \langle a, x \rangle$ est un isomorphisme de E sur $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.
2. En déduire que, pour toute forme linéaire φ sur E, il existe un unique vecteur $u \in E$ tel que $\varphi(x) = \langle u, x \rangle$ pour tout $x \in E$.
3. Déterminer ce vecteur u dans les cas suivants :
   (a) $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi = \operatorname{tr}$;
   (b) $E = \mathbb{R}^3$ et $\varphi(x) = \det(a, b, x)$, où a et b sont deux vecteurs fixés de $\mathbb{R}^3$ et où le déterminant est calculé dans la base canonique.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\int_2^7 \frac{Q(t)}{1 + \ln^2 t} \, \mathrm{d}t = \int_0^\pi P(t)Q(t) \sin t \, \mathrm{d}t \qquad \text{pour tout } Q \in \mathbb{R}_n[X].$$

EXERCICE 23 ⋆⋆

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

1. Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de vecteurs de E telle que $\|f_k - e_k\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$. Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de E. On pourra raisonner par l'absurde et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$.
2. Le résultat subsiste-t-il si l'on suppose seulement $\|f_k - e_k\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout k ?

EXERCICE 24 ⋆⋆

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

EXERCICE 25 ⋆⋆⋆

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, x un vecteur non nul de E, et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ un élément non nul de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les coordonnées de x sont λ_1, …, λ_n.
2. On munit E d'un produit scalaire. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels λ_1, …, λ_n pour qu'il existe une base *orthonormée* de E dans laquelle les coordonnées de x sont λ_1, …, λ_n.

EXERCICE 26 ⋆⋆⋆

Décomposition QR et inégalité de Hadamard. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, de colonnes C_1, …, C_n. On note $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $\mathcal{D} = (D_1, \dots, D_n)$ la base orthonormée obtenue en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à $\mathcal{C} = (C_1, \dots, C_n)$.

1. Justifier que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Quelle est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$? Montrer que la matrice de passage T de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{C}$ est triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux strictement positifs.
2. En déduire qu'il existe une matrice $O \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $O^T O = I_n$ et une matrice triangulaire supérieure T à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $A = OT$.
3. Montrer que ce couple (O, T) est unique.
4. Calculer cette décomposition pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
5. Montrer l'inégalité de Hadamard : $|\det A| \leqslant \|C_1\| \, \|C_2\| \cdots \|C_n\|$. Reste-t-elle vraie pour une matrice A non inversible ? Interpréter géométriquement pour $n = 3$.

EXERCICE 27 ⋆⋆⋆

La matrice de Hilbert. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$H_n = \left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que H_n est la matrice de Gram de la famille $(1, X, \dots, X^n)$ pour le produit scalaire défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 PQ$. En calculant $X^T H_n X$ pour une colonne $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, montrer que H_n est inversible. On comparera avec l'exercice 48 de la feuille du chapitre 17.
2. Montrer que, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$\int_{-1}^{1} Q(t) \, \mathrm{d}t = -\mathrm{i} \int_0^{\pi} Q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \, \mathrm{d}\theta.$$

3. En déduire l'inégalité de Hilbert : pour tous réels a_0, …, a_n,

$$\sum_{0 \leqslant k,\ell \leqslant n} \frac{a_k a_\ell}{k+\ell+1} \leqslant \pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2.$$

On pourra utiliser l'égalité suivante, établie à l'exercice 52 de la feuille du chapitre 6, où l'on a noté $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$:

$$\int_0^{2\pi} \left|P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta = 2\pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2.$$

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

EXERCICE 28 ⋆

On se place dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique.

1. Déterminer la distance du vecteur $u = (3, 4, 3)$ au plan P d'équation $2x + y - z = 0$.
2. Soit H le plan d'équation $x + y + 2z = 0$. Déterminer la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale p_H, puis celle de la symétrie s par rapport à H parallèlement à $H^\perp$. Vérifier que cette dernière matrice est symétrique et que son carré vaut I_3.

EXERCICE 29 ⋆

Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer le projeté orthogonal du vecteur $u = (1, 8, 1, 1)$ sur le sous-espace F d'équations $x + y + t = 0$ et $x + y + 2z - t = 0$, et la distance de u à F.

EXERCICE 30 ⋆

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace G d'équations $x_1 + x_2 = 0$ et $x_3 + x_4 = 0$.

1. Déterminer une base orthonormée de G.
2. Déterminer la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale p_G.
3. Pour $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, calculer la distance de x à G.

EXERCICE 31 ⋆

Soit $n \geqslant 1$ et $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$.

1. Montrer que H est un sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$, et calculer sa dimension.
2. Justifier que $\mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_0[X] \oplus H$, et expliciter le projecteur sur $\mathbb{R}_0[X]$ parallèlement à H.
3. Donner un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ pour lequel ce projecteur est la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_0[X]$.

EXERCICE 32 ⋆

On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle M, N\rangle = \mathrm{tr}(M^T N)$, et l'on considère

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \qquad \text{et} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.
2. Calculer le projeté orthogonal de J sur $F^\perp$.
3. En déduire la distance de J à F.

EXERCICE 33 ⋆⋆

Soit E un espace préhilbertien réel, et F, G deux sous-espaces de E.

1. Montrer que $(F \cup G)^\perp = (F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. Montrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
3. On suppose E euclidien. Montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$, et que $(A^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}(A)$ pour toute partie A de E.
4. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \sum_k a_k b_k$, où (a_k) et (b_k) sont les suites des coefficients de P et de Q, et l'on pose $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_0[X]$. Montrer que $(F \cap G)^\perp \neq F^\perp + G^\perp$. On pourra utiliser la remarque qui suit la proposition 11 du cours.

EXERCICE 34 ⋆⋆

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$.

1. Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En notant s_{ij} le coefficient d'indice (i, j) d'une matrice S, déterminer
$$\inf_{S\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(m_{ij} - s_{ij})^2.$$
2. On suppose $n \geqslant 2$, et l'on note J la matrice dont tous les coefficients valent 1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de trace nulle, et s la somme de ses coefficients. Calculer
$$\inf\left\{\|M - \alpha I_n - \beta J\| \;\middle|\; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

EXERCICE 35 ⋆⋆

Calculer les bornes inférieures suivantes, en précisant en quels points elles sont atteintes.

(a) $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(t - a\sqrt{t} - b\right)^2 \mathrm{d}t$ (b) $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \left(t - a\cos t - b\sin t\right)^2 \mathrm{d}t$

EXERCICE 36 ⋆⋆

Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$
Montrer que $\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x \geqslant 4$, et déterminer les fonctions f pour lesquelles il y a égalité.

EXERCICE 37 ⋆⋆

On munit l'espace $E = \mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire défini par $\langle A, B\rangle = \int_0^1 AB$, et l'on considère le polynôme $Q = 1 + X + X^2 + X^3$.

1. Montrer que l'ensemble
$$F = \left\{P \in E \;\middle|\; \int_0^1 (t^3 - t)P'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t\right\}$$
est un sous-espace de E.
2. Calculer $d(Q, F)$.

EXERCICE 38 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 1$ et $a_0, \ldots, a_n$ des réels.

1. À quelle condition sur $a_0, \ldots, a_n$ la formule suivante définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$?
$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$$
On suppose désormais cette condition réalisée.
2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. On pose
$$F = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\right\}.$$
Déterminer $F^\perp$, puis la distance d'un polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ à F. Expliciter $d(X^n, F)$.

EXERCICE 39 ⋆⋆

On munit $E = \mathcal{C}([0\,,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,$$

et l'on pose $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

1. Montrer que F est un hyperplan de E, et que $F^\perp = \{0\}$.
2. En déduire que F n'admet pas de supplémentaire orthogonal. Quelle hypothèse du théorème 6 du cours n'est pas satisfaite ?

EXERCICE 40 ⋆⋆

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 PQ$.

1. On suppose dans cette question $n = 2$.
   (a) Donner une base de l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(X, X^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Déterminer un polynôme $A_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(0) = \int_0^1 A_2(t)P(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $A_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$P(0) = \int_0^1 A_n(t)P(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X],$$

   et que A_n est de degré n.
3. Existe-t-il un polynôme $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = \int_0^1 A(t)P(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$?

EXERCICE 41 ⋆⋆

Soit E un espace préhilbertien réel et p un projecteur de E. On dit que p est un *projecteur orthogonal* si $\mathrm{Ker}\,p$ et $\mathrm{Im}\,p$ sont orthogonaux. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in E$. Pour la réciproque, on pourra fixer $x \in \mathrm{Im}\,p$ et $y \in \mathrm{Ker}\,p$, et développer $\|p(x+\lambda y)\|^2$ et $\|x+\lambda y\|^2$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 42 ⋆⋆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, identifiée à l'endomorphisme $X \mapsto AX$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $A^2 = A$. Montrer que A est un projecteur orthogonal, au sens de l'exercice 41, si et seulement si la matrice A est symétrique.
2. On suppose que $A^2 = I_n$. On dit que la symétrie A est orthogonale si les sous-espaces $\mathrm{Ker}\,(A-I_n)$ et $\mathrm{Ker}\,(A+I_n)$ sont orthogonaux. Montrer que A est une symétrie orthogonale si et seulement si la matrice A est symétrique.

EXERCICE 43 ⋆⋆

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et F un sous-espace de E. Calculer en fonction de la dimension de F le réel

$$\sum_{j=1}^{n} \|p_F(e_j)\|^2.$$

EXERCICE 44 ⋆⋆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(A^T) = (\operatorname{Im} A)^\perp$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker}(A^T A) = \operatorname{Ker} A$ et que $\operatorname{Im}(AA^T) = \operatorname{Im} A$.
3. On suppose que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} A$. Montrer que la matrice $A + A^T$ est inversible.

EXERCICE 45 ⋆⋆

Méthode des moindres carrés. Soit $p \leqslant n$ deux entiers, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice de rang p et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe un unique $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que
$$\|AX_0 - B\| = \inf\{\|AX - B\| \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}.$$
2. Montrer que X_0 est l'unique solution du système $A^T AX = A^T B$.
3. Application : calculer $\inf\{(x+y-1)^2 + (x-y)^2 + (2x+y+2)^2 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

EXERCICE 46 ⋆⋆

Soit A_1, …, A_p des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que
$$\sum_{k=1}^{p} A_k = I_n \qquad \text{et} \qquad {A_i}^T A_j = 0 \quad \text{pour tous } i \neq j.$$

1. Montrer que chaque A_i est un projecteur orthogonal, au sens de l'exercice 41.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \operatorname{rg}(A_k) = n$.

EXERCICE 47 ⋆⋆⋆

Déterminants de Gram. Soit E un espace préhilbertien réel. Pour une famille $(u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs de E, on note $G(u_1, \dots, u_p) = \det\left(\langle u_i, u_j\rangle\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ son déterminant de Gram.

1. Justifier qu'il existe une famille orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ de E telle que $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_m)$ contienne u_1, …, u_p. On note $M \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ la matrice des coordonnées des u_j dans $\mathcal{B}$. Exprimer les coefficients de M à l'aide de produits scalaires, et montrer que $M^T M = \left(\langle u_i, u_j\rangle\right)_{i,j}$.
2. Montrer que $G(u_1, \dots, u_p) \neq 0$ si et seulement si la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre.
3. Montrer que $G(u_1, \dots, u_p) \geqslant 0$.
4. On suppose la famille $(u_1, \dots, u_p)$ libre, et l'on note $F = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. Montrer que, pour tout $x \in E$,
$$d(x, F)^2 = \frac{G(x, u_1, \dots, u_p)}{G(u_1, \dots, u_p)}.$$
5. Retrouver ainsi la borne inférieure (a) de l'exercice 35.

EXERCICE 48 ⋆⋆⋆

On note $E = \mathcal{C}^1([0\,,1],\mathbb{R})$.

1. Montrer que la formule $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^1 (f(t)g(t)+f'(t)g'(t))\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. On pose $F = \{f\in\mathcal{C}^2([0\,,1],\mathbb{R}) \mid f''=f\}$. Montrer que F est un sous-espace de dimension 2 de E, et que
$$F^\perp = \{f\in E \mid f(0)=f(1)=0\}.$$
3. Déterminer une expression explicite de la projection orthogonale $p_F(f)$ d'une fonction $f\in E$, à l'aide de $f(0)$, de $f(1)$ et des fonctions sh.
4. Soit α, $\beta\in\mathbb{R}$, et $E_{\alpha,\beta} = \{f\in E \mid f(0)=\alpha \text{ et } f(1)=\beta\}$. Montrer que
$$\inf_{f\in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 (f(t)^2+f'(t)^2)\,\mathrm{d}t = \frac{(\alpha^2+\beta^2)\operatorname{ch}1 - 2\alpha\beta}{\operatorname{sh}1},$$
et que cette borne inférieure est atteinte en une unique fonction, que l'on précisera.

Exercices de synthèse

EXERCICE 49 ⋆⋆

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Dans tout l'exercice, E désigne un espace préhilbertien réel.

1. Si trois vecteurs x, y, z de E vérifient $\|x+y+z\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2$, alors ils sont deux à deux orthogonaux.
2. Si deux vecteurs x et y ont la même norme, alors $x+y$ et $x-y$ sont orthogonaux.
3. La formule $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur l'espace $\mathcal{C}_m([0\,,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues par morceaux sur $[0\,,1]$.
4. Si $x\neq 0$ et $\langle x,y\rangle = \|x\|\,\|y\|$, alors il existe un réel $\lambda\geqslant 0$ tel que $y=\lambda x$.
5. Pour tous x, $y\in E$, $\|x+y\|\,\|x-y\|\leqslant\|x\|^2+\|y\|^2$.
6. Si (e_1,e_2) est une famille libre de E, l'algorithme de Gram-Schmidt appliqué à (e_1,e_2) et à (e_2,e_1) fournit la même famille orthonormée, à l'ordre des vecteurs près.
7. Si $F\subset G$ sont deux sous-espaces de dimension finie de E, alors $p_F\circ p_G = p_F$.
8. Pour tout sous-espace F de E, $(F^\perp)^\perp = F$.
9. Si E est euclidien, deux vecteurs non nuls orthogonaux à un même hyperplan de E sont colinéaires.
10. Si un vecteur x est orthogonal à tous les vecteurs d'une famille génératrice de E, éventuellement infinie, alors $x=0$.

EXERCICE 50 ⋆⋆

Une moyenne sur tous les choix de signes. Soit E un espace préhilbertien réel, u_1, …, u_n des vecteurs de E et C un réel tels que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i u_i \right\| \leqslant C \qquad \text{pour tout } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n.$$

1. Calculer la somme, étendue aux 2^n éléments $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de $\{-1, 1\}^n$, des réels $\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i u_i \right\|^2$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 \leqslant C^2$.
3. On ne suppose plus rien sur les u_i. Montrer qu'il existe toujours des signes ε_i tels que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i u_i \right\|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2,$$

et d'autres pour lesquels l'inégalité contraire est vraie. Que dire des réels $\left\| \sum_i \varepsilon_i u_i \right\|^2$ quand les u_i sont deux à deux orthogonaux ?

EXERCICE 51 ⋆⋆⋆

Le simplexe régulier et la molécule de méthane. Soit $n \geqslant 1$ et e_1, …, e_{n+1} des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ tels que $\langle e_i, e_j \rangle = \alpha$ pour tous $i \neq j$, où α est un réel. On note $A = \left(\langle e_i, e_j \rangle \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\det A = 0$. On pourra écrire $A = M^T M$ pour une matrice M bien choisie.
2. Calculer $\det A$ en fonction de α. En déduire les valeurs possibles de α et, pour chacune, la valeur de $e_1 + \cdots + e_{n+1}$.
3. Réciproquement, soit E un espace euclidien de dimension n. Montrer qu'il existe des vecteurs unitaires x_0, …, x_n de E tels que $\langle x_i, x_j \rangle = -\frac{1}{n}$ pour tous $i \neq j$. On pourra commencer par le cas où E est l'hyperplan d'équation $y_0 + \cdots + y_n = 0$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, puis utiliser des bases orthonormées.
4. Dans une molécule de méthane CH_4, l'atome de carbone est lié à quatre atomes d'hydrogène ; on admet que les quatre liaisons ont la même longueur et font deux à deux le même angle. Calculer cet angle, en degrés, à 10^{-2} près.

EXERCICE 52 ⋆⋆⋆

Une distance calculée par une fraction rationnelle. Soit $n \geqslant 1$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on pose

$$I(P) = \int_0^1 \left(t^n - P(t) \right)^2 \mathrm{d}t.$$

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ en lequel I atteint son minimum.
2. On considère la fraction rationnelle

$$F = \frac{1}{X + n + 1} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{X + j + 1}.$$

   (a) Calculer $F(i)$ pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$.

   (b) En déduire une expression factorisée de F.

   (c) Calculer $F(n)$, puis en déduire la valeur du minimum de I.
3. Vérifier le résultat pour $n = 2$ à l'aide de l'exemple de la section 19.6 du cours.

EXERCICE 53 ⋆⋆⋆

Les formules de quadrature de Gauss. Soit $n \geqslant 1$. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} PQ$, et l'on note L_n le polynôme de degré n, orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, que fournit l'algorithme de Gram-Schmidt dans le cours. D'après la proposition 7 du cours, L_n possède n racines simples $x_1 < \cdots < x_n$, toutes situées dans $]-1\,,1[$.

1. Montrer qu'il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que
$$\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \qquad \text{pour tout } f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]. \tag{$*$}$$
2. Montrer que l'égalité $(*)$ est encore vraie pour tout $f \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. On pourra effectuer la division euclidienne de f par L_n.
3. Réciproquement, soit $y_1 < \cdots < y_n$ des réels et μ_1, …, μ_n des réels tels que $\int_{-1}^{1} f = \sum_k \mu_k f(y_k)$ pour tout $f \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Montrer que les y_k sont les racines de L_n.
4. Montrer que $\lambda_k > 0$ pour tout k, et calculer $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$.
5. Calculer x_1, x_2, λ_1 et λ_2 pour $n = 2$.
6. Soit $f : [-1\,,1] \to \mathbb{R}$ continue, et $I_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$, où les x_k et les λ_k dépendent de n. On admet le théorème de Weierstrass : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme Q tel que $|f(t) - Q(t)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in [-1\,,1]$. Montrer que $I_n(f)$ tend vers $\int_{-1}^{1} f$ quand n tend vers $+\infty$.

Les quatre derniers exercices sont des problèmes à traiter en autonomie : l'énoncé fixe le but, et c'est à vous de trouver le chemin.

EXERCICE 54 ⋆⋆⋆⋆

Soit E un espace euclidien et x_1, …, x_p des vecteurs de E tels que $\langle x_i, x_j\rangle = -1$ pour tous $i \neq j$. Montrer que $\sum_{i=1}^{p} \left(1 + \|x_i\|^2\right)^{-1} \leqslant 1$, et déterminer les cas d'égalité.

EXERCICE 55 ⋆⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 1$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$, et l'on note $\mathcal{R}$ l'ensemble des matrices de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la borne inférieure des réels $\|M - I_n\|$, pour $M \in \mathcal{R}$, vaut $\sqrt{n-1}$, et déterminer les matrices $M \in \mathcal{R}$ en lesquelles cette borne inférieure est atteinte.

EXERCICE 56 ⋆⋆⋆⋆

Soit V un sous-espace de $\mathcal{C}([0\,,1], \mathbb{R})$ et $A > 0$ un réel tels que
$$\sup_{[0,1]} |f| \leqslant A\Big(\int_0^1 f^2\Big)^{1/2} \qquad \text{pour toute } f \in V.$$
Montrer que V est de dimension finie, et que $\dim V \leqslant A^2$. Montrer que, si l'on remplace les fonctions continues par des fonctions continues par morceaux, cette borne est optimale : pour tout $n \geqslant 1$, il existe un sous-espace V de $\mathcal{C}_m([0\,,1], \mathbb{R})$, de dimension n, sur lequel l'inégalité précédente est vraie avec $A = \sqrt{n}$.

EXERCICE 57 ⋆⋆⋆⋆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que, pour toutes colonnes X, $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'égalité $X^T A Y = 0$ entraîne $Y^T A X = 0$. Montrer que la matrice A est symétrique ou antisymétrique.