CORRIGÉ – CHAPITRE 20

SÉRIES NUMÉRIQUES ET FAMILLES SOMMABLES

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Les renvois « proposition n », « théorème n » désignent les énoncés du chapitre 20 du cours ; ceux des chapitres antérieurs sont précisés. On reprend les notations de la feuille : S_n désigne la somme partielle d'une série, R_n son reste, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, et γ la constante d'Euler (proposition 7). Pour étudier la nature d'une série, on suit la méthode du cours : on regarde d'abord si le terme général tend vers 0, puis on cherche un équivalent simple à l'aide des développements limités du chapitre 10, et l'on vérifie toujours le signe avant d'appliquer les théorèmes 3 et 4, qui ne valent que pour des séries à termes positifs, au moins à partir d'un certain rang. Les énoncés n'indiquent pas la technique d'intégration à employer : lorsqu'une intégrale doit être calculée, le corrigé l'annonce au début du calcul.

SÉRIES NUMÉRIQUES : GÉNÉRALITÉS

EXERCICE 1 ⋆

Dans les trois premières séries, le logarithme d'un quotient se décompose en une somme de différences : la somme partielle est le logarithme d'un produit télescopique, que l'on calcule exactement. La convergence et la valeur de la somme s'obtiennent alors en une seule fois, par passage à la limite.

(a) Pour $n \geqslant 2$, on a $1 - \frac{1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} > 0$, et, pour $N \geqslant 2$, les facteurs se simplifient en cascade :

$$\sum_{n=2}^{N} \ln\Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big) = \ln\Big(\prod_{n=2}^{N} \frac{n-1}{n} \cdot \prod_{n=2}^{N} \frac{n+1}{n}\Big) = \ln\Big(\frac{1}{N} \cdot \frac{N+1}{2}\Big) = \ln \frac{N+1}{2N}.$$

Comme $\frac{N+1}{2N}$ tend vers $\frac{1}{2}$ et que ln est continue en $\frac{1}{2}$, la suite des sommes partielles converge.

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2}$$

On pouvait aussi établir la convergence a priori : le terme général est négatif et équivalent à $-\frac{1}{n^2}$, et le théorème 4, appliqué à son opposé, la ramène à celle de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$. Mais cela ne donne pas la somme.

(b) Le terme général vaut $\ln \frac{2j+1}{2j}$ pour $n = 2j$ pair, et $\ln \frac{2j}{2j+1}$ pour $n = 2j+1$ impair : deux termes consécutifs de ce type sont opposés. Pour $k \geqslant 1$, en groupant les termes d'indices $2j$ et $2j+1$,

$$S_{2k+1} = \sum_{n=2}^{2k+1} \ln\Big(1 + \frac{(-1)^n}{n}\Big) = \sum_{j=1}^{k} \Big(\ln\frac{2j+1}{2j} + \ln\frac{2j}{2j+1}\Big) = 0,$$

$$S_{2k} = S_{2k+1} - \ln\frac{2k}{2k+1} = \ln\Big(1 + \frac{1}{2k}\Big).$$

Les deux suites extraites (S_{2k}) et (S_{2k+1}) tendent vers 0, donc (S_n) aussi (chapitre 7, proposition 11 (ii)).

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\Big(1 + \frac{(-1)^n}{n}\Big) = 0}$$

Piège. L'erreur la plus répandue est de conclure par équivalents : $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right) \sim \dfrac{(-1)^n}{n}$, mais ce terme change de signe à chaque rang, et le théorème 4 ne s'applique pas. Le regroupement par deux, que l'exercice 6 justifiera en général, fait ici apparaître des sommes exactement nulles.

(c) On factorise numérateur et dénominateur : $n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$ et $n^2+3n=n(n+3)$. Pour $N \geqslant 2$,

$$\sum_{n=2}^{N} \ln \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} = \ln\Big(\prod_{n=2}^{N} \frac{n+1}{n} \cdot \prod_{n=2}^{N} \frac{n+2}{n+3}\Big) = \ln\Big(\frac{N+1}{2} \cdot \frac{4}{N+3}\Big) = \ln \frac{2(N+1)}{N+3},$$

qui tend vers $\ln 2$ quand N tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\Big(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\Big) = \ln 2}$$

Pour $N=2$, la formule donne $\ln\dfrac{6}{5}$, qui est bien le premier terme $\ln\dfrac{12}{10}$ ✓.

(d) Le terme général vaut 4^{-k} pour k pair et 2^{-k} pour k impair : il est positif et majoré par $(\frac{1}{2})^k$, terme d'une série géométrique convergente (théorème 1). La série converge par le théorème 3, et sa somme est la limite de la suite extraite (S_{2m+1}) (chapitre 7, proposition 11 (i)). Or, en séparant les indices pairs $k=2j$ et impairs $k=2j+1$,

$$S_{2m+1} = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{16^j} + \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{2^{2j+1}} \xrightarrow[m\to+\infty]{} \frac{1}{1-\frac{1}{16}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{16}{15} + \frac{2}{3}.$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \big(3+(-1)^k\big)^{-k} = \frac{16}{15} + \frac{10}{15} = \frac{26}{15}}$$

Séparer les termes pairs et impairs n'est légitime qu'après avoir établi la convergence de la série : c'est elle qui permet de calculer la somme sur une suite extraite des sommes partielles. Pour une série à termes positifs, la section 20.6 du cours rendra ce découpage automatique.

EXERCICE 2 ⋆

Dans les trois cas, le terme général est positif et équivalent à $\dfrac{1}{k^2}$, $\dfrac{1}{k^3}$ et $\dfrac{1}{k^{p+1}}$: les trois séries convergent par le théorème 4 et les séries de Riemann (théorème 5), puisque $p+1 \geqslant 2 > 1$. Pour la somme, on fait apparaître un télescopage (proposition 4).

Première série. La décomposition en éléments simples (chapitre 13) donne, pour $k \geqslant 2$,

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\Big), \qquad \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\Big),$$

puisque les termes $\dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{N-1}$ apparaissent une fois avec chaque signe.

$$\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4}}$$

Deuxième série. On écrit le terme comme une différence de deux termes consécutifs de la suite $(\dfrac{1}{k(k+1)})$:

$$\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k(k+1)(k+2)},$$

d'où, par télescopage,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{(N+1)(N+2)}\Big).$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}}$$

Troisième série. Le même calcul se fait avec p facteurs. Posons $a_k = \dfrac{1}{k(k+1)\cdots(k+p-1)}$ pour $k \geqslant 1$. Les deux produits $k(k+1)\cdots(k+p-1)$ et $(k+1)\cdots(k+p)$ ont pour multiple commun $k(k+1)\cdots(k+p)$, d'où

$$a_k - a_{k+1} = \frac{(k+p)-k}{k(k+1)\cdots(k+p)} = \frac{p}{k(k+1)\cdots(k+p)}.$$

Par la proposition 4, comme a_k tend vers 0 et que $a_1 = \dfrac{1}{p!}$,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)} = \frac{1}{p}(a_1 - a_{N+1}) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{a_1}{p}, \qquad \boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)} = \frac{1}{p\cdot p!}}$$

Pour $p=1$, on retrouve $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$, exemple qui suit la proposition 4, et pour $p=2$ la deuxième série ✓. Pour $p=3$, la somme vaut $\dfrac{1}{18}$.

À retenir. Le télescopage est la seule méthode de ce chapitre qui donne une somme exacte sans autre outil ; il repose toujours sur une écriture $u_k = a_k - a_{k+1}$, qu'on lit ici sur des produits de facteurs consécutifs. L'erreur la plus répandue est de décomposer complètement en éléments simples, ce qui fait apparaître $p+1$ fractions dont le télescopage, bien réel, est beaucoup plus pénible à organiser.

EXERCICE 3 ⋆

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $n < k$, le produit $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ contient le facteur $n - n = 0$: le terme est nul. Pour $n \geqslant k$, il vaut $\dfrac{n!}{(n-k)!}$, et le terme général vaut $\dfrac{1}{(n-k)!}$. Pour $N \geqslant k$, en posant $m = n-k$,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!} = \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{(n-k)!} = \sum_{m=0}^{N-k} \frac{1}{m!},$$

qui tend vers e par le théorème 2 appliqué en $z=1$.

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N},\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!} = \mathrm{e}}$$

2. On décompose n^2+2n+3 sur les polynômes 1, X, $X(X-1)$: comme $n^2 = n(n-1)+n$, on a $n^2+2n+3 = n(n-1)+3n+3$. Par linéarité (proposition 1 (i)) et la question 1, pour $k=2$, 1 et 0 :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+2n+3}{n!} = \mathrm{e} + 3\mathrm{e} + 3\mathrm{e} = 7\mathrm{e}}$$

Pour n^4, on cherche des réels c_0, …, c_4 tels que

$$X^4 = c_4X(X-1)(X-2)(X-3) + c_3X(X-1)(X-2) + c_2X(X-1) + c_1X + c_0.$$

Ces cinq polynômes sont de degrés échelonnés 4, 3, 2, 1, 0 : ils forment une base de $\mathbb{R}_4[X]$ (chapitre 14, proposition 10), et la décomposition existe et est unique. Le coefficient dominant donne $c_4 = 1$. On évalue ensuite en 0, 1, 2, 3, où les premiers polynômes s'annulent :

$$0 = c_0, \qquad 1 = c_1, \qquad 16 = 2c_2 + 2c_1, \qquad 81 = 6c_3 + 6c_2 + 3c_1,$$

d'où $c_2 = 7$ et $c_3 = \dfrac{81 - 42 - 3}{6} = 6$. Ainsi $n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3) + 6n(n-1)(n-2) + 7n(n-1) + n$, et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^4}{n!} = (1 + 6 + 7 + 1)\,\mathrm{e} = 15\mathrm{e}}$$

On contrôle l'identité en $n = 4$: $24 + 6 \times 24 + 7 \times 12 + 4 = 256 = 4^4$ ✓.

À retenir. Les polynômes $X(X-1)\cdots(X-k+1)$ jouent pour les séries $\sum \dfrac{P(n)}{n!}$ le rôle des monômes : le décalage d'indice les transforme tous en la série de e. Le coefficient de e obtenu pour $\sum \dfrac{n^k}{n!}$, qui vaut 1, 1, 2, 5, 15 pour $k = 0, \ldots, 4$, est le nombre de façons de partager un ensemble à k éléments en parties non vides ; nous ne le démontrerons pas.

EXERCICE 4 ⋆⋆

1. On note u_n le terme général et l'on met $\ln n$ en facteur dans chaque logarithme. Par le développement $\ln(1+x) = x + O(x^2)$ (chapitre 10, théorème 5),

$$u_n = (1 + a + b)\ln n + a\ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) + b\ln\Big(1 + \frac{2}{n}\Big) = (1 + a + b)\ln n + \frac{a + 2b}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

On discute selon les coefficients.

— Si $1 + a + b \neq 0$, alors $|u_n|$ tend vers $+\infty$: la série diverge grossièrement (proposition 2).

— Si $1 + a + b = 0$ et $a + 2b \neq 0$, alors $u_n \sim \dfrac{a + 2b}{n}$, de signe constant : par le théorème 4, appliqué à u_n ou à $-u_n$, la série diverge comme la série harmonique.

— Si $1 + a + b = 0$ et $a + 2b = 0$, c'est-à-dire $a = -2$ et $b = 1$, alors $u_n = O(\frac{1}{n^2})$, et la série converge (proposition 9, avec le théorème 5).

$$\boxed{\sum \big(\ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)\big) \text{ converge } \iff a = -2 \text{ et } b = 1}$$

Dans ce cas, on pose $d_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\big(1 + \dfrac{1}{n}\big)$, qui tend vers 0. Le terme général s'écrit $u_n = \big(\ln(n+2) - \ln(n+1)\big) - \big(\ln(n+1) - \ln n\big) = d_{n+1} - d_n$, et la proposition 4 donne

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\ln n - 2\ln(n+1) + \ln(n+2)\big) = \lim_{n\to+\infty} d_n - d_1 = -\ln 2}$$

2. On met cette fois $\sqrt{n}$ en facteur, et l'on utilise $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + O(x^3)$:

$$v_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} = \sqrt{n}\,\Big((1 + a + b) + \frac{a + 2b}{2n} - \frac{a + 4b}{8n^2} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big).$$

Si $1 + a + b \neq 0$, alors $|v_n| \sim |1 + a + b|\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$: divergence grossière. Si $1 + a + b = 0$ et $a + 2b \neq 0$, alors $v_n \sim \dfrac{a + 2b}{2\sqrt{n}}$, de signe constant, et la série diverge par comparaison avec la série de Riemann d'exposant $\dfrac{1}{2}$. Si $a = -2$ et $b = 1$, alors $v_n \sim -\dfrac{1}{4n^{3/2}}$, de signe constant, et la série converge, puisque $\dfrac{3}{2} > 1$.

$$\boxed{\sum \big(\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}\big) \text{ converge } \iff a = -2 \text{ et } b = 1}$$

Le même télescopage, avec $\delta_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, qui tend vers 0, donne $v_n = \delta_{n+1} - \delta_n$, et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right) = -\delta_1 = 1 - \sqrt{2} \approx -0{,}4142}$$

À retenir. La condition $1 + a + b = 0$ rend le terme général borné, la condition $a + 2b = 0$ le rend sommable : chaque condition tue un terme du développement asymptotique. Une fois la convergence acquise, la somme se calcule en reconnaissant une différence seconde $d_{n+1} - d_n$, que la proposition 4 télescope. Les conditions trouvées sont les mêmes dans les deux questions, parce que les coefficients $(1, -2, 1)$ annulent toute fonction affine de n.

EXERCICE 5 ⋆⋆

On pose, comme le suggère l'énoncé, $a_n = \ln(\ln n)$ pour $n \geqslant 2$. Le terme général s'écrit

$$u_n = 2\ln\ln(n+1) - \ln\ln n - \ln\ln(n+2) = (a_{n+1} - a_n) - (a_{n+2} - a_{n+1}) = d_n - d_{n+1},$$

avec $d_n = a_{n+1} - a_n = \ln \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}$. Or

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

donc d_n tend vers $\ln 1 = 0$ par continuité du logarithme. La proposition 4, appliquée à la suite $(-d_n)$, montre que la série converge, et, en sommant de 2 à N,

$$\sum_{n=2}^{N} u_n = d_2 - d_{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} d_2 = \ln\frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

$$\boxed{\text{La série converge, et } \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{\left(\ln(n+1)\right)^2}{\ln n\,\ln(n+2)}\right) = \ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right) \approx 0{,}4606}$$

La somme partielle jusqu'à $n = 10^5$ vaut 0,460560, en accord avec cette valeur ✓. On aurait pu montrer la convergence par un développement asymptotique, mais il est laborieux (u_n est de l'ordre de $\dfrac{1}{n^2 \ln n}$) ; le télescopage donne la nature et la somme d'un coup.

Piège. L'erreur la plus répandue est de télescoper en une seule étape, en écrivant $u_n = a_{n+1} - a_n$: c'est une différence *seconde*, comme à l'exercice 4, et c'est la convergence de d_n vers 0, et non celle de a_n (qui tend vers $+\infty$), qui assure la convergence.

EXERCICE 6 ⋆⋆

On note $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ les sommes partielles de $\sum a_n$. Comme φ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on a $\varphi(p) \geqslant p$ pour tout p (récurrence immédiate) ; en particulier $\varphi(p)$ tend vers $+\infty$. Avec $\varphi(0) = 0$, la relation de Chasles donne, pour $P \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{p=0}^{P} S_p = \sum_{p=0}^{P} \sum_{k=\varphi(p)}^{\varphi(p+1)-1} a_k = \sum_{k=0}^{\varphi(P+1)-1} a_k = A_{\varphi(P+1)-1}.$$

Les paquets $[\![\varphi(p)\,;\varphi(p+1)-1]\!]$ sont non vides et recouvrent $\mathbb{N}$ sans chevauchement : c'est là que servent les deux hypothèses sur φ.

1. La suite $\left(\varphi(P+1)-1\right)_{P\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, à valeurs dans $\mathbb{N}$: la suite $(A_{\varphi(P+1)-1})_P$ est extraite de (A_n). Si (A_n) converge vers A, elle converge aussi vers A (chapitre 7, proposition 11 (i)).

$$\boxed{\sum a_n \text{ converge } \Longrightarrow \sum S_p \text{ converge, et } \sum_{p=0}^{+\infty} S_p = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n}$$

2. On prend $a_n = (-1)^n$ et $\varphi(p) = 2p$. Alors $S_p = a_{2p} + a_{2p+1} = 1 - 1 = 0$ pour tout p : la série $\sum S_p$ converge, de somme nulle, alors que $\sum (-1)^n$ diverge grossièrement.

La réciproque est fausse : $\sum S_p$ peut converger sans que $\sum a_n$ converge

C'est le calcul fautif « $(1-1)+(1-1)+\cdots = 0$ » : regrouper les termes d'une série divergente peut produire une série convergente, et l'on ne peut pas « dégrouper ».

3. Notons $L = \sum_{p=0}^{+\infty} S_p$, $T_p = \sum_{q=0}^{p-1} S_q = A_{\varphi(p)-1}$ pour $p \geqslant 1$, $T_0 = 0$, et $\varepsilon_p = \sum_{k=\varphi(p)}^{\varphi(p+1)-1} |a_k|$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\varphi(0) = 0$ et que $\varphi(p)$ tend vers $+\infty$ en croissant, il existe un unique p, que l'on note $p(n)$, tel que $\varphi(p) \leqslant n < \varphi(p+1)$. Alors

$$A_n = T_p + \sum_{k=\varphi(p)}^{n} a_k, \qquad \text{donc} \qquad |A_n - L| \leqslant |T_p - L| + \sum_{k=\varphi(p)}^{n} |a_k| \leqslant |T_p - L| + \varepsilon_p.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme T_p tend vers L et ε_p vers 0, il existe P tel que $|T_p - L| \leqslant \varepsilon$ et $\varepsilon_p \leqslant \varepsilon$ pour tout $p \geqslant P$. Pour $n \geqslant \varphi(P)$, on a $p(n) \geqslant P$, puisque $n < \varphi(p(n)+1)$ et que φ est croissante ; donc $|A_n - L| \leqslant 2\varepsilon$.

$\sum S_p$ converge et $\varepsilon_p \to 0 \implies \sum a_n$ converge, de même somme

L'hypothèse $\varepsilon_p \to 0$ contrôle ce qui se passe *à l'intérieur* d'un paquet, c'est-à-dire l'écart entre une somme partielle quelconque et la plus proche somme partielle « de fin de paquet ». Dans l'exemple de la question 2, $\varepsilon_p = 2$ pour tout p.

4. On note x_n, pour $n \geqslant 0$, le terme d'indice n : $x_n = \dfrac{c_n}{\sqrt{n+1}}$, où c_n vaut a, b ou c selon que le reste de n modulo 3 vaut 0, 1 ou 2. On regroupe par paquets de trois, avec $\varphi(p) = 3p$:

$$S_p = \frac{a}{\sqrt{3p+1}} + \frac{b}{\sqrt{3p+2}} + \frac{c}{\sqrt{3p+3}}, \qquad \varepsilon_p \leqslant \frac{|a|+|b|+|c|}{\sqrt{3p+1}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0.$$

Par les questions 1 et 3, la série $\sum x_n$ converge si et seulement si $\sum S_p$ converge. Pour $j \in \{1,2,3\}$, le développement $(1+x)^{-1/2} = 1 - \dfrac{x}{2} + O(x^2)$ donne

$$\frac{1}{\sqrt{3p+j}} = \frac{1}{\sqrt{3p}}\Big(1 + \frac{j}{3p}\Big)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{3p}} - \frac{j}{2(3p)^{3/2}} + O\Big(\frac{1}{p^{5/2}}\Big),$$

$$S_p = \frac{a+b+c}{\sqrt{3p}} - \frac{a+2b+3c}{2(3p)^{3/2}} + O\Big(\frac{1}{p^{5/2}}\Big).$$

Si $a+b+c \neq 0$, alors $S_p \sim \dfrac{a+b+c}{\sqrt{3p}}$, de signe constant, et $\sum S_p$ diverge (théorèmes 4 et 5). Si $a+b+c = 0$, alors $S_p = O(\dfrac{1}{p^{3/2}})$, et $\sum S_p$ converge par la proposition 9, puisque $\dfrac{3}{2} > 1$.

$\dfrac{a}{\sqrt{1}} + \dfrac{b}{\sqrt{2}} + \dfrac{c}{\sqrt{3}} + \dfrac{a}{\sqrt{4}} + \cdots$ converge $\iff a+b+c = 0$

Par exemple, avec $a = b = 1$ et $c = -2$, la série $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{2}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$ converge, alors que ses termes positifs, pris seuls, forment une série divergente : la compensation se fait à l'intérieur de chaque paquet.

Piège. La question 3 est indispensable : la question 1 ne dit rien dans le sens « $\sum S_p$ converge $\Rightarrow$ $\sum x_n$ converge ». L'erreur la plus répandue est de regrouper les termes sans vérifier que les paquets ont une taille bornée et des termes qui tendent vers 0 ; ici, chaque paquet compte trois termes, et c'est ce qui donne $\varepsilon_p \to 0$.

EXERCICE 7 ⋆

On note u_n le terme général. Sauf mention contraire, il est positif, et l'on applique la méthode du cours : limite du terme général, puis équivalent ou comparaison avec une série de Riemann ou géométrique (théorèmes 3, 4, 5 et 1).

(a) On a $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}\ln 2}$, et $n^2 u_n = (\sqrt{n})^4 \mathrm{e}^{-(\ln 2)\sqrt{n}}$ tend vers 0 par croissances comparées (chapitre 10, proposition 2), puisque $\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$. Donc $u_n = o(\frac{1}{n^2})$.

$$\boxed{\sum \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}} \text{ converge}}$$

(b) Comme $\frac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 et que $\ln(1+x) \sim x$ en 0, on a $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$.

$$\boxed{\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ diverge}}$$

(c) Comme $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ en 0, on a $u_n \sim \frac{\pi^2}{2n^2}$.

$$\boxed{\sum \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right) \text{ converge}}$$

(d) Si $a = 0$, le terme général est nul pour $n \geqslant 1$ et la série converge. Si $a \neq 0$, les croissances comparées (chapitre 7, théorème 7), avec $q = \frac{1}{|a|}$, donnent $\frac{q^n}{n!} \to 0$, donc $|u_n| = \frac{n!}{q^n} \to +\infty$: divergence grossière, quel que soit le signe de a.

$$\boxed{\sum a^n\, n! \text{ converge} \iff a = 0}$$

(e) Pour $n \geqslant 1$, $u_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n^2+n-1}\right) \sim \frac{2}{n^2+n-1} \sim \frac{2}{n^2}$, puisque $\frac{2}{n^2+n-1}$ tend vers 0.

$$\boxed{\sum \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) \text{ converge}}$$

(f) On a $\ln(\mathrm{e}^n - 1) = n + \ln(1 - \mathrm{e}^{-n}) \sim n$, donc $u_n \sim \frac{\ln n}{n}$, et $\frac{\ln n}{n} \geqslant \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 3$.

$$\boxed{\sum \frac{\ln n}{\ln(\mathrm{e}^n - 1)} \text{ diverge}}$$

(g) Comme $\operatorname{ch} x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$ en 0, on a $\operatorname{ch}\frac{1}{n} - 1 \sim \frac{1}{2n^2}$, et, par passage à la puissance $\frac{1}{2}$ (chapitre 10, théorème 1), $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{2}\,n}$.

$$\boxed{\sum \sqrt{\operatorname{ch}\frac{1}{n} - 1} \text{ diverge}}$$

(h) On passe à la forme exponentielle, et l'on développe $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ à l'ordre 3 :

$$\ln u_n = -n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -n + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Par continuité de l'exponentielle, $u_n \mathrm{e}^n = \mathrm{e}^{1/2+O(1/n)}$ tend vers $\sqrt{\mathrm{e}}$, donc $u_n \sim \sqrt{\mathrm{e}}\,\mathrm{e}^{-n}$, terme d'une série géométrique de raison $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < 1$.

$$\boxed{\sum \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n^2} \text{ converge}}$$

Piège. L'erreur la plus répandue est de dire que $\dfrac{n}{n+1}$ tend vers 1, donc que u_n tend vers 1 : c'est une forme indéterminée 1^∞, et l'ordre 2 du développement est nécessaire. L'ordre 1 donnerait seulement $\ln u_n = -n + O(1)$, ce qui suffit d'ailleurs pour la nature, mais pas pour l'équivalent.

(i) Pour $n \geqslant 1$, on a $0 < n \sin\dfrac{1}{n} < 1$, et le développement $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + O(x^5)$ donne

$$n \sin\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{6n^2} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big), \qquad \text{d'où}$$

$$\ln u_n = n^\alpha \ln\Big(n \sin\frac{1}{n}\Big) = -\frac{n^{\alpha-2}}{6} + O(n^{\alpha-4}) = -\frac{n^{\alpha-2}}{6}(1+o(1)).$$

Si $\alpha < 2$, $\ln u_n$ tend vers 0 et u_n vers 1 ; si $\alpha = 2$, u_n tend vers $\mathrm{e}^{-1/6}$: dans les deux cas, la série diverge grossièrement. Si $\alpha > 2$, on pose $\beta = \alpha - 2 > 0$; à partir d'un certain rang, $\ln u_n \leqslant -\dfrac{n^\beta}{12}$, donc

$$0 \leqslant n^2 u_n \leqslant n^2 \mathrm{e}^{-n^\beta/12} = \big(n^\beta\big)^{2/\beta} \mathrm{e}^{-n^\beta/12} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

par croissances comparées, et $u_n = o(\dfrac{1}{n^2})$.

$$\boxed{\sum \Big(n \sin\frac{1}{n}\Big)^{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 2}$$

(j) On met n en facteur dans chaque racine et l'on développe à l'ordre 2 en $\dfrac{1}{n^2}$:

$$u_n = n\Big(1 + \frac{a}{n^2}\Big)^{1/3} - n\Big(1 + \frac{3}{n^2}\Big)^{1/2} = \Big(\frac{a}{3} - \frac{3}{2}\Big)\frac{1}{n} + \Big(\frac{9}{8} - \frac{a^2}{9}\Big)\frac{1}{n^3} + O\Big(\frac{1}{n^5}\Big).$$

Si $a \neq \dfrac{9}{2}$, $u_n \sim (\dfrac{a}{3} - \dfrac{3}{2})\dfrac{1}{n}$, de signe constant : la série diverge (théorème 4, appliqué à u_n ou à $-u_n$).
Si $a = \dfrac{9}{2}$, $u_n \sim -\dfrac{9}{8n^3}$, de signe constant, et la série converge.

$$\boxed{\sum \Big(\sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2+3}\Big) \text{ converge } \iff a = \frac{9}{2}}$$

Le terme général n'est pas positif ici, mais il est de signe constant à partir d'un certain rang, ce qui suffit pour le théorème 4.

(k) Par le développement de l'exponentielle à l'ordre 2,

$$u_n = \mathrm{e}^{1/n} - a - \frac{b}{n} = (1-a) + \frac{1-b}{n} + \frac{1}{2n^2} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big).$$

Si $a \neq 1$, u_n tend vers $1 - a \neq 0$: divergence grossière. Si $a = 1$ et $b \neq 1$, $u_n \sim \dfrac{1-b}{n}$, de signe constant : divergence. Si $a = b = 1$, $u_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$: convergence.

$$\boxed{\sum \Big(\mathrm{e}^{1/n} - a - \frac{b}{n}\Big) \text{ converge } \iff a = b = 1}$$

(l) Le terme n'est défini que pour $n \geqslant 2$, puisque $(n-1)^{1-1/n}$ vaudrait 0^0 en $n=1$; on étudie la série à partir de $n=2$. Comme $\dfrac{\ln(n\pm1)}{n}$ tend vers 0, le développement $\mathrm{e}^x = 1+x+O(x^2)$ donne

$$(n+1)^{1+1/n} = (n+1)\,\mathrm{e}^{\ln(n+1)/n} = (n+1)\Big(1+\frac{\ln(n+1)}{n}+O\Big(\frac{\ln^2 n}{n^2}\Big)\Big) = n+1+\ln(n+1)+O\Big(\frac{\ln^2 n}{n}\Big),$$

et de même $(n-1)^{1-1/n} = n-1-\ln(n-1)+O(\dfrac{\ln^2 n}{n})$. Comme $\ln(n\pm1) = \ln n + o(1)$, le numérateur vaut $2\ln n + 2 + o(1) \sim 2\ln n$, et

$$u_n \sim \frac{2\ln n}{n^a}.$$

Si $a>1$, on choisit $\rho = \dfrac{1+a}{2} \in]1\,,a[$: $n^\rho \cdot \dfrac{2\ln n}{n^a} = \dfrac{2\ln n}{n^{(a-1)/2}} \to 0$ par croissances comparées, et la série converge. Si $a \leqslant 1$, $\dfrac{2\ln n}{n^a} \geqslant \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 3$, et la série diverge.

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 2} \frac{(n+1)^{1+1/n}-(n-1)^{1-1/n}}{n^a} \text{ converge } \iff a>1}$$

Le contrôle numérique est lent : le numérateur divisé par $2\ln n$ vaut 1,14 pour $n=10^3$ et 1,036 pour $n=10^{12}$, ce qu'explique la constante 2 négligée devant $2\ln n$.

EXERCICE 8 ⋆

La série est à termes positifs. Pour $N \geqslant 1$, on sépare dans S_N les indices qui sont des carrés, $n=k^2$ avec $k \leqslant \sqrt{N}$, des autres :

$$S_N = \sum_{\substack{k\geqslant 1\\ k^2\leqslant N}} \frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{n\leqslant N\\ n \text{ non carré}}} \frac{1}{n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \leqslant 2\cdot\frac{\pi^2}{6}.$$

Les sommes partielles sont majorées : la série converge (proposition 5).

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge}}$$

On a $nu_n = 1$ lorsque n est un carré, et $nu_n = \dfrac{1}{n}$ sinon. La suite extraite $\big(k^2 u_{k^2}\big)_{k\geqslant 1}$ est constante égale à 1 : la suite (nu_n) ne tend pas vers 0 (chapitre 7, proposition 11 (i)).

$$\boxed{(nu_n) \text{ ne tend pas vers } 0 : \text{ elle vaut 1 aux carrés et } \tfrac{1}{n} \text{ ailleurs}}$$

On peut même calculer la somme. Les indices non carrés s'obtiennent en retirant les carrés, d'où $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} - \sum_{k^2\leqslant N} \frac{1}{k^4} + \sum_{k^2\leqslant N} \frac{1}{k^2}$, et, par passage à la limite, avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$, valeur citée dans le cours après la proposition 8,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^4}{90} + \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^4}{90} \approx 2{,}2075}$$

À retenir. Pour une série convergente, u_n tend vers 0, mais rien n'oblige u_n à être petit devant $\dfrac{1}{n}$: la méthode du cours (« si $nu_n \to +\infty$, la série diverge ») n'a pas de réciproque. Les rares termes de taille $\dfrac{1}{n}$ sont trop espacés pour faire diverger la série. L'exercice 18 montrera que, pour une suite *décroissante*, la convergence force au contraire $nu_n \to 0$.

EXERCICE 9 ⋆

1. La série $\sum u_n$ converge, donc u_n tend vers 0 (proposition 2) : à partir d'un certain rang, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. Pour un réel $x \in [0\,,1]$ et $\alpha > 1$, on a $x^\alpha = x \cdot x^{\alpha-1} \leqslant x$. Ainsi $0 \leqslant u_n^\alpha \leqslant u_n$ à partir d'un certain rang, et le théorème 3 conclut.

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge } \Longrightarrow \sum u_n^\alpha \text{ converge pour tout } \alpha > 1}$$

2. Soit $\alpha \in]0\,,1[$. Pour $x \in [0\,,1]$, on a cette fois $x^\alpha \geqslant x$, et pour $x > 1$, $x^\alpha > 1$. On distingue deux cas.

— Si $u_n \leqslant 1$ à partir d'un certain rang, alors $u_n^\alpha \geqslant u_n \geqslant 0$ à partir de ce rang, et $\sum u_n^\alpha$ diverge par le théorème 3 (ii).

— Sinon, $u_n > 1$ pour une infinité d'indices n, et pour ceux-là $u_n^\alpha > 1$: la suite (u_n^α) ne tend pas vers 0, et la série diverge grossièrement.

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge } \Longrightarrow \sum u_n^\alpha \text{ diverge pour tout } \alpha \in]0\,,1[}$$

Piège. L'erreur la plus répandue est de reprendre l'argument de la question 1 en affirmant que u_n tend vers 0 : une série divergente n'a aucune raison d'avoir un terme général de limite nulle. Le second cas est indispensable. Le résultat est faux pour $\alpha > 1$: avec $u_n = \dfrac{1}{n}$, la série diverge et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge.

3. Notons $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$; on a $0 \leqslant v_n \leqslant u_n$ et $0 \leqslant v_n < 1$. Si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ converge par le théorème 3. Réciproquement, si $\sum v_n$ converge, alors v_n tend vers 0, donc $v_n \leqslant \dfrac{1}{2}$ à partir d'un certain rang ; comme $u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n}$, on obtient $0 \leqslant u_n \leqslant 2v_n$ à partir de ce rang, et $\sum u_n$ converge.

$$\boxed{\sum u_n \text{ et } \sum \frac{u_n}{1+u_n} \text{ sont de même nature}}$$

On peut aussi raisonner par équivalents, mais il faut alors traiter à part le cas où u_n ne tend pas vers 0 ; la relation $u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n}$ évite cette distinction. Les deux séries sont de même nature, mais leurs sommes diffèrent : pour $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, on trouve $v_n = \dfrac{1}{n^2+n+1}$.

EXERCICE 10 ⋆

Première somme. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est continue, positive et décroissante sur $[1\,,+\infty[$. Pour $n \geqslant 1$ et $k \in [\![n+1\,;2n]\!]$, la proposition 6 (i) donne $\displaystyle\int_k^{k+1} f \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f$, et, en sommant par la relation de Chasles,

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_n^{2n} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}.$$

La primitive usuelle $2\sqrt{t}$ donne les deux bornes : $2\big(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+1}\big)$ et $2\big(\sqrt{2n}-\sqrt{n}\big) = 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$. La borne de gauche vaut

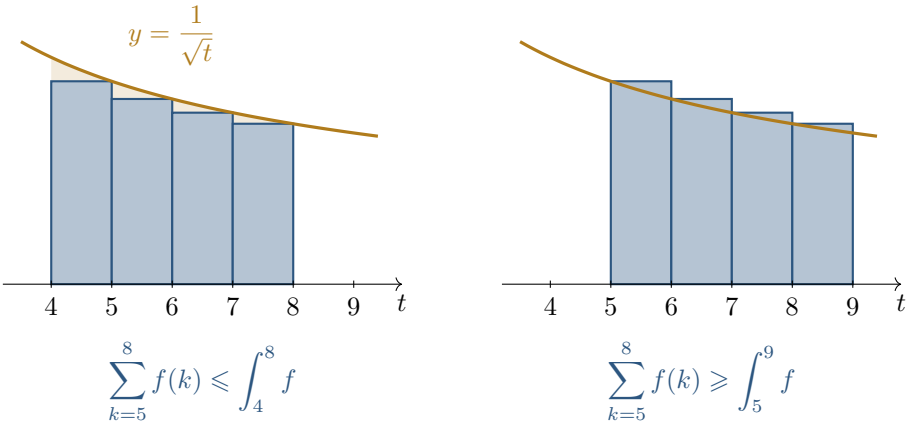
$$2\sqrt{n}\Big(\sqrt{2+\tfrac{1}{n}} - \sqrt{1+\tfrac{1}{n}}\Big) \sim 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n},$$

et l'encadrement conclut (chapitre 10, proposition 6).

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n} \approx 0{,}828\sqrt{n}}$$

Pour $n = 10^4$, la somme vaut 82,841, pour $2(\sqrt{2}-1) \times 100 \approx 82{,}843$ ✓. Le théorème 5 donne aussi ce résultat, à condition d'écrire les équivalents comme des développements : la somme jusqu'à $2n$

vaut $2\sqrt{2n}+o(\sqrt{n})$, celle jusqu'à n vaut $2\sqrt{n}+o(\sqrt{n})$, et leur différence vaut $2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}+o(\sqrt{n})$. Soustraire directement les équivalents n'aurait pas de sens : l'erreur la plus répandue est d'écrire « $\sim 2\sqrt{2n}-2\sqrt{n}$ » sans contrôler les restes, ce qui tombe juste ici seulement parce que $2\sqrt{2}-2\neq 0$.



Pour $n=4$, les quatre rectangles bleus ont pour hauteurs $f(5)$, …, $f(8)$ et pour aire totale 1,587. Posés à gauche de chaque entier, ils sont sous la courbe et leur aire est inférieure à $\displaystyle\int_4^8 f \approx 1{,}657$; posés à droite, ils la débordent et leur aire dépasse $\displaystyle\int_5^9 f \approx 1{,}528$. Les deux bornes diffèrent de $\displaystyle\int_4^5 f - \int_8^9 f \leqslant f(4)$, et en général d'au plus $f(n)$, quantité négligeable devant $\sqrt{n}$.

Seconde somme. La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ est continue et positive sur $[2\,,+\infty[$, et décroissante, comme inverse de la fonction croissante et positive $t\mapsto t\ln t$. Elle admet la primitive $t\mapsto \ln(\ln t)$, de la forme $\ln\circ u$ avec $u=\ln$, puisque $g=\dfrac{u'}{u}$. La proposition 6 (ii), avec $n_0=2$, donne

$$\ln\ln(n+1)-\ln\ln 2 \leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k} \leqslant \frac{1}{2\ln 2}+\ln\ln n-\ln\ln 2.$$

La borne de droite est équivalente à $\ln\ln n$, qui tend vers $+\infty$. Pour la borne de gauche, on a $\ln(n+1)\sim\ln n$, donc

$$\ln\ln(n+1)=\ln\ln n+\ln\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=\ln\ln n+o(1)\sim\ln\ln n.$$

L'encadrement conclut.

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}\sim\ln(\ln n)}$$

La convergence de ce rapport est très lente : il vaut 1,36 pour $n=10^4$ et 1,30 pour $n=10^6$, parce que la différence entre la somme et $\ln\ln n$ converge, vers 0,7947 environ (proposition 6 (iii)), et que $\ln\ln n$ ne vaut que 2,63 pour $n=10^6$.

À retenir. La comparaison avec une intégrale donne des équivalents de sommes partielles quand les théorèmes de comparaison ne donnent que la nature. Le second exemple confirme celui du cours (section 20.3.3) : la série $\displaystyle\sum\frac{1}{n\ln n}$ diverge, mais à la vitesse de $\ln\ln n$, beaucoup plus lentement que la série harmonique.

EXERCICE 11 ⋆⋆

(a) *Première série.* Pour $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \mathrm{e}^{-\ln n \cdot \ln\ln n} = \dfrac{1}{n^{\ln\ln n}}$. Dès que $\ln\ln n \geqslant 2$, c'est-à-dire $n \geqslant \mathrm{e}^{\mathrm{e}^2} \approx 1618{,}2$, ce terme est majoré par $\dfrac{1}{n^2}$, et le théorème 3 conclut.

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \text{ converge}}$$

Deuxième série. Pour $n \geqslant 2$, l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ (chapitre 5), appliquée au réel $x = -\dfrac{1}{\sqrt{n}} > -1$, donne

$$0 \leqslant \Big(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1-1/\sqrt{n})} \leqslant \mathrm{e}^{-n/\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}},$$

et $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} = o(\dfrac{1}{n^2})$, comme à l'exercice 7 (a).

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \Big(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^n \text{ converge}}$$

Un développement donnerait plus précisément $(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}})^n \sim \mathrm{e}^{-1/2}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$, mais la majoration suffit pour la nature.

Troisième série. Pour $n \geqslant 0$, $1 - \operatorname{th} n = \dfrac{(\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}) - (\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}} = \dfrac{2\mathrm{e}^{-2n}}{1+\mathrm{e}^{-2n}}$, compris entre 0 et $2\mathrm{e}^{-2n}$, terme d'une série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-2} < 1$.

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 0} (1 - \operatorname{th} n) \text{ converge}}$$

(b) Le terme général s'écrit $\dfrac{n^\lambda + \ln n}{n^2} = \dfrac{1}{n^{2-\lambda}} + \dfrac{\ln n}{n^2}$, somme de deux termes positifs. La série $\sum \dfrac{\ln n}{n^2}$ converge, puisque $n^{3/2} \cdot \dfrac{\ln n}{n^2} = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} \to 0$. La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{2-\lambda}}$ converge si et seulement si $2 - \lambda > 1$. Par la proposition 1 (i) et (ii) :

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^\lambda + \ln n}{n^2} \text{ converge } \iff \lambda < 1}$$

Pour $\lambda = 1$, le terme est équivalent à $\dfrac{1}{n}$; le logarithme, qui domine n^λ lorsque $\lambda \leqslant 0$, n'intervient jamais dans la nature.

(c) On note u_n le terme général, positif, et l'on compare b^n et $2^{\sqrt{n}}$ au dénominateur.

— Si $b \leqslant 1$, alors $b^n \leqslant 1 \leqslant 2^{\sqrt{n}}$, donc $2^{\sqrt{n}} \leqslant b^n + 2^{\sqrt{n}} \leqslant 2 \cdot 2^{\sqrt{n}}$, et $\dfrac{a^n}{2} \leqslant u_n \leqslant a^n$. La série converge si $a < 1$ (série géométrique), et diverge grossièrement si $a \geqslant 1$, puisqu'alors $u_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

— Si $b > 1$, alors $\dfrac{b^n}{2^{\sqrt{n}}} = \mathrm{e}^{n\ln b - \sqrt{n}\ln 2}$ tend vers $+\infty$, puisque $n\ln b - \sqrt{n}\ln 2 = n(\ln b - \dfrac{\ln 2}{\sqrt{n}})$. Donc $b^n + 2^{\sqrt{n}} \sim b^n$ et $u_n \sim (\dfrac{a}{b})^n 2^{\sqrt{n}}$. Si $a \geqslant b$, ce terme est au moins $2^{\sqrt{n}}$ et la série diverge grossièrement. Si $a < b$, on choisit $q \in \left]\dfrac{a}{b}, 1\right[$; alors $(\dfrac{a}{b})^n 2^{\sqrt{n}} = q^n \cdot \mathrm{e}^{n\ln\frac{a}{bq} + \sqrt{n}\ln 2}$, et l'exposant tend vers $-\infty$ puisque $\ln\dfrac{a}{bq} < 0$: le terme est $o(q^n)$, et la série converge.

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 0}\frac{a^n\,2^{\sqrt{n}}}{b^n+2^{\sqrt{n}}}\text{ converge }\iff a<\max(1,b)}$$

Le facteur $2^{\sqrt{n}}$, qui tend vers $+\infty$, ne pèse rien devant une exponentielle q^n : la réponse est la même que pour la série plus simple $\sum\dfrac{a^n}{b^n+1}$, que l'on traite par les mêmes encadrements.

(d) On met n en facteur dans chaque racine, et l'on développe $(1+x)^{1/3}$ et $(1+x)^{1/2}$ à l'ordre 3 (chapitre 10, théorème 5), où x est d'ordre $\dfrac{1}{n}$. Le calcul donne

$$u_n=\Big(\frac{a}{3}-\frac{1}{2}\Big)+\Big(\frac{b}{3}-\frac{a^2}{9}-\frac{3}{8}\Big)\frac{1}{n}+\Big(\frac{c}{3}-\frac{2ab}{9}+\frac{5a^3}{81}+\frac{3}{16}\Big)\frac{1}{n^2}+O\Big(\frac{1}{n^3}\Big).$$

Si $a\neq\dfrac{3}{2}$, u_n a une limite non nulle : divergence grossière. Si $a=\dfrac{3}{2}$, le coefficient de $\dfrac{1}{n}$ vaut $\dfrac{b}{3}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{8}=\dfrac{b}{3}-\dfrac{5}{8}$; s'il est non nul, u_n lui est équivalent à un facteur $\dfrac{1}{n}$ près, de signe constant, et la série diverge. Si $a=\dfrac{3}{2}$ et $b=\dfrac{15}{8}$, le coefficient de $\dfrac{1}{n^2}$ se réduit à $\dfrac{c}{3}-\dfrac{11}{48}$, et $u_n=O(\dfrac{1}{n^2})$: la série converge (proposition 9).

$$\boxed{\sum\Big(\sqrt[3]{n^3+an^2+bn+c}-\sqrt{n^2+n+1}\Big)\text{ converge }\iff a=\frac{3}{2}\text{ et }b=\frac{15}{8},\ c\text{ quelconque}}$$

Il est inutile de discuter le signe du coefficient de $\dfrac{1}{n^2}$, qui s'annule pour $c=\dfrac{11}{16}$: la domination par $\dfrac{1}{n^2}$ suffit, quel que soit c.

(e) On pose $h_n=\dfrac{1}{n^\alpha}$, qui tend vers 0. La fonction Arccos est dérivable en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, de dérivée $-\dfrac{1}{\sqrt{1-1/2}}=-\sqrt{2}$, et $\operatorname{Arccos}\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\pi}{4}$. Le développement limité à l'ordre 1 (chapitre 10) donne

$$\operatorname{Arccos}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}+h_n\Big)-\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}\,h_n+o(h_n)\sim-\frac{\sqrt{2}}{n^\alpha}.$$

Le terme général est négatif, puisque Arccos est décroissante : son opposé est positif et équivalent à $\dfrac{\sqrt{2}}{n^\alpha}$.

$$\boxed{\sum\Big(\operatorname{Arccos}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{n^\alpha}\Big)-\frac{\pi}{4}\Big)\text{ converge }\iff\alpha>1}$$

La condition de définition $n^\alpha\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=2+\sqrt{2}$ ne porte que sur un nombre fini de termes, et ne modifie pas la nature.

EXERCICE 12 ⋆⋆

(a) Le terme u_n est positif. Par le théorème 5, $H_n\sim\ln n$, et par la remarque qui suit la proposition 6, $\ln(n!)\sim n\ln n$. Le quotient d'équivalents (chapitre 10, théorème 1) donne $u_n\sim\dfrac{\ln n}{n\ln n}=\dfrac{1}{n}$.

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 2}\frac{H_n}{\ln(n!)}\text{ diverge}}$$

(b) Pour $x\in[0\,,\dfrac{\pi}{n}]\subset[0\,,\pi]$, on a $\sin x\geqslant 0$, et $\sin x\leqslant x$ (chapitre 4) ; comme $1+x\geqslant 1$,

$$0\leqslant\frac{\sin^3 x}{1+x}\leqslant x^3,\qquad\text{donc}\qquad 0\leqslant v_n\leqslant\int_0^{\pi/n}x^3\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^4}{4n^4}$$

par croissance de l'intégrale (chapitre 18, théorème 3) et primitive usuelle. Le théorème 3 conclut.

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} v_n \text{ converge}}$$

On n'a pas besoin de calculer l'intégrale : la majorer suffit. Elle est d'ailleurs équivalente à son majorant. En effet, sur $[0\,,\frac{\pi}{n}]$, l'encadrement $\sin x \geqslant x - \dfrac{x^3}{6}$ (chapitre 5) donne $\sin x \geqslant x(1-\dfrac{\pi^2}{6n^2}) \geqslant 0$ pour $n \geqslant 2$, et $\dfrac{1}{1+x} \geqslant \dfrac{1}{1+\pi/n}$, d'où

$$\frac{(1-\frac{\pi^2}{6n^2})^3}{1+\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{\pi^4}{4n^4} \leqslant v_n \leqslant \frac{\pi^4}{4n^4}, \qquad \text{donc} \qquad v_n \sim \frac{\pi^4}{4n^4}.$$

Numériquement, $v_{1000}\big/\dfrac{\pi^4}{4\cdot 10^{12}} \approx 0{,}9975$ ✓.

(c) On a $w_n = \mathrm{e}^{H_n \ln a}$, et la proposition 7 donne $H_n \ln a = \ln a \cdot \ln n + \gamma \ln a + o(1)$, donc

$$w_n = n^{\ln a}\, \mathrm{e}^{\gamma \ln a}\, \mathrm{e}^{o(1)} \sim \frac{a^\gamma}{n^{-\ln a}},$$

puisque $\mathrm{e}^{o(1)}$ tend vers 1. La série de Riemann d'exposant $-\ln a$ converge si et seulement si $-\ln a > 1$, c'est-à-dire $a < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} a^{H_n} \text{ converge} \iff a < \frac{1}{\mathrm{e}}}$$

Piège. L'erreur la plus répandue est d'écrire $a^{H_n} \sim a^{\ln n}$ à partir de $H_n \sim \ln n$: on ne compose pas un équivalent par l'exponentielle. Le rapport $\dfrac{a^{H_n}}{a^{\ln n}} = a^{H_n - \ln n}$ tend vers a^γ, et non vers 1 ; la nature n'en est pas changée ici, mais il faut le développement $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$, c'est-à-dire une erreur $o(1)$ dans l'exposant, pour pouvoir conclure.

EXERCICE 13 ⋆⋆

On note $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, positif pour $n \geqslant 2$.

1. Supposons $\alpha > 1$ et posons $\rho = \dfrac{1+\alpha}{2} \in]1\,,\alpha[$. Alors

$$n^\rho u_n = \frac{(\ln n)^{-\beta}}{n^{(\alpha-1)/2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 :$$

si $\beta \geqslant 0$, le numérateur est majoré par 1 pour $n \geqslant 3$; si $\beta < 0$, c'est la croissance comparée $(\ln n)^{|\beta|} = o(n^{(\alpha-1)/2})$ (chapitre 10, proposition 2). Ainsi $u_n = o(\dfrac{1}{n^\rho})$ avec $\rho > 1$, et la série converge (théorème 3 (iii)).

Supposons $\alpha < 1$. Alors $nu_n = \dfrac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta}$ tend vers $+\infty$, pour la même raison : si $\beta \leqslant 0$, $nu_n \geqslant n^{1-\alpha}$ pour $n \geqslant 3$, et si $\beta > 0$, $(\ln n)^\beta = o(n^{1-\alpha})$. Donc $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$ à partir d'un certain rang, et la série diverge.

$$\boxed{\alpha > 1 : \text{ convergence;} \qquad \alpha < 1 : \text{ divergence, quel que soit } \beta}$$

Le logarithme ne pèse rien devant une puissance de n : pour $\alpha \neq 1$, on « vole » une petite puissance $n^{(\alpha-1)/2}$ pour l'absorber.

2. Supposons $\alpha = 1$. Si $\beta \leqslant 0$, alors $u_n = \dfrac{(\ln n)^{-\beta}}{n} \geqslant \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 3$: la série diverge. Si $\beta > 0$, la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}$ est continue, positive, et décroissante sur $[2\,,+\infty[$, comme inverse de la fonction croissante et positive $t \mapsto t(\ln t)^\beta$. On reconnaît $f = u'u^{-\beta}$ avec $u = \ln$, d'où une primitive :

$$\int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta} = \frac{(\ln n)^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta}}{1-\beta} \quad \text{si } \beta \neq 1, \qquad \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = \ln\ln n - \ln\ln 2.$$

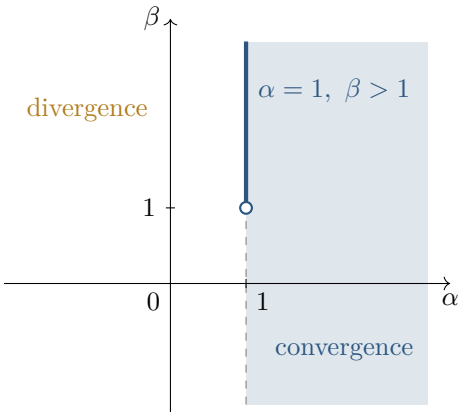
Cette suite est majorée (par $\dfrac{(\ln 2)^{1-\beta}}{\beta - 1}$) si $\beta > 1$, et tend vers $+\infty$ si $0 < \beta \leqslant 1$. La proposition 6 (iii) conclut.

$$\boxed{\alpha = 1 : \quad \sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \text{ converge } \iff \beta > 1}$$

On contrôle la primitive par dérivation : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{(\ln t)^{1-\beta}}{1-\beta} = \dfrac{1}{t}(\ln t)^{-\beta}$ ✓.

3. En résumé, la série converge si et seulement si $\alpha > 1$, ou bien $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge } \iff \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)}$$



Le domaine de convergence, en bleu, est le demi-plan ouvert $\alpha > 1$, auquel s'ajoute la demi-droite épaisse $\{1\} \times]1\,,+\infty[$, sans son origine $(1,1)$, marquée d'un cercle vide. Sur la droite $\alpha = 1$, frontière entre les deux comportements, c'est l'exposant du logarithme qui décide, avec le même seuil 1 que pour les séries de Riemann.

À retenir. Les séries de Bertrand affinent l'échelle des séries de Riemann exactement là où celle-ci ne décide pas. Le cas $\beta = 1$ est la série $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$ de l'exemple du cours (section 20.3.3) et de l'exercice 10 ; l'exercice 19 retrouvera les séries de Riemann par une autre méthode, la condensation, et prolongera l'échelle d'un cran avec un facteur $(\ln\ln n)^\alpha$.

EXERCICE 14 ⋆⋆

Soit $s > 1$. La fonction $f : t \mapsto t^{-s}$ est continue, positive et décroissante sur $[1\,,+\infty[$, de primitive $t \mapsto \dfrac{t^{1-s}}{1-s}$, et $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^s} = \frac{1 - x^{1-s}}{s-1}$ pour $x \geqslant 1$. La proposition 6 (ii), avec $n_0 = 1$, donne pour tout $n \geqslant 1$

$$\frac{1-(n+1)^{1-s}}{s-1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} \leqslant 1 + \frac{1-n^{1-s}}{s-1}.$$

Comme $1 - s < 0$, les termes $(n+1)^{1-s}$ et n^{1-s} tendent vers 0, et le passage à la limite dans les inégalités larges (chapitre 7, théorème 5) donne

$$\boxed{\frac{1}{s-1} \leqslant \zeta(s) \leqslant 1 + \frac{1}{s-1}, \qquad \text{soit} \qquad 1 \leqslant (s-1)\,\zeta(s) \leqslant s}$$

Le théorème d'encadrement pour les limites de fonctions (chapitre 8, théorème 5), quand s tend vers 1 par valeurs supérieures, conclut.

$$\boxed{\lim_{s\to 1^+}(s-1)\,\zeta(s)=1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \zeta(s)\underset{s\to 1^+}{\sim}\frac{1}{s-1}}$$

En particulier, $\zeta(s)$ tend vers $+\infty$ quand s tend vers 1 par valeurs supérieures : la fonction ζ, définie sur $]1\,,+\infty[$, « garde le souvenir » de la divergence de la série harmonique, qui correspond à $s=1$. Pour $s=1{,}01$, on a $\zeta(s)\approx 100{,}578$ et $(s-1)\zeta(s)\approx 1{,}0058$ ✓.
Pour aller plus loin. L'encadrement montre que $\zeta(s)-\dfrac{1}{s-1}$ reste compris entre 0 et 1. Numériquement, cette différence vaut 0,5844 pour $s=1{,}1$ et 0,5779 pour $s=1{,}01$: elle tend vers la constante d'Euler $\gamma\approx 0{,}5772$, comme $H_n-\ln n$ dans la proposition 7. Nous ne le démontrerons pas ici.

EXERCICE 15 ⋆⋆

Notons $N=10^9$ et $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{2/3}}$. La fonction $f:t\mapsto t^{-2/3}$ est continue, positive et strictement décroissante sur $[1\,,+\infty[$, de primitive $t\mapsto 3t^{1/3}$. La proposition 6 (ii), avec $n_0=1$, donne

$$3\big((N+1)^{1/3}-1\big)\leqslant S\leqslant 1+3\big(N^{1/3}-1\big).$$

Or $N^{1/3}=10^3=1000$, et $(N+1)^{1/3}>1000$. La borne de droite vaut $1+3\times 999=2998$, celle de gauche est strictement supérieure à $3\times 999=2997$. Pour exclure l'égalité $S=2998$, on revient à la proposition 6 (i) : pour $k\geqslant 2$, la fonction $f-f(k)$ est continue, positive sur $[k-1\,,k]$, et non nulle (elle vaut $f(k-1)-f(k)>0$ en $k-1$), donc son intégrale est strictement positive (chapitre 18, théorème 4) : $f(k)<\displaystyle\int_{k-1}^{k}f$. L'inégalité de droite est donc stricte, et

$$2997<S<2998, \qquad \boxed{\Big\lfloor\sum_{n=1}^{10^9}\frac{1}{n^{2/3}}\Big\rfloor=2997}$$

Le choix de $N=10^9$ rend la racine cubique entière : c'est ce qui permet de conclure sans calculatrice. La valeur exacte, obtenue par ordinateur, est $S\approx 2997{,}552$; les deux bornes encadrent S dans un intervalle de longueur voisine de $f(1)=1$, ce qui suffit ici parce que le nombre de bornes entières possibles est réduit à un.
Piège. L'erreur la plus répandue est de ne retenir que l'équivalent $S\sim 3N^{1/3}=3000$ du théorème 5 : un équivalent ne donne aucune information sur la partie entière, puisqu'il autorise une erreur $o(N^{1/3})$, éventuellement très grande. Il faut un *encadrement* à moins de 1 près, et la proposition 6 le fournit.

EXERCICE 16 ⋆⋆

1. Le terme général est positif et équivalent à $\dfrac{1}{2n^2}$: la série converge (théorèmes 4 et 5). On décompose en éléments simples (chapitre 13) :

$$\frac{1}{n(2n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{2}{2n+1}.$$

Pour $N\geqslant 1$, la somme des inverses des entiers impairs de 1 à $2N+1$ s'obtient en retirant de H_{2N+1} les inverses des pairs, $\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2j}=\frac{1}{2}H_N$; on en retire encore le terme 1, qui ne figure pas dans la somme :

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{2}{2n+1}=2\Big(H_{2N+1}-\frac{1}{2}H_N-1\Big), \qquad \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(2n+1)}=2H_N-2H_{2N+1}+2.$$

Par la proposition 7, $H_N - H_{2N+1} = \ln N - \ln(2N+1) + o(1) = -\ln\left(2+\dfrac{1}{N}\right) + o(1)$ tend vers $-\ln 2$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = 2 - 2\ln 2 \approx 0{,}6137}$$

Pour $N = 1$, la formule donne $2 - 2(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}) + 2 = \dfrac{1}{3}$, qui est bien le premier terme ✓.

2. Pour $N \geqslant 1$, on calcule la somme partielle d'indice $5N$ en écrivant, pour $5 \mid n$, $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{5}{n}$; les multiples de 5 jusqu'à $5N$ sont les $5k$, $1 \leqslant k \leqslant N$:

$$S_{5N} = \sum_{n=1}^{5N} \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{N} \frac{5}{5k} = H_{5N} - H_N = \ln(5N) - \ln N + o(1) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ln 5,$$

encore par la proposition 7. Pour un entier $n \geqslant 5$ quelconque, on écrit $n = 5N + r$ avec $0 \leqslant r \leqslant 4$ et $N \geqslant 1$; les termes d'indices $5N+1$, …, $5N+r$ ne sont pas multiples de 5, donc

$$0 \leqslant S_n - S_{5N} \leqslant \frac{r}{5N+1} \leqslant \frac{4}{5N},$$

qui tend vers 0 quand n, donc N, tend vers $+\infty$. Ainsi S_n tend vers $\ln 5$.

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge, et } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln 5}$$

C'est le regroupement par paquets de l'exercice 6 (questions 1 et 3), avec des paquets de cinq termes dont la somme des valeurs absolues tend vers 0. La somme partielle d'indice 5×10^6 vaut 1,6094375, pour $\ln 5 \approx 1{,}6094379$ ✓.

À retenir. Les deux questions reposent sur la même idée : exprimer les sommes partielles à l'aide de H_m pour plusieurs valeurs de m proportionnelles, puis utiliser $H_m = \ln m + \gamma + o(1)$, où la constante γ disparaît dans les différences. La même méthode redonne la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ de la section 20.5, que le cours tirait de la formule de Taylor : la somme partielle d'indice $2N$ vaut $H_{2N} - H_N$. Les signes de $\sum u_n$ ne sont pas constants, et une modification de l'ordre des termes changerait la somme ; c'est le phénomène étudié à la section 20.5.1.

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. Pour deux réels positifs x et y, l'inégalité $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geqslant 0$ donne $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$. Ainsi

$$0 \leqslant \sqrt{a_n a_{n+1}} \leqslant \frac{a_n + a_{n+1}}{2}.$$

Si $\sum a_n$ converge, la série $\sum a_{n+1}$ aussi, puisqu'elle n'en diffère que par le premier terme, et la série de terme général $\dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$ converge par la proposition 1 (i). Le théorème 3 conclut.

$$\boxed{\sum a_n \text{ converge} \implies \sum \sqrt{a_n a_{n+1}} \text{ converge}}$$

2. Si (a_n) est décroissante, alors $a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant 0$, donc $\sqrt{a_n a_{n+1}} \geqslant \sqrt{a_{n+1}^2} = a_{n+1}$. Si $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge, le théorème 3 donne la convergence de $\sum a_{n+1}$, donc de $\sum a_n$.

$$\boxed{(a_n) \text{ décroissante : } \sum \sqrt{a_n a_{n+1}} \text{ converge} \implies \sum a_n \text{ converge}}$$

Sans la décroissance, il suffit qu'un terme sur deux soit nul : avec $a_{2k} = 1$ et $a_{2k+1} = 0$, on a $\sqrt{a_n a_{n+1}} = 0$ pour tout n, alors que $\sum a_n$ diverge grossièrement.

$$\boxed{a_n = \frac{1+(-1)^n}{2} \ :\ \sum \sqrt{a_n a_{n+1}} = \sum 0 \text{ converge},\ \sum a_n \text{ diverge}}$$

L'exemple ne tient pas à la présence de termes nuls : avec $a_{2k} = 1$ et $a_{2k+1} = \dfrac{1}{(k+1)^4}$, tous strictement positifs, on trouve $\sqrt{a_{2k}a_{2k+1}} = \dfrac{1}{(k+1)^2}$ et $\sqrt{a_{2k+1}a_{2k+2}} = \dfrac{1}{(k+1)^2}$, et la série des moyennes géométriques converge encore.

À retenir. La moyenne géométrique de deux termes voisins est contrôlée par le plus petit des deux ; elle ne voit pas un grand terme isolé, à moins que la monotonie n'empêche les termes voisins d'être très différents. C'est le même phénomène qu'à l'exercice 8 : une série peut contenir des termes « anormalement grands », pourvu qu'ils soient rares ou compensés.

EXERCICE 18 ⋆⋆

On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $S = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

1. Soit $n \geqslant 1$. Par décroissance, chacun des n termes $u_{n+1}, \ldots, u_{2n}$ est au moins égal au dernier, u_{2n} :

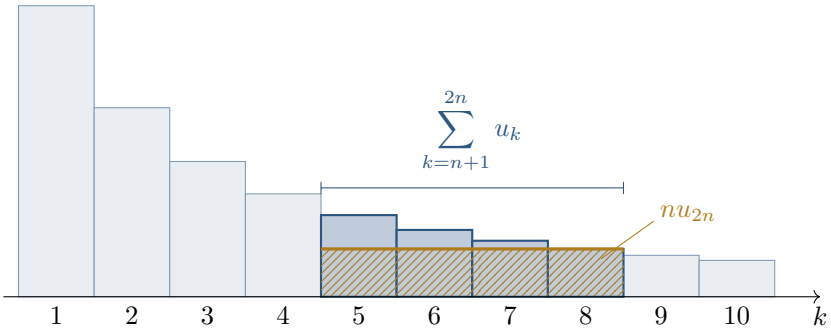
$$0 \leqslant nu_{2n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = S_{2n} - S_n.$$

Comme (S_{2n}) et (S_n) tendent toutes deux vers S (chapitre 7, proposition 11 (i)), le majorant tend vers 0, et la suite $(2nu_{2n})$ aussi. Pour les indices impairs, la décroissance donne

$$0 \leqslant (2n+1)u_{2n+1} \leqslant (2n+1)u_{2n} = \frac{2n+1}{2n} \cdot 2nu_{2n},$$

qui tend aussi vers 0. Les deux suites extraites d'indices pairs et impairs tendent vers 0 (chapitre 7, proposition 11 (ii)).

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = o\Big(\frac{1}{n}\Big)}$$



Pour $n = 4$ et $u_k = \dfrac{10}{(k+2)^{3/2}}$, la barre d'indice k a pour hauteur u_k. Les quatre barres foncées, d'indices 5 à 8, ont une aire totale $S_8 - S_4$ au moins égale à celle du rectangle hachuré, de hauteur u_8 et de largeur 4 : c'est la minoration $nu_{2n} \leqslant S_{2n} - S_n$, qui n'utilise que la décroissance.

2. La suite (u_n) de l'exercice 8 est positive, et la série $\sum u_n$ converge ; mais $nu_n = 1$ lorsque n est un carré, et (nu_n) ne tend pas vers 0. Cette suite n'est pas décroissante : $u_3 = \dfrac{1}{9} < u_4 = \dfrac{1}{4}$.

$$\boxed{\text{Sans décroissance, } \sum u_n \text{ peut converger sans que } nu_n \to 0 \text{ (exercice 8)}}$$

Dans la question 1, c'est la décroissance qui transmet l'information « la somme des termes de $n+1$ à $2n$ est petite » à *chaque* terme ; à l'exercice 8, le terme $u_{k^2} = \dfrac{1}{k^2}$ est seul de sa taille dans son paquet.

3. Les termes $n(u_n - u_{n+1})$ sont positifs, par décroissance. Pour $N \geqslant 1$, on sépare la somme en deux et l'on décale l'indice dans la seconde ($m = n+1$) :

$$\sum_{n=1}^{N} n(u_n - u_{n+1}) = \sum_{n=1}^{N} nu_n - \sum_{m=2}^{N+1} (m-1)u_m = \sum_{n=1}^{N} u_n - Nu_{N+1},$$

puisque, pour $2 \leqslant m \leqslant N$, $mu_m - (m-1)u_m = u_m$, que le terme $n=1$ vaut u_1, et qu'il reste $-Nu_{N+1}$. Par la question 1, $Nu_{N+1} = \dfrac{N}{N+1}(N+1)u_{N+1}$ tend vers 0, donc les sommes partielles tendent vers S.

$$\boxed{\sum n(u_n - u_{n+1}) \text{ converge, et } \sum_{n=1}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n}$$

Pour $u_n = \dfrac{1}{n^2}$, on a $n(u_n - u_{n+1}) = \dfrac{2n+1}{n(n+1)^2}$, et la somme de cette série vaut donc $\dfrac{\pi^2}{6}$, ce que confirme le calcul numérique ✓.

À retenir. Le calcul de la question 3 est une « intégration par parties discrète », appelée transformation d'Abel : il fait passer la différence de u sur le facteur n, au prix d'un terme de bord Nu_{N+1}, et c'est la question 1 qui l'élimine. On voit ainsi que les deux questions ne sont pas indépendantes : sans le résultat $nu_n \to 0$, l'égalité des deux sommes pourrait être fausse. Réciproquement, si (u_n) décroît vers 0 et si $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge, alors $\sum u_n$ converge : par la proposition 4, $u_N = \sum_{n=N}^{+\infty} (u_n - u_{n+1})$, donc $Nu_N \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1})$, reste d'une série convergente, qui tend vers 0 (proposition 3), et l'identité de la question 3 conclut.

EXERCICE 19 ⋆⋆

1. La suite (a_n) décroît vers 0 : ses termes sont positifs, et les deux séries sont à termes positifs. On découpe $\mathbb{N}^*$ en blocs dyadiques $[\![2^p ; 2^{p+1} - 1]\!]$, qui contiennent chacun 2^p entiers. Sur le bloc d'indice p, la décroissance donne $a_{2^{p+1}} \leqslant a_n \leqslant a_{2^p}$, d'où, en sommant les 2^p termes,

$$2^p a_{2^{p+1}} \leqslant \sum_{n=2^p}^{2^{p+1}-1} a_n \leqslant 2^p a_{2^p}.$$

On note $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ et $T_P = \sum_{p=0}^{P} 2^p a_{2^p}$. En sommant ces encadrements pour p allant de 0 à P, la relation de Chasles donne

$$\frac{1}{2}(T_{P+1} - a_1) = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{P} 2^{p+1} a_{2^{p+1}} \leqslant S_{2^{P+1}-1} \leqslant T_P.$$

Si $\sum 2^p a_{2^p}$ converge, ses sommes partielles sont majorées par un réel M (proposition 5). Tout entier N vérifie $N \leqslant 2^{P+1} - 1$ pour un P convenable, et la suite (S_N) est croissante, donc

$$S_N \leqslant S_{2^{P+1}-1} \leqslant T_P \leqslant M ;$$

la série $\sum a_n$ converge par la proposition 5. Réciproquement, si $\sum a_n$ converge, de somme S, l'inégalité de gauche donne $T_{P+1} \leqslant a_1 + 2S$ pour tout P, et $\sum 2^p a_{2^p}$ converge.

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 1} a_n \quad \text{et} \quad \sum_{p \geqslant 0} 2^p a_{2^p} \quad \text{sont de même nature}}$$

Le résultat subsiste si (a_n) n'est décroissante qu'à partir d'un rang n_0 : on ne somme alors les encadrements que pour $2^p \geqslant n_0$, et les termes laissés de côté, en nombre fini, ne changent la nature d'aucune des deux séries. C'est sous cette forme qu'on l'emploie dans la question suivante.

2. *Séries de Riemann.* Si $\alpha \leqslant 0$, le terme $\dfrac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0, et la série diverge grossièrement. Si $\alpha > 0$, la suite $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ décroît vers 0, et la série condensée a pour terme général

$$2^p a_{2^p} = \frac{2^p}{2^{p\alpha}} = (2^{1-\alpha})^p.$$

C'est une série géométrique, convergente si et seulement si $2^{1-\alpha} < 1$, c'est-à-dire $\alpha > 1$ (théorème 1).

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1}$$

On retrouve le théorème 5 sans aucune intégrale : la condensation remplace la comparaison avec $\displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ par une comparaison avec une série géométrique.

La série $\displaystyle\sum \frac{1}{n \ln n \,(\ln\ln n)^\alpha}$. Pour $t \geqslant 3$, on a $\ln\ln t > 0$. Le logarithme du dénominateur est la fonction g définie par

$$g(t) = \ln t + \ln\ln t + \alpha \ln\ln\ln t, \qquad g'(t) = \frac{1}{t}\Big(1 + \frac{1}{\ln t} + \frac{\alpha}{\ln t \,\ln\ln t}\Big),$$

et sa dérivée est strictement positive pour t assez grand, quel que soit le signe de α, puisque la parenthèse tend vers 1. Le terme $a_n = \dfrac{1}{n \ln n \,(\ln\ln n)^\alpha}$ décroît donc à partir d'un certain rang, et il tend vers 0, car $\ln(n \ln n \,(\ln\ln n)^\alpha) = g(n) \sim \ln n$ tend vers $+\infty$. La question 1 s'applique (on attribue à a_1 et a_2 des valeurs positives quelconques). Pour $p \geqslant 2$, on a $\ln 2^p = p \ln 2$ et

$$2^p a_{2^p} = \frac{2^p}{2^p \cdot p \ln 2 \cdot \big(\ln p + \ln\ln 2\big)^\alpha} \sim \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{p\,(\ln p)^\alpha},$$

puisque $\ln p + \ln\ln 2 \sim \ln p$ et que l'on peut élever un équivalent à la puissance α (chapitre 10, théorème 1). Par le théorème 4, la série condensée a la nature de $\displaystyle\sum_{p\geqslant 2} \frac{1}{p\,(\ln p)^\alpha}$, que l'on condense à son tour : son terme est décroissant à partir d'un certain rang (même calcul de dérivée) et tend vers 0, et pour $q \geqslant 1$,

$$2^q \cdot \frac{1}{2^q\,(\ln 2^q)^\alpha} = \frac{1}{(\ln 2)^\alpha} \cdot \frac{1}{q^\alpha},$$

terme d'une série de Riemann, convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n \ln n \,(\ln\ln n)^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1, \qquad \sum_{p\geqslant 2} \frac{1}{p\,(\ln p)^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1}$$

Chaque condensation « enlève un logarithme » : n devient 2^p, $\ln n$ devient $p \ln 2$, $\ln\ln n$ devient $\ln p$ à une constante près. Pour $\alpha = 0$, on retrouve la divergence de $\displaystyle\sum \frac{1}{n \ln n}$ établie dans le cours (section 20.3.3) par comparaison avec une intégrale.

3. La suite $b_n = \min\big(a_n, \dfrac{1}{n}\big)$ est le minimum de deux suites décroissantes de limite nulle : elle est décroissante (si $n \leqslant m$, on a $b_m \leqslant a_m \leqslant a_n$ et $b_m \leqslant \dfrac{1}{m} \leqslant \dfrac{1}{n}$), positive et de limite nulle. La question 1 s'applique à (b_n), et

$$2^p b_{2^p} = \min\big(2^p a_{2^p}, 1\big).$$

Par la question 1, la série $\displaystyle\sum 2^p a_{2^p}$ diverge. Deux cas se présentent.

— Si $2^p a_{2^p} \geqslant 1$ pour une infinité d'entiers p, le terme $2^p b_{2^p}$ vaut 1 pour une infinité de p : il ne tend pas vers 0, et la série condensée diverge grossièrement.
— Sinon, $2^p b_{2^p} = 2^p a_{2^p}$ à partir d'un certain rang, et la série condensée diverge comme $\sum 2^p a_{2^p}$.

Dans les deux cas, $\sum 2^p b_{2^p}$ diverge, donc $\sum b_n$ aussi, par la question 1.

$$\boxed{\sum a_n \text{ diverge} \implies \sum \min\left(a_n, \frac{1}{n}\right) \text{ diverge}}$$

Piège. L'hypothèse de décroissance est indispensable. Pour $a_n = 1$ si n est un carré et $a_n = 0$ sinon, la série $\sum a_n$ diverge grossièrement, mais $\min\left(a_n, \frac{1}{n}\right)$ vaut $\frac{1}{k^2}$ si $n = k^2$ et 0 sinon : ses sommes partielles sont majorées par $\frac{\pi^2}{6}$, et la série converge. La même suite lacunaire est au cœur de l'exercice 8, où elle montrait que nu_n peut ne pas tendre vers 0 ; l'erreur la plus répandue est de croire qu'une série divergente l'est « parce que ses termes sont gros partout ».

EXERCICE 20 ⋆⋆

Les termes $\frac{\sigma(n)}{n^2}$ sont strictement positifs. Soit $N \geqslant 1$. Pour $N+1 \leqslant n \leqslant 2N$, on a $\frac{1}{n^2} \geqslant \frac{1}{4N^2}$, donc

$$\sum_{n=N+1}^{2N} \frac{\sigma(n)}{n^2} \geqslant \frac{1}{4N^2} \sum_{n=N+1}^{2N} \sigma(n).$$

Comme σ est injective, les N entiers $\sigma(N+1), \ldots, \sigma(2N)$ sont des entiers naturels non nuls deux à deux distincts. Rangés dans l'ordre croissant, ils s'écrivent $m_1 < m_2 < \cdots < m_N$, et une récurrence immédiate donne $m_i \geqslant i$: leur somme est au moins $1 + 2 + \cdots + N = \frac{N(N+1)}{2}$. Ainsi

$$\boxed{\sum_{n=N+1}^{2N} \frac{\sigma(n)}{n^2} \geqslant \frac{N(N+1)}{8N^2} \geqslant \frac{1}{8} \quad \text{pour tout } N \geqslant 1}$$

Si la série convergeait, de somme S, ses sommes partielles S_N tendraient vers S, ainsi que la suite extraite (S_{2N}), et la différence $S_{2N} - S_N$, qui est la somme ci-dessus, tendrait vers 0. C'est impossible, puisqu'elle reste supérieure à $\frac{1}{8}$.

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sigma(n)}{n^2} \text{ diverge, quelle que soit la bijection } \sigma}$$

Pour $\sigma = \mathrm{id}$, c'est la série harmonique. L'exercice dit qu'aucune façon de réordonner les entiers ne peut rendre la série convergente : on peut placer de petites valeurs de σ sur beaucoup d'indices, mais pas en moyenne, car chaque entier n'est utilisé qu'une fois. On remarquera que l'argument n'utilise que l'injectivité de σ.
Piège. L'erreur la plus répandue est de majorer ou de minorer terme à terme : on n'a aucune information sur un $\sigma(n)$ isolé, qui peut valoir 1 pour un n immense. Seule une somme de termes consécutifs se contrôle, et c'est pourquoi l'énoncé propose les tranches $[\![N+1\,;2N]\!]$, comme à l'exercice 18.

EXERCICE 21 ⋆⋆

Convergence. Pour $k \in \mathbb{N}$, la suite $\dfrac{n^{k+2}}{2^n}$ tend vers 0 par croissances comparées (chapitre 7, théorème 7), donc

$$\frac{n^k}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n^{k+2}}{2^n} \cdot \frac{1}{n^2} = o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Le terme est positif, et la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge : la série $\sum \dfrac{n^k}{2^{n+1}}$ converge (théorème 3 (iii)).

Relation de récurrence. Soit $k \geqslant 1$. Le terme d'indice 0 est nul, puisque $0^k = 0$, et l'on effectue le changement d'indice $n = m + 1$ sur les sommes partielles, avant de passer à la limite :

$$\sum_{n=0}^{N+1} \frac{n^k}{2^{n+1}} = \sum_{m=0}^{N} \frac{(m+1)^k}{2^{m+2}} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{m^j}{2^{m+1}} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \sum_{m=0}^{N} \frac{m^j}{2^{m+1}},$$

par la formule du binôme et l'interversion de deux sommes finies. Quand N tend vers $+\infty$, chacune des $k+1$ sommes intérieures tend vers S_j, et l'on obtient $S_k = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} S_j$. Le terme $j = k$ vaut $\dfrac{1}{2} S_k$; on le fait passer à gauche :

$$\boxed{S_k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} S_j \quad \text{pour tout } k \geqslant 1}$$

Valeurs. On a $S_0 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$ (théorème 1). Par récurrence forte, si $S_0, \ldots, S_{k-1}$ sont entiers, S_k l'est, comme somme de produits d'entiers : tous les S_k sont des entiers naturels. La relation donne successivement

$$S_1 = S_0 = 1, \qquad S_2 = S_0 + 2S_1 = 3, \qquad S_3 = S_0 + 3S_1 + 3S_2 = 13,$$

$$S_4 = S_0 + 4S_1 + 6S_2 + 4S_3 = 1 + 4 + 18 + 52 = 75.$$

$$\boxed{S_0 = 1, \quad S_1 = 1, \quad S_2 = 3, \quad S_3 = 13, \quad S_4 = 75}$$

On contrôle $S_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1) \Big(\frac{1}{2}\Big)^m$: la somme $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} (m+1) z^m = \frac{1}{(1-z)^2}$, obtenue dans le cours par un produit de Cauchy (section 20.7.4), vaut 4 en $z = \dfrac{1}{2}$, et $S_1 = \dfrac{1}{4} \times 4 = 1$ ✓. Les valeurs suivantes ont été vérifiées numériquement, ainsi que $S_5 = 541$ et $S_6 = 4683$.

À retenir. Ces entiers comptent les classements de k concurrents lorsque les ex aequo sont permis : pour deux concurrents A et B, il y a les 3 classements « A avant B », « B avant A » et « ex aequo ». En effet, si F_k désigne ce nombre, avec $F_0 = 1$, un classement de $k \geqslant 1$ concurrents est déterminé par le groupe non vide des premiers ex aequo, de cardinal $k - j$ avec $0 \leqslant j \leqslant k - 1$, à choisir de $\binom{k}{k-j} = \binom{k}{j}$ façons, puis par un classement des j autres : $F_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} F_j$. C'est la relation de S_k, avec la même valeur initiale, donc $F_k = S_k$ pour tout k. Une somme de série qui compte des objets finis : c'est un premier exemple de ce que la seconde année appellera une série génératrice.

EXERCICE 22 ⋆⋆

Le lemme. Soit $m \geqslant 1$. Les diviseurs positifs d de m tels que $d \leqslant \sqrt{m}$ sont des entiers de $[\![1\,;\lfloor\sqrt{m}\rfloor]\!]$: il y en a au plus $\sqrt{m}$. Si d est un diviseur tel que $d > \sqrt{m}$, alors $\dfrac{m}{d}$ est un diviseur de m strictement inférieur à $\sqrt{m}$, et l'application $d \mapsto \dfrac{m}{d}$ est injective : il y a au plus $\sqrt{m}$ diviseurs strictement supérieurs à $\sqrt{m}$.

$$\boxed{\text{tout entier } m \geqslant 1 \text{ a au plus } 2\sqrt{m} \text{ diviseurs positifs}}$$

Par exemple, 12 a six diviseurs 1, 2, 3, 4, 6, 12, et $2\sqrt{12} \approx 6{,}93$ ✓.

Minoration du ppcm. On note $L_n = \operatorname{ppcm}(u_1, \dots, u_n)$. Chacun des u_i, pour $i \leqslant n$, divise L_n (chapitre 12), et ces n entiers sont deux à deux distincts, puisque la suite est injective : L_n a au moins n diviseurs positifs. Le lemme donne $n \leqslant 2\sqrt{L_n}$, soit

$$\boxed{L_n \geqslant \frac{n^2}{4}, \qquad 0 < \frac{1}{\operatorname{ppcm}(u_1, \dots, u_n)} \leqslant \frac{4}{n^2}}$$

Par comparaison avec la série de Riemann $\sum \dfrac{4}{n^2}$ (théorèmes 3 et 5) :

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\operatorname{ppcm}(u_1, u_2, \dots, u_n)} \text{ converge}}$$

Piège. L'erreur la plus répandue est de se contenter de $L_n \geqslant \max(u_1, \dots, u_n) \geqslant n$, minoration vraie (une suite injective d'entiers prend au moins une valeur supérieure ou égale à n parmi ses n premiers termes) mais inutile, puisqu'elle compare la série à la série harmonique. Le ppcm est bien plus grand que le maximum, car il « contient » tous les u_i à la fois, et le lemme sur les diviseurs traduit exactement cela. L'injectivité est indispensable : pour la suite constante égale à 1, $L_n = 1$ et la série diverge grossièrement.

EXERCICE 23 ⋆⋆⋆

Idée. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin(\ln t)}{t}$ n'est pas monotone, et la proposition 6 ne s'applique pas. Mais sa dérivée est un $O(\dfrac{1}{t^2})$: l'écart entre $f(k)$ et l'intégrale de f sur $[k\,,k+1]$ est alors le terme d'une série absolument convergente, et la série a la même nature que la suite des intégrales, qui oscille.

1. On reconnaît une dérivée composée de la forme $u'(t)\sin u(t)$ avec $u = \ln$ (c'est le changement de variable $s = \ln t$) : la fonction $t \mapsto -\cos(\ln t)$ a pour dérivée $\dfrac{\sin(\ln t)}{t}$ sur $]0\,,+\infty[$, et

$$\boxed{\int_1^x \frac{\sin(\ln t)}{t}\,\mathrm{d}t = \big[-\cos(\ln t)\big]_1^x = 1 - \cos(\ln x) \quad \text{pour } x > 0}$$

Pour $x_k = \mathrm{e}^{2k\pi}$ et $y_k = \mathrm{e}^{(2k+1)\pi}$, deux suites qui tendent vers $+\infty$, cette intégrale vaut respectivement 0 et 2. Si elle avait une limite ℓ en $+\infty$, la caractérisation séquentielle (chapitre 8, théorème 1) donnerait $\ell = 0$ et $\ell = 2$.

$$\boxed{x \mapsto \int_1^x \frac{\sin(\ln t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ n'a pas de limite en } +\infty}$$

2. La fonction f est dérivable sur $[1\,,+\infty[$, et

$$f'(t) = \frac{\cos(\ln t) - \sin(\ln t)}{t^2}, \qquad |f'(t)| \leqslant \frac{2}{t^2} \leqslant \frac{2}{k^2} \quad \text{pour } t \in [k\,,k+1].$$

L'inégalité des accroissements finis (chapitre 9, théorème 6 (ii)) donne $|f(k) - f(t)| \leqslant \dfrac{2}{k^2}(t-k)$ pour $t \in [k\,,k+1]$. Comme l'intervalle est de longueur 1, on écrit $f(k) = \displaystyle\int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t$, et l'inégalité

triangulaire pour les intégrales donne

$$|d_k| = \Big| \int_k^{k+1} \big(f(k) - f(t)\big)\,\mathrm{d}t \Big| \leqslant \frac{2}{k^2} \int_k^{k+1} (t-k)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}, \qquad \text{où} \quad d_k = \frac{\sin(\ln k)}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\sin(\ln t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

$$\boxed{\frac{\sin(\ln k)}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\sin(\ln t)}{t}\,\mathrm{d}t = O\Big(\frac{1}{k^2}\Big), \quad \text{et plus précisément } |d_k| \leqslant \frac{1}{k^2}}$$

3. Par la question 2 et la proposition 9, la série $\sum d_k$ est absolument convergente ; on note D_n ses sommes partielles et D sa somme. La relation de Chasles et la question 1 donnent

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(\ln k)}{k} = D_n + \int_1^{n+1} \frac{\sin(\ln t)}{t}\,\mathrm{d}t = D_n + 1 - \cos\big(\ln(n+1)\big).$$

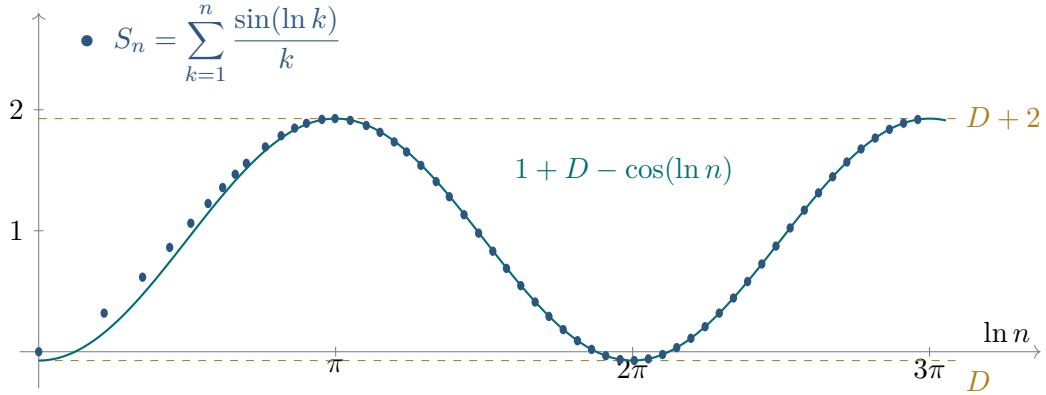
Si la série $\sum \dfrac{\sin(\ln n)}{n}$ convergeait, la suite $\big(\cos(\ln(n+1))\big)$ convergerait, comme différence de deux suites convergentes. Montrons que ce n'est pas le cas. Pour $k \geqslant 1$, posons $n_k = \lfloor \mathrm{e}^{2k\pi} \rfloor$; alors $n_k \leqslant \mathrm{e}^{2k\pi} < n_k + 1 \leqslant \mathrm{e}^{2k\pi} + 1$, donc

$$0 < \ln(n_k + 1) - 2k\pi \leqslant \ln\big(1 + \mathrm{e}^{-2k\pi}\big) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

et $\cos(\ln(n_k+1))$ tend vers $\cos 0 = 1$ par continuité du cosinus et 2π-périodicité. De même, avec $m_k = \lfloor \mathrm{e}^{(2k+1)\pi} \rfloor$, la suite $\cos(\ln(m_k+1))$ tend vers $\cos\pi = -1$. Deux suites extraites ayant des limites différentes, la suite $\big(\cos(\ln(n+1))\big)$ diverge.

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\ln n)}{n} \text{ diverge}}$$

Plus précisément, la somme partielle d'indice n vaut $1+D-\cos(\ln(n+1))+o(1)$: elle oscille indéfiniment entre D et $D+2$, avec $D \approx -0{,}0731$ (valeur obtenue numériquement).



Les points bleus sont les sommes partielles, placées en fonction de $\ln n$ jusqu'à $n \approx 12\,000$; elles suivent la courbe $1 + D - \cos(\ln n)$ et repassent par leur minimum et leur maximum à chaque fois que $\ln n$ augmente de 2π, c'est-à-dire quand n est multiplié par $\mathrm{e}^{2\pi} \approx 535$. La divergence est donc très lente, mais elle est certaine.

4. On applique la même méthode à la fonction complexe $h : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln t}}{t}$, en annonçant comme à la question 1 la primitive : $t \mapsto -\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln t}$ a pour dérivée $-\mathrm{i} \cdot \dfrac{\mathrm{i}}{t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln t} = h(t)$. De plus

$$h'(t) = \frac{(\mathrm{i}-1)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln t}}{t^2}, \qquad |h'(t)| = \frac{\sqrt{2}}{t^2} \leqslant \frac{2}{k^2} \quad \text{sur } [k\,,k+1],$$

et l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs complexes (chapitre 9, proposition 6) donne, comme à la question 2, $\left|h(k) - \displaystyle\int_k^{k+1} h\right| \leqslant \frac{1}{k^2}$. Les écarts $\delta_k = h(k) - \displaystyle\int_k^{k+1} h$ forment une série absolument convergente, et

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln k}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \delta_k + \left[-\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln t}\right]_1^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \delta_k + \mathrm{i} - \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln(n+1)}.$$

La partie imaginaire de $\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln(n+1)}$ est $\cos(\ln(n+1))$, qui n'a pas de limite d'après la question 3 : la suite $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln(n+1)})$ diverge, et la série aussi.

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln n}}{n} \text{ diverge}}$$

On pouvait aussi conclure sans calcul : la partie imaginaire de $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln n}}{n}$ est $\dfrac{\sin(\ln n)}{n}$, et une série complexe dont la série des parties imaginaires diverge diverge elle-même (proposition 1 (iii)). On a $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln n}}{n} = \dfrac{1}{n^{1-\mathrm{i}}}$: c'est une série « de Riemann » d'exposant complexe $1-\mathrm{i}$, de partie réelle 1, et son terme général a pour module $\dfrac{1}{n}$.

Piège. L'erreur la plus répandue est d'appliquer la proposition 6 à f, qui n'est pas monotone, ou de croire que le terme $\dfrac{\sin(\ln n)}{n}$ change de signe assez souvent pour que les compensations jouent comme dans une série alternée. Ici le signe est constant sur des plages $[\mathrm{e}^{k\pi}, \mathrm{e}^{(k+1)\pi}[$ de plus en plus longues, et chaque plage apporte une contribution voisine de ± 2. L'exercice 39 étudiera la série $\sum (-1)^n \dfrac{\sin(\ln n)}{n}$, où le signe alterne vraiment, et qui converge.

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

1. On note $R_n(u) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R_n(v) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$; ces restes existent (proposition 3) et $R_n(v) > 0$, puisque les v_k sont strictement positifs. Soit $\varepsilon \in]0\,,1[$. Comme $\dfrac{u_k}{v_k}$ tend vers 1, il existe un rang N tel que, pour tout $k \geqslant N$,

$$(1-\varepsilon)v_k \leqslant u_k \leqslant (1+\varepsilon)v_k.$$

Pour $n \geqslant N$, on somme ces inégalités pour k allant de $n+1$ à m, puis on fait tendre m vers $+\infty$ (chapitre 7, théorème 5) :

$$(1-\varepsilon)R_n(v) \leqslant R_n(u) \leqslant (1+\varepsilon)R_n(v), \qquad \text{soit} \qquad \left|\frac{R_n(u)}{R_n(v)} - 1\right| \leqslant \varepsilon.$$

$$\boxed{u_n \sim v_n,\ u_n, v_n > 0,\ \sum v_n \text{ convergente} \implies \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k}$$

Comme les restes ne font intervenir que les termes d'indice supérieur à n, le résultat subsiste si les suites ne sont strictement positives qu'à partir d'un certain rang : on l'applique aux suites décalées. C'est le pendant, pour les restes de séries convergentes, du résultat sur les sommes partielles de séries divergentes de l'exercice 11 de la feuille du chapitre 10.

2. Soit $\alpha > 1$. La série $\sum v_k$ est télescopique : pour $N \geqslant n$,

$$\sum_{k=n}^{N} v_k = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}},$$

puisque $\alpha - 1 > 0$. Par ailleurs, le développement $(1+x)^{1-\alpha} = 1 + (1-\alpha)x + o(x)$ en 0 (chapitre 10) donne

$$v_k = \frac{1}{(\alpha-1)k^{\alpha-1}}\Big(1 - \Big(1+\frac{1}{k}\Big)^{1-\alpha}\Big) = \frac{1}{(\alpha-1)k^{\alpha-1}}\Big(\frac{\alpha-1}{k} + o\Big(\frac{1}{k}\Big)\Big) \sim \frac{1}{k^\alpha}.$$

Les deux suites sont strictement positives ($t \mapsto t^{1-\alpha}$ est strictement décroissante), et la question 1, appliquée au rang $n-1$, donne

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}}$$

C'est l'équivalent du théorème 5, puisque $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = R_{n-1}$ et que $(n-1)^{\alpha-1} \sim n^{\alpha-1}$. On l'obtient ici sans intégrale : v_k est l'accroissement d'une primitive de $t^{-\alpha}$, ce qui est une façon discrète de comparer la série à l'intégrale.

3. *Premier terme.* On a $u_n - u_{n+1} = (H_n - H_{n+1}) + \ln(n+1) - \ln n = \ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) - \frac{1}{n+1}$. Les développements

$$\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big), \qquad \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big)$$

donnent

$$\boxed{u_n - u_{n+1} = \frac{1}{2n^2} - \frac{2}{3n^3} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big) \sim \frac{1}{2n^2}}$$

Ce terme est strictement positif : $\ln\big(1+\frac{1}{n}\big) = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, et la fonction continue $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{n+1}$ est positive sur $[n\,,n+1]$ et non nulle, donc d'intégrale strictement positive (chapitre 18, théorème 4) ; c'est la version stricte de l'encadrement lu sur la figure de la section 20.3.2. Comme u_n tend vers 0 (proposition 7), la série télescopique $\sum(u_k - u_{k+1})$ converge et $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}(u_k - u_{k+1}) = u_n - \lim u = u_n$ (proposition 4). Les questions 1 et 2, avec $\alpha = 2$, donnent

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(u_k - u_{k+1}) \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} \sim \frac{1}{2n}, \qquad \boxed{H_n - \ln n - \gamma \sim \frac{1}{2n}}$$

Terme suivant. On pose $w_n = u_n - \dfrac{1}{2n}$, qui tend vers 0. Comme

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^3} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big),$$

on obtient

$$w_n - w_{n+1} = (u_n - u_{n+1}) - \frac{1}{2n(n+1)} = -\frac{2}{3n^3} + \frac{1}{2n^3} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big) = -\frac{1}{6n^3} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big).$$

La suite $w_{n+1} - w_n \sim \dfrac{1}{6n^3}$ est strictement positive à partir d'un certain rang ; la question 1 (sous la forme décalée) et la question 2 avec $\alpha = 3$ donnent

$$-w_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(w_{k+1} - w_k) \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{6k^3} \sim \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2n^2} = \frac{1}{12n^2}.$$

Ainsi $w_n = -\dfrac{1}{12n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$, ce qui s'écrit

$$\boxed{H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)}$$

Pour $n = 1\,000$, on calcule $n^2\Big(H_n - \ln n - \gamma - \dfrac{1}{2n}\Big) \approx -0{,}0833333$, très proche de $-\dfrac{1}{12}$ ✓. La remarque qui suit la proposition 7 avait deviné le terme $\dfrac{1}{2n}$ sur l'écart observé pour $n = 1\,000$; l'exercice le démontre et va un cran plus loin.

À retenir. La méthode est générale : pour obtenir le développement asymptotique d'une suite qui tend vers 0, on développe ses accroissements, qui sont souvent explicites, puis on « resomme » les restes à l'aide de la question 1. L'erreur la plus répandue est de sommer des équivalents sans vérifier le signe : la question 1 exige des termes positifs, et c'est pourquoi on a travaillé avec $w_{n+1} - w_n$, positif, plutôt qu'avec $w_n - w_{n+1}$. En continuant, on trouverait que le terme suivant est $\dfrac{1}{120n^4}$ (il n'y a pas de terme en $\dfrac{1}{n^3}$), ce que confirme le calcul numérique.

EXERCICE 25 ⋆⋆⋆

1. Pour $k \geqslant 2$, on a $0 < \dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{2}$, donc $1 < 3^{1/k} \leqslant \sqrt{3} < 2$, et le facteur $2 - 3^{1/k}$ appartient à $]0\,,1[$. Ainsi $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2 - 3^{1/(n+1)} < 1$: la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.

$$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 2} \text{ converge, par le théorème de la limite monotone (chapitre 7, théorème 8)}}$$

2. Comme $u_n > 0$, on peut écrire $\ln u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(2 - 3^{1/k}\right)$. Avec $3^{1/k} = \mathrm{e}^{(\ln 3)/k} = 1 + \dfrac{\ln 3}{k} + O\Big(\dfrac{1}{k^2}\Big)$, puis $\ln(1+x) = x + O(x^2)$,

$$2 - 3^{1/k} = 1 - \frac{\ln 3}{k} + O\Big(\frac{1}{k^2}\Big), \qquad \boxed{\ln\left(2 - 3^{1/k}\right) = -\frac{\ln 3}{k} + O\Big(\frac{1}{k^2}\Big) \sim -\frac{\ln 3}{k}}$$

Le terme $-\ln(2 - 3^{1/k})$ est positif et équivalent à $\dfrac{\ln 3}{k}$: par le théorème 4, la série $\sum -\ln(2 - 3^{1/k})$ diverge, et, ses termes étant positifs, ses sommes partielles tendent vers $+\infty$ (proposition 5). Ainsi $\ln u_n$ tend vers $-\infty$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

3. On sépare la partie divergente de la série. Le terme $a_k = \ln\left(2 - 3^{1/k}\right) + \dfrac{\ln 3}{k}$ est un $O\Big(\dfrac{1}{k^2}\Big)$: la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} a_k$ est absolument convergente (proposition 9) ; on note A sa somme. Avec $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ (proposition 7),

$$\ln u_n = \sum_{k=2}^{n} a_k - \ln 3\,(H_n - 1) = \sum_{k=2}^{n} a_k - \ln 3 \cdot \ln n + \ln 3\,(1-\gamma) + o(1).$$

Ainsi $\ln\left(n^{\ln 3} u_n\right) = \ln u_n + \ln 3 \cdot \ln n$ tend vers $A + \ln 3\,(1-\gamma)$, et, par continuité de l'exponentielle,

$$\boxed{u_n \sim \frac{\alpha}{n^{\ln 3}}, \qquad \alpha = \exp\left(\ln 3\,(1-\gamma) + \sum_{k=2}^{+\infty}\left(\ln\left(2 - 3^{1/k}\right) + \frac{\ln 3}{k}\right)\right) > 0}$$

Numériquement, $A \approx -1{,}39718$ et $\alpha \approx 0{,}39349$; le produit $n^{\ln 3} u_n$ calculé directement pour $n = 10^6$ vaut 0,393487 ✓.

Piège. L'erreur la plus répandue est de déduire un équivalent de u_n d'un équivalent de $\ln u_n$. On a bien $\ln u_n \sim -\ln 3 \cdot \ln n = \ln\left(n^{-\ln 3}\right)$, mais cela ne donne pas $u_n \sim n^{-\ln 3}$: il faut connaître $\ln u_n$ à $o(1)$ près, et non à $o(\ln n)$ près (chapitre 10). C'est tout le rôle de la série $\sum a_k$, qui fournit la constante A. Comme $\ln 3 \approx 1{,}0986 > 1$, on obtient au passage que la série $\sum u_n$ converge.

EXERCICE 26 ⋆⋆⋆

Idée. Le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 et la comparaison géométrique de la remarque de la section 20.4 ne dit rien. On compare alors le rapport à celui d'une série de Riemann, $\dfrac{(n+1)^{-\beta}}{n^{-\beta}} = 1 - \dfrac{\beta}{n} + o(\dfrac{1}{n})$: c'est le terme en $\dfrac{1}{n}$ qui départage.

1. *Comparaison des rapports.* Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{w_{n+1}}{w_n}$ pour tout $n \geqslant N$, avec $w_n > 0$, alors la suite $\dfrac{u_n}{w_n}$ est décroissante à partir du rang N, d'où $u_n \leqslant \dfrac{u_N}{w_N} w_n$ pour $n \geqslant N$; l'inégalité inverse donne de même $u_n \geqslant \dfrac{u_N}{w_N} w_n$. On prend $w_n = \dfrac{1}{n^\beta}$, pour lequel $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^{-\beta} = 1 - \dfrac{\beta}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$, de sorte que

$$n\Big(\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{w_{n+1}}{w_n}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta - \alpha.$$

— Si $\alpha > 1$, on choisit $\beta \in]1\,,\alpha[$. La limite $\beta - \alpha$ est strictement négative, donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{w_{n+1}}{w_n}$ à partir d'un rang N, et $0 < u_n \leqslant \dfrac{C}{n^\beta}$ pour $n \geqslant N$, avec $C = N^\beta u_N$. Comme $\beta > 1$, la série $\sum u_n$ converge (théorèmes 3 et 5).

— Si $\alpha < 1$, on choisit $\beta \in]\alpha\,,1[$. La limite est strictement positive, d'où $u_n \geqslant \dfrac{C}{n^\beta}$ pour $n \geqslant N$, avec $C > 0$; comme $\beta < 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

$$\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big) : \quad \alpha > 1 \implies \sum u_n \text{ converge}, \qquad \alpha < 1 \implies \sum u_n \text{ diverge}}$$

Le cas $\alpha = 1$. Pour $u_n = \dfrac{1}{n}$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$, et la série diverge. Pour $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$ ($n \geqslant 2$, et $u_1 = 1$), on a $\ln(n+1) = \ln n + \ln\,(1 + \dfrac{1}{n})$, donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1}\Big(1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\Big)^{-2} = \Big(1 - \frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\Big(1 - \frac{2}{n\ln n} + o\Big(\frac{1}{n\ln n}\Big)\Big) = 1 - \frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

et la série converge : la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^2}$ est continue, positive et décroissante sur $[2\,,+\infty[$, de primitive $t \mapsto -\dfrac{1}{\ln t}$, et $\displaystyle\int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n} \leqslant \frac{1}{\ln 2}$; la proposition 6 (iii) conclut (c'est aussi le cas $\alpha = 2$ de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{p(\ln p)^\alpha}$ de l'exercice 19).

$$\boxed{\alpha = 1 : \ \frac{1}{n} \text{ (divergente) et } \frac{1}{n(\ln n)^2} \text{ (convergente) ont tous deux un rapport } 1 - \frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)}$$

2. On pose $x_n = \ln(n^\lambda u_n)$ et l'on étudie la série télescopique $\sum(x_{n+1} - x_n)$ (proposition 4). Comme $u_n > 0$, le nombre $1 + h_n$, avec $h_n = -\dfrac{\lambda}{n} + v_n$, est strictement positif, et

$$x_{n+1} - x_n = \lambda \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) + \ln(1 + h_n).$$

La suite (h_n) tend vers 0, puisque v_n tend vers 0 (proposition 2). Par l'inégalité de Taylor-Lagrange (chapitre 18, théorème 8) appliquée à $\ln(1+\cdot)$, dont la dérivée seconde est majorée par 4 en valeur absolue sur $[-\dfrac{1}{2}\,,\dfrac{1}{2}]$, on a $|\ln(1+h) - h| \leqslant 2h^2$ pour $|h| \leqslant \dfrac{1}{2}$. Pour n assez grand, $|h_n| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $|v_n| \leqslant 1$,

donc $h_n^2 \leqslant \dfrac{2\lambda^2}{n^2} + 2v_n^2 \leqslant \dfrac{2\lambda^2}{n^2} + 2|v_n|$. De même $\lambda \ln\big(1+\dfrac{1}{n}\big) = \dfrac{\lambda}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})$. En regroupant, le terme $\dfrac{\lambda}{n}$ disparaît :

$$x_{n+1} - x_n = v_n + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) + O(h_n^2), \qquad |x_{n+1} - x_n| \leqslant 5|v_n| + \frac{M}{n^2} \ \text{ pour } n \text{ assez grand,}$$

pour une constante M. La série à termes positifs $\sum \big(5|v_n| + \dfrac{M}{n^2}\big)$ converge : la série $\sum (x_{n+1} - x_n)$ est absolument convergente, donc convergente, et la suite (x_n) converge vers un réel L (proposition 4). Par continuité de l'exponentielle :

$$\boxed{n^\lambda u_n = \mathrm{e}^{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^L > 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad u_n \sim \frac{\mathrm{e}^L}{n^\lambda}}$$

Le résultat est plus fort que celui de la question 1 : il donne un équivalent, et tranche donc aussi le cas $\lambda = 1$ lorsque le reste est absolument sommable, la série divergeant alors comme la série harmonique. Les deux exemples du cas $\alpha = 1$ ne contredisent rien : pour $\dfrac{1}{n(\ln n)^2}$, on a $|v_n| \sim \dfrac{2}{n \ln n}$, qui n'est pas le terme général d'une série absolument convergente.

3. Pour $u_n = \dfrac{n^n}{n!\,\mathrm{e}^n}$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\,\mathrm{e}^{n+1}} \cdot \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^n} = \frac{1}{\mathrm{e}}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n.$$

Avec $n\ln\big(1+\dfrac{1}{n}\big) = 1 - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{3n^2} + O(\dfrac{1}{n^3})$ et le développement de l'exponentielle,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \exp\Big(-\frac{1}{2n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) = 1 - \frac{1}{2n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

La question 2 s'applique avec $\lambda = \dfrac{1}{2}$ et $v_n = O(\dfrac{1}{n^2})$, terme d'une série absolument convergente : $\sqrt{n}\,u_n$ tend vers un réel $\ell > 0$, et $u_n \sim \dfrac{\ell}{\sqrt{n}}$. Par le théorème 4 et la série de Riemann d'exposant $\dfrac{1}{2}$:

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n}{n!\,\mathrm{e}^n} \text{ diverge}}$$

La question 1 suffisait d'ailleurs pour la nature, avec $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$. *Avec la formule de Stirling* (chapitre 10, théorème 6, et chapitre 18, théorème 10), $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n}$, d'où

$$\boxed{u_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, \qquad \ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}3989}$$

et l'on retrouve la divergence. Pour $n = 10^4$, on calcule $\sqrt{n}\,u_n \approx 0{,}398939$ ✓. La question 2 démontre ainsi la formule de Stirling à la constante près ; c'est exactement l'étape « la suite converge vers un réel strictement positif » de sa démonstration au chapitre 10, la constante $\sqrt{2\pi}$ venant ensuite des intégrales de Wallis (chapitre 18).

EXERCICE 27 ⋆⋆⋆

1. Comme η_n tend vers 0, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'inégalité $\eta_n \leqslant 2^{-k}$ est vraie pour tous les n assez grands. On construit ainsi par récurrence des indices $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$ tels que $\eta_{n_k} \leqslant 2^{-k}$, en choisissant n_k plus grand que n_{k-1}. On pose alors $a_n = \eta_n$ si n est l'un des n_k, et $a_n = 0$ sinon. Les termes sont positifs, et, pour tout N, la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n$ est majorée par $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} 2^{-k} = 2$: la série converge (proposition 5). Mais $\dfrac{a_{n_k}}{\eta_{n_k}} = 1$ pour tout k, et le rapport $\dfrac{a_n}{\eta_n}$ ne tend pas vers 0.

$$\boxed{\text{il existe } \sum a_n \text{ convergente, à termes positifs, avec } a_n \neq o(\eta_n)}$$

Si l'on veut des termes strictement positifs, on remplace les 0 par 2^{-n} : la série converge toujours, et $\dfrac{a_{n_k}}{\eta_{n_k}} \geqslant 1$. Ainsi, aussi vite que η_n tende vers 0, la convergence d'une série n'impose pas à son terme d'être négligeable devant η_n ; pour $\eta_n = \dfrac{1}{n}$, c'est ce que montrait l'exercice 8.

2. Les restes R_n sont strictement positifs, et $a_n = R_{n-1} - R_n$ pour $n \geqslant 1$. En multipliant par la quantité conjuguée, et comme $\sqrt{R_n} \leqslant \sqrt{R_{n-1}}$,

$$2(\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}) = \frac{2(R_{n-1} - R_n)}{\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}} \geqslant \frac{2a_n}{2\sqrt{R_{n-1}}}, \qquad \boxed{\frac{a_n}{\sqrt{R_{n-1}}} \leqslant 2(\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n})}$$

On pose $b_0 = 0$ et $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{R_{n-1}}}$ pour $n \geqslant 1$. Comme R_{n-1} tend vers 0 en restant strictement positif (proposition 3), b_n tend vers $+\infty$. Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum a_n b_n$ se majorent par télescopage :

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n \leqslant 2\sum_{n=1}^{N} (\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}) = 2(\sqrt{R_0} - \sqrt{R_N}) \leqslant 2\sqrt{R_0}.$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\sqrt{R_{n-1}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad \sum a_n b_n \text{ converge}}$$

Pour $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, on a $R_{n-1} \sim \dfrac{1}{n}$ (théorème 5), donc $b_n \sim \sqrt{n}$ et $a_n b_n \sim \dfrac{1}{n^{3/2}}$: on passe d'une série de Riemann convergente à une autre, plus lente.

3. Les termes étant strictement positifs, $S_n \geqslant a_0 > 0$, et S_n tend vers $+\infty$ en croissant (proposition 5). Pour $m > n$, chaque S_k avec $n+1 \leqslant k \leqslant m$ est majoré par S_m, donc

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{S_k} \geqslant \frac{1}{S_m} \sum_{k=n+1}^{m} a_k = \frac{S_m - S_n}{S_m} = 1 - \frac{S_n}{S_m}.$$

Supposons que $\sum \dfrac{a_n}{S_n}$ converge, de sommes partielles T_n et de somme T. L'inégalité s'écrit

$$T_m - T_n \geqslant 1 - \frac{S_n}{S_m} \qquad \text{pour } m > n\,;$$

à n fixé, on fait tendre m vers $+\infty$ (chapitre 7, théorème 5) et l'on obtient $T - T_n \geqslant 1$ pour tout n. Or $T - T_n$ tend vers 0 : contradiction.

$$\boxed{\sum a_n \text{ diverge} \implies \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{S_n} \text{ diverge}}$$

La suite $b_n = \dfrac{1}{S_n}$ est positive, tend vers 0, et $\sum a_n b_n$ diverge.

$$\boxed{b_n = \frac{1}{S_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \sum a_n b_n \text{ diverge}}$$

Pour $a_n = 1$, on a $S_n = n+1$, et l'on retrouve la série harmonique. Pour $a_n = \dfrac{1}{n}$ $(n \geqslant 1)$, on a $S_n = H_n \sim \ln n$, et $\dfrac{a_n}{S_n} \sim \dfrac{1}{n \ln n}$: c'est la série du cours qui diverge « presque invisiblement ».

À retenir. La question 2 dit qu'il n'existe pas de série convergente « la plus lente », la question 3 qu'il n'existe pas de série divergente « la plus petite ». Aucune famille de séries de référence, aussi riche soit-elle, ne peut donc trancher toutes les natures par comparaison : c'est la conclusion, annoncée dans le cours après le théorème 5, à laquelle conduisaient déjà les séries de l'exercice 19.

EXERCICE 28 ⋆⋆⋆

1. Supposons que $\sum a_n$ converge, de somme S. Alors $S \geqslant a_0 > 0$, a_n tend vers 0 (proposition 2) et S_n tend vers S, donc $a_n S_n$ tend vers $0 \times S = 0$, et non vers 1. Ainsi la série diverge ; à termes positifs, ses sommes partielles tendent vers $+\infty$ (proposition 5), et

$$\boxed{\sum a_n \text{ diverge}, \qquad a_n = \frac{a_n S_n}{S_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{+\infty} = 0}$$

2. On a $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, donc $\dfrac{S_{n+1}}{S_n} = 1 + \dfrac{a_{n+1}}{S_n}$, et $\dfrac{a_{n+1}}{S_n}$ tend vers 0 puisque $a_{n+1} \to 0$ et $S_n \to +\infty$.

$$\boxed{S_{n+1} \sim S_n}$$

Ensuite, par l'identité $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$,

$$S_{n+1}^2 - S_n^2 = a_{n+1}(S_{n+1}+S_n) = a_{n+1}S_{n+1}\Big(1+\frac{S_n}{S_{n+1}}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\times(1+1), \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty}(S_{n+1}^2 - S_n^2) = 2}$$

3. Par le lemme de Cesàro sous la forme des accroissements (chapitre 10, proposition 16), appliqué à la suite (S_n^2), on obtient $\dfrac{S_n^2}{n} \to 2$, soit $\dfrac{S_n^2}{2n} \to 1$; par continuité de la racine carrée, et comme $S_n > 0$, $\dfrac{S_n}{\sqrt{2n}} \to 1$. Alors

$$a_n = \frac{a_n S_n}{S_n} \sim \frac{1}{S_n} \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}, \qquad \boxed{a_n \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}, \quad S_n \sim \sqrt{2n}}$$

4. Soit $(b_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $b_n \sim c_n$, avec $c_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$, et $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$, $C_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k$. Par le théorème 5 avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$,

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{n^{1/2}}{1/2} = \sqrt{2n}.$$

Montrons que $B_n \sim C_n$; c'est le résultat de l'exercice 11 de la feuille du chapitre 10, dont on rappelle l'argument. Soit $\varepsilon > 0$, et N tel que $|b_k - c_k| \leqslant \varepsilon c_k$ pour $k > N$. Pour $n > N$,

$$|B_n - C_n| \leqslant |B_N - C_N| + \sum_{k=N+1}^{n} |b_k - c_k| \leqslant |B_N - C_N| + \varepsilon C_n.$$

Comme C_n tend vers $+\infty$, on a $|B_N - C_N| \leqslant \varepsilon C_n$ pour n assez grand, et alors $\left|\dfrac{B_n}{C_n} - 1\right| \leqslant 2\varepsilon$. Ainsi $B_n \sim C_n \sim \sqrt{2n}$, et

$$\boxed{b_n \sum_{k=1}^{n} b_k \sim \frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot \sqrt{2n} = 1, \qquad \text{donc} \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n \sum_{k=1}^{n} b_k = 1}$$

Les questions 1 à 4 montrent que, pour une suite strictement positive, la condition « $a_n S_n \to 1$ » équivaut à « $a_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ » ; que la somme commence à l'indice 0 ou 1 n'importe pas, puisqu'un terme fixe, multiplié par $b_n \to 0$, tend vers 0. Numériquement, la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_n S_n = 1$ exactement pour $n \geqslant 1$ (soit $a_n = \dfrac{-S_{n-1} + \sqrt{S_{n-1}^2 + 4}}{2}$) vérifie $a_n\sqrt{2n} \approx 1{,}00066$ pour $n = 1\,000$ ✓.

Piège. L'erreur la plus répandue, à la question 3, est d'« intégrer » l'équivalent $a_n \sim \dfrac{1}{S_n}$ comme une équation différentielle sans justification. Le passage par S_n^2 est la version discrète de la résolution de $y'y = 1$, et c'est le lemme de Cesàro qui remplace l'intégration : il transforme l'information sur les accroissements $S_{n+1}^2 - S_n^2$ en information sur S_n^2.

EXERCICE 29 ⋆⋆⋆

Idée. L'algorithme glouton retient u_k chaque fois que la somme reste inférieure ou égale à S. S'il refuse une infinité de termes, l'écart à S est majoré par des u_k arbitrairement petits ; s'il n'en refuse qu'un nombre fini, l'hypothèse $u_n \leqslant R_n$ interdit le dernier refus.

On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Soit $S \in [0\,,U]$. On définit par récurrence la partie A et les sommes $T_k = \sum_{j\in A,\, j<k} u_j$: on pose $T_0 = 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$k \in A \text{ et } T_{k+1} = T_k + u_k \ \text{ si } T_k + u_k \leqslant S, \qquad k \notin A \text{ et } T_{k+1} = T_k \ \text{ sinon.}$$

Par récurrence, $T_k \leqslant S$ pour tout k. La suite (T_k) est croissante et majorée par S : elle converge vers un réel $T \leqslant S$. C'est la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_k \varepsilon_k u_k$, où $\varepsilon_k = 1$ si $k \in A$ et 0 sinon, de sorte que $T = \sum_{k\in A} u_k$. Il reste à montrer que $T = S$.

Premier cas : une infinité d'entiers k n'appartiennent pas à A. Pour un tel k, on a $T_k + u_k > S$, donc $0 \leqslant S - T \leqslant S - T_k < u_k$. Comme u_k tend vers 0 (proposition 2), le long de ces entiers en nombre infini, on obtient $S - T \leqslant 0$, d'où $T = S$.

Second cas : seuls un nombre fini d'entiers n'appartiennent pas à A. S'il n'y en a aucun, $A = \mathbb{N}$ et $T = U \geqslant S$, donc $T = S$. Sinon, soit m le plus grand entier refusé : $T_m + u_m > S$, et tous les entiers $k > m$ appartiennent à A. Alors

$$T = T_m + \sum_{k=m+1}^{+\infty} u_k = T_m + R_m \geqslant T_m + u_m > S,$$

en utilisant l'hypothèse $u_m \leqslant R_m$. C'est impossible, puisque $T \leqslant S$: ce sous-cas ne se produit pas.

$$\boxed{\text{pour tout } S \in [0\,,U],\ \text{il existe } A \subset \mathbb{N} \text{ telle que } S = \sum_{k\in A} u_k}$$

L'exemple $u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$. On a $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{k+1}} = \dfrac{1}{2^{n+1}} = u_n$: l'hypothèse est vérifiée, avec égalité, et $U = 1$.

$$\boxed{\text{tout réel } S \in [0\,,1] \text{ s'écrit } S = \sum_{k\in A} \frac{1}{2^{k+1}}, \quad A \subset \mathbb{N}}$$

C'est l'existence du développement en base 2 : le chiffre d'indice $k+1$ après la virgule vaut 1 si $k \in A$ et 0 sinon. Par exemple, pour $S = \dfrac{1}{3}$, l'algorithme retient les entiers impairs, et l'on retrouve $\dfrac{1}{3} = \displaystyle\sum_{j\geqslant 1} \frac{1}{4^j}$, soit 0,010101… en base 2. Pour $S = \dfrac{1}{2}$, il retient 0 puis plus rien : il fournit le développement propre 0,1, et non 0,0111…

Piège. L'hypothèse $u_n \leqslant R_n$ ne sert que dans le second cas, mais elle est indispensable. Pour $u_n = \dfrac{2}{3^{n+1}}$, on a $U = 1$ et $R_0 = \dfrac{1}{3} < u_0 = \dfrac{2}{3}$. Une somme $\displaystyle\sum_{k\in A} u_k$ vaut au moins $\dfrac{2}{3}$ si $0 \in A$, et au plus $R_0 = \dfrac{1}{3}$ sinon : aucun réel de $\left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right[$, par exemple $\dfrac{1}{2}$, n'est atteint. En répétant l'argument, on obtient l'ensemble triadique de Cantor.

Séries absolument convergentes

EXERCICE 30 ⋆

Pour tout n, on a $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant w_n - u_n$. La série $\sum(w_n - u_n)$ converge par linéarité (proposition 1), donc la série à termes positifs $\sum(v_n - u_n)$ converge (théorème 3), et $\sum v_n = \sum\left((v_n - u_n) + u_n\right)$ converge, à nouveau par linéarité.

$$\boxed{u_n \leqslant v_n \leqslant w_n,\ \sum u_n \text{ et } \sum w_n \text{ convergentes } \Longrightarrow \sum v_n \text{ converge}}$$

L'astuce consiste à se ramener à une série à termes positifs en retranchant u_n : le théorème 3 ne s'applique pas directement à des termes de signe quelconque, et c'est l'encadrement des deux côtés qui permet ce retour au cas positif.

La seconde hypothèse ne suffit pas. Pour $n \geqslant 1$, prenons $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$. On a $|v_n| = |w_n|$, la série $\sum w_n$ converge par le critère des séries alternées (théorème 7, la suite $\dfrac{1}{n}$ décroissant vers 0), et pourtant $\sum v_n$ est la série harmonique, qui diverge.

$$\boxed{\text{non : } |v_n| \leqslant |w_n| \text{ et } \sum w_n \text{ convergente n'entraînent pas la convergence de } \sum v_n}$$

Piège. L'erreur la plus répandue est d'appliquer le théorème de comparaison à des séries qui ne sont pas à termes positifs. Ce qui est vrai, c'est la proposition 9 : si $|v_n| \leqslant |w_n|$ et si $\sum w_n$ est *absolument* convergente, alors $\sum v_n$ est absolument convergente. Le contre-exemple repose précisément sur une série semi-convergente.

EXERCICE 31 ⋆

1. Les décimales vérifient $0 \leqslant a_n \leqslant 9$.

— Si $|x| < 1$, alors $|a_n x^n| \leqslant 9|x|^n$, terme d'une série géométrique convergente : la série $\sum a_n x^n$ est absolument convergente (proposition 9), donc convergente.

— Si $|x| \geqslant 1$, une infinité de décimales sont non nulles : sinon, $a_n = 0$ pour $n > N$, et $\pi = 3 + \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{10^n}$ serait un nombre décimal, donc rationnel, ce que contredit l'exercice 52 de la feuille du chapitre 18. Pour chacun de ces indices, $|a_n x^n| \geqslant 1 \cdot 1 = 1$: le terme général ne tend pas vers 0, et la série diverge grossièrement (proposition 2).

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n \text{ converge } \Longleftrightarrow\ |x| < 1,\ \text{et la convergence est alors absolue}}$$

Le seul renseignement utile sur π est qu'il n'est pas décimal ; le même raisonnement s'applique à tout réel non décimal, par exemple $\frac{1}{3}$, et, pour un réel décimal, la série est une somme finie qui converge pour tout x.

2. On note $u_n = \dfrac{x^n}{1+y^n}$, bien défini puisque $y \neq -1$ assure $y^n \neq -1$ pour tout n (si $|y| \neq 1$, $|y^n| \neq 1$ pour $n \geqslant 1$; si $y = 1$, $1 + y^n = 2$). On distingue selon $|y|$.

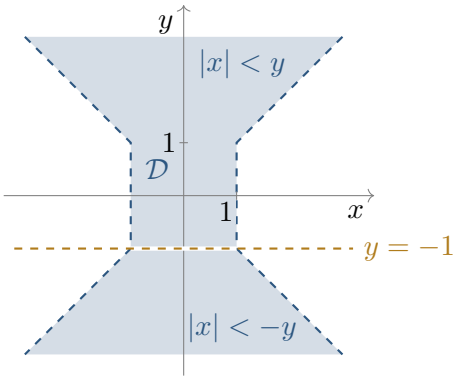
— *Si* $|y| < 1$, y^n tend vers 0 et $|1+y^n| \leqslant 2$. Pour $|x| < 1$, on a $|u_n| \sim |x|^n$ (ou $u_n = 0$ pour $n \geqslant 1$ si $x = 0$), et la série converge absolument par le théorème 4 et la série géométrique. Pour $|x| \geqslant 1$, on a $|u_n| \geqslant \dfrac{|x|^n}{2} \geqslant \dfrac{1}{2}$, et elle diverge grossièrement.

— *Si* $y = 1$, $u_n = \dfrac{x^n}{2}$: la série converge si et seulement si $|x| < 1$.

— *Si* $|y| > 1$, on écrit $u_n = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n \cdot \dfrac{1}{1+y^{-n}}$, où y^{-n} tend vers 0, donc $|u_n| \sim \left|\dfrac{x}{y}\right|^n$. Si $|x| < |y|$, la série converge absolument ; si $|x| \geqslant |y|$, $|u_n|$ tend vers une limite non nulle ou vers $+\infty$, et la série diverge grossièrement.

Dans tous les cas, la condition s'écrit $|x| < \max(1, |y|)$.

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{1+y^n} \text{ converge } \iff |x| < \max(1,|y|), \qquad \text{ensemble } \mathcal{D} = \{(x,y) \mid y \neq -1,\ |x| < \max(1,|y|)\}$$



Le domaine $\mathcal{D}$ est la bande verticale $|x| < 1$ pour $-1 < y \leqslant 1$, prolongée par les deux cônes $|x| < |y|$ pour $|y| > 1$; ses bords en pointillés sont exclus, ainsi que la droite d'équation $y = -1$, sur laquelle la série n'est pas définie. Le segment d'équation $y = 1$, $|x| < 1$, fait partie du domaine.

EXERCICE 32 ⋆⋆

Pour $x = 0$, la série se réduit à son premier terme et converge. Soit $x \neq 0$ et $u_n = \binom{2n}{n} x^n$, non nul. On calcule

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!\,(n!)^2}{(2n)!\,((n+1)!)^2}\,x = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\,x = \frac{2(2n+1)}{n+1}\,x, \qquad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4|x|.$$

La règle de d'Alembert n'étant pas un théorème du cours, on refait la comparaison géométrique de la remarque de la section 20.4.

— *Si* $|x| < \dfrac{1}{4}$, on choisit $q \in]4|x|\,, 1[$. À partir d'un rang N, $|u_{n+1}| \leqslant q|u_n|$, d'où $|u_n| \leqslant |u_N|\,q^{n-N}$ par récurrence. La série géométrique $\sum q^n$ converge : $\sum u_n$ est absolument convergente (théorème 3 et théorème 6).

— *Si* $|x| > \dfrac{1}{4}$, le rapport $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ est supérieur à 1 à partir d'un rang N : la suite $(|u_n|)_{n\geqslant N}$ est croissante et strictement positive, elle ne tend pas vers 0, et la série diverge grossièrement.

— *Si* $|x| = \dfrac{1}{4}$, la formule de Stirling (chapitre 10, théorème 6) donne

$$c_n = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}\,(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}}{4^n \cdot 2\pi n \cdot n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Pour $x = \dfrac{1}{4}$, $u_n = c_n > 0$ et $c_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$: la série diverge par le théorème 4, comme la série de Riemann d'exposant $\dfrac{1}{2}$. Pour $x = -\dfrac{1}{4}$, $u_n = (-1)^n c_n$, et $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} < 1$: la suite (c_n) décroît, et elle tend vers 0. Le critère des séries alternées (théorème 7) donne la convergence, qui n'est pas absolue puisque $\sum c_n$ diverge.

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 0}\binom{2n}{n}x^n \text{ converge } \iff -\frac{1}{4} \leqslant x < \frac{1}{4};\ \text{absolument } \iff |x| < \frac{1}{4};\ \text{semi-convergente en } x = -\frac{1}{4}}$$

Pour $n = 10^5$, on calcule $c_n\sqrt{\pi n} \approx 0{,}9999988$ ✓. On peut aussi obtenir l'équivalent sans Stirling : $c_n = \dfrac{2}{\pi}W_{2n}$, où W_{2n} est l'intégrale de Wallis du chapitre 18 (proposition 15), dont l'équivalent $W_{2n} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$ y a été établi : $\dfrac{2}{\pi}\sqrt{\dfrac{\pi}{4n}} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Piège. L'erreur la plus répandue est de conclure au bord $|x| = \dfrac{1}{4}$ à l'aide du rapport, qui tend vers 1 et ne dit rien. Il faut un équivalent du terme ; les deux bords ont alors des comportements différents, divergence en $\dfrac{1}{4}$ et semi-convergence en $-\dfrac{1}{4}$. On montrera en seconde année que la somme vaut $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$; numériquement, on trouve bien $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}70711$ en $x = -\dfrac{1}{4}$ et $\sqrt{2}$ en $x = \dfrac{1}{8}$.

EXERCICE 33 ⋆⋆

1. Le module d'un produit est le produit des modules, et $\left|1 + \dfrac{\mathrm{i}}{k}\right| = \sqrt{1 + \dfrac{1}{k^2}}$, donc

$$\ln|z_n| = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right), \qquad 0 \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \leqslant \frac{1}{k^2},$$

par l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ (chapitre 5). La série à termes positifs $\sum \ln\left(1 + \dfrac{1}{k^2}\right)$ converge par comparaison avec $\sum \dfrac{1}{k^2}$ (théorème 3) : $\ln|z_n|$ converge vers un réel L, et, par continuité de l'exponentielle,

$$\boxed{|z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \rho = \mathrm{e}^L > 0, \qquad 1 \leqslant \rho \leqslant \mathrm{e}^{\pi^2/12} \approx 2{,}277}$$

La majoration vient de $L \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$ (proposition 8). Numériquement, $\rho \approx 1{,}9173$; on peut montrer que $\rho = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}}$, ce qui dépasse le programme.

2. Comme $1 + \dfrac{\mathrm{i}}{k}$ a une partie réelle strictement positive, un argument en est $\theta_k = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{k} \in \left]0\,, \dfrac{\pi}{4}\right]$, et $z_n = |z_n|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi_n}$, où

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^{n}\theta_k = \sum_{k=1}^{n}\operatorname{Arctan}\frac{1}{k}.$$

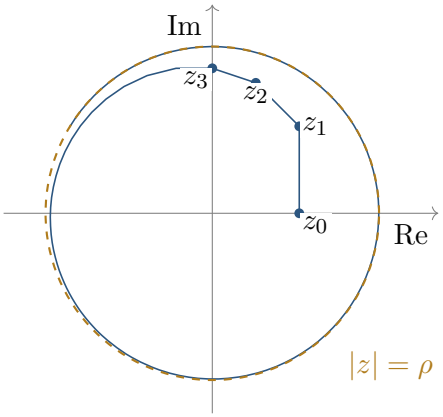
Comme $\operatorname{Arctan} x \sim x$ en 0, on a $\theta_k \sim \dfrac{1}{k}$, terme positif : la série $\sum \theta_k$ diverge (théorème 4), et Φ_n tend vers $+\infty$ en croissant.

Supposons que (z_n) converge vers un complexe z. Comme $|z_n| \to \rho > 0$, on aurait $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi_n} = \dfrac{z_n}{|z_n|} \to \dfrac{z}{\rho}$, et en particulier $\cos\Phi_n$ convergerait. Montrons que ce n'est pas le cas. Pour $j \geqslant 1$, soit p_j le plus petit entier n tel que $\Phi_n \geqslant (2j+1)\pi$; il existe puisque $\Phi_n \to +\infty$, et $p_j \geqslant 2$ puisque $\Phi_1 = \dfrac{\pi}{4}$. Par minimalité, $\Phi_{p_j-1} < (2j+1)\pi$, donc

$$(2j+1)\pi \leqslant \Phi_{p_j} = \Phi_{p_j-1} + \theta_{p_j} < (2j+1)\pi + \frac{\pi}{4}, \qquad \text{d'où} \qquad \cos\Phi_{p_j} \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

puisque le cosinus est majoré par $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[\pi\,,\dfrac{5\pi}{4}]$. De même, avec q_j le plus petit entier tel que $\Phi_n \geqslant 2j\pi$, on obtient $\cos\Phi_{q_j} \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Les suites (p_j) et (q_j) tendent vers $+\infty$ (sinon Φ_{p_j} resterait bornée), et les deux suites extraites de $(\cos\Phi_n)$ ne peuvent avoir la même limite.

$(|z_n|)$ converge, mais (z_n) diverge



La ligne brisée relie $z_0 = 1$, z_1, z_2, …, jusqu'à $z_{5\,500}$ environ. Elle s'approche du cercle de rayon ρ en le longeant, sans jamais s'arrêter : l'argument Φ_n, voisin de $\ln n + 0{,}30$, continue de croître, de plus en plus lentement.

À retenir. La convergence d'un produit de complexes se ramène à deux séries, celle des $\ln|1+w_k|$ pour le module et celle des arguments. Ici $\ln\left|1+\dfrac{\mathrm{i}}{k}\right| = O(\dfrac{1}{k^2})$, mais l'argument θ_k est de l'ordre de $\dfrac{1}{k}$: c'est la série harmonique, cachée dans les arguments, qui fait diverger le produit. L'erreur la plus répandue est de conclure à la convergence de (z_n) à partir de celle de $(|z_n|)$, alors que la convergence du module ne dit rien de l'argument.

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

Idée. Après division par le plus grand module r, seuls les termes de module 1 comptent quand k est grand : leur somme A_k, une combinaison de puissances k-ièmes de nombres de module 1, devrait tendre vers 0. Une telle somme peut s'annuler pour certains k, mais pas « en moyenne » : la moyenne de $|A_k|^2$ tend vers la somme des carrés des multiplicités.

Mise en place. Comme $\sum u_n$ converge, $u_n \to 0$ (proposition 2). Supposons par l'absurde que la suite (u_n) n'est pas nulle, et soit n_0 tel que $u_{n_0} \neq 0$. Seuls un nombre fini d'indices vérifient $|u_n| \geqslant |u_{n_0}|$, puisque $|u_n| \to 0$; le plus grand des modules correspondants est donc le plus grand de tous les $|u_n|$:

$$r = \max_{n\in\mathbb{N}} |u_n| > 0.$$

Pour $k \geqslant 1$, on a $|u_n^k| \leqslant r^{k-1}|u_n|$: les séries $\sum u_n^k$ sont absolument convergentes (proposition 9), ce qui donne un sens à l'hypothèse. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{r}$, de sorte que $|v_n| \leqslant 1$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^k = \frac{1}{r^k}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^k = 0$ pour tout $k \geqslant 1$.

Séparation des termes de module 1. L'ensemble $J = \{n \in \mathbb{N} \mid |v_n| = 1\}$ est fini, puisque $v_n \to 0$, et non vide. On note $w_1, \ldots, w_p$ les valeurs *distinctes* prises par v_n pour $n \in J$, et $c_j \geqslant 1$ le nombre d'indices $n \in J$ tels que $v_n = w_j$. Hors de J, on a $|v_n| < 1$, et seuls un nombre fini de ces modules dépassent $\frac{1}{2}$: le réel $\rho = \sup_{n \notin J} |v_n|$ (nul si $J = \mathbb{N}$, ce qui est en fait impossible) vérifie $\rho < 1$. Pour tout $k \geqslant 1$,

$$0 = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n^k = A_k + \varepsilon_k, \qquad A_k = \sum_{j=1}^{p} c_j w_j^k, \qquad |\varepsilon_k| = \Big| \sum_{n \notin J} v_n^k \Big| \leqslant \rho^{k-1} \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|.$$

Comme $\rho < 1$, ε_k tend vers 0, et donc

$$\boxed{A_k = \sum_{j=1}^{p} c_j w_j^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0}$$

Moyenne des carrés des modules. Pour $K \geqslant 1$, on pose $M_K = \dfrac{1}{K} \displaystyle\sum_{k=1}^{K} |A_k|^2$. Comme $|A_k|^2$ tend vers 0, le lemme de Cesàro (chapitre 10, proposition 16, appliqué à la suite $V_K = \displaystyle\sum_{k=1}^{K} |A_k|^2$, dont les accroissements tendent vers 0) donne $M_K \to 0$. Calculons M_K autrement. En développant $|A_k|^2 = A_k \overline{A_k}$, avec $\overline{w_l} = \dfrac{1}{w_l}$ puisque $|w_l| = 1$,

$$|A_k|^2 = \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=1}^{p} c_j c_l \left(w_j \overline{w_l}\right)^k = \sum_{j=1}^{p} c_j^2 + \sum_{j \neq l} c_j c_l \, q_{jl}^k, \qquad q_{jl} = w_j \overline{w_l}.$$

Pour $j \neq l$, on a $|q_{jl}| = 1$ et $q_{jl} \neq 1$, puisque $q_{jl} = 1$ équivaut à $w_j = w_l$. La somme géométrique vérifie alors

$$\Big| \sum_{k=1}^{K} q_{jl}^k \Big| = \Big| q_{jl} \, \frac{1 - q_{jl}^K}{1 - q_{jl}} \Big| \leqslant \frac{2}{|1 - q_{jl}|},$$

borne indépendante de K. En sommant sur k de 1 à K et en divisant par K,

$$M_K \geqslant \sum_{j=1}^{p} c_j^2 - \frac{B}{K}, \qquad B = \sum_{j \neq l} \frac{2 c_j c_l}{|1 - q_{jl}|}.$$

Quand K tend vers $+\infty$, on obtient $\lim M_K \geqslant \displaystyle\sum_j c_j^2 \geqslant 1$, ce qui contredit $M_K \to 0$.

$$\boxed{\text{si } \sum u_n \text{ est absolument convergente et } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^k = 0 \text{ pour tout } k \geqslant 1, \text{ alors } u_n = 0 \text{ pour tout } n}$$

Piège. L'erreur la plus répandue est de croire que $A_k \to 0$ est absurde terme à terme, en affirmant qu'une somme de nombres de module 1 ne peut pas être petite. Elle peut même être nulle : pour $w_1 = 1$ et $w_2 = -1$, avec $c_1 = c_2 = 1$, $A_k = 1 + (-1)^k$ s'annule pour tout k impair. C'est pourquoi on passe à la moyenne : dans cet exemple, M_K tend vers $c_1^2 + c_2^2 = 2$, ce que confirme le calcul numérique. Le regroupement des valeurs égales est aussi indispensable, sans quoi certains q_{jl} vaudraient 1.

À retenir. Pour une famille finie, le résultat est un énoncé d'algèbre : si $z_1, \ldots, z_N$ vérifient $\displaystyle\sum_i z_i^k = 0$ pour $k = 1, \ldots, N$, ils sont tous nuls ; on le démontre par les identités de Newton, qui expriment les coefficients du polynôme $\displaystyle\prod_i (X - z_i)$ à l'aide de ces sommes, et montrent que ce polynôme vaut X^N. Pour une infinité de termes, l'algèbre ne suffit plus, et c'est l'analyse qui prend le relais : la convergence absolue permet de négliger les petits termes, la moyenne de Cesàro de contrôler les grands. Le calcul de M_K est une forme discrète de l'orthogonalité de la famille trigonométrique rencontrée au chapitre 19.

EXERCICE 35 ⋆

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \dfrac{1+n^\alpha}{2+n^\alpha} = 1 - \dfrac{1}{2+n^\alpha}$, qui appartient à $[\frac{1}{2}, 1[$ (pour $n = 0$, on a $0^\alpha = 0$ puisque $\alpha > 0$, et $u_0 = \operatorname{Arccos}\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$). Le terme $u_n = \operatorname{Arccos} x_n$ est donc bien défini, et $u_n \in]0, \frac{\pi}{3}]$.

Monotonie et limite. La fonction $t \mapsto 1 - \dfrac{1}{2+t}$ est croissante sur $[0, +\infty[$ et la suite (n^α) est croissante, donc (x_n) est croissante ; comme Arccos est décroissante, la suite (u_n) est décroissante. De plus x_n tend vers 1, et Arccos est continue en 1, de valeur 0 : u_n tend vers 0.

Équivalent. Par définition, $\cos u_n = x_n$, soit $1 - \cos u_n = \dfrac{1}{2+n^\alpha}$. Comme u_n tend vers 0, le développement limité de cos (chapitre 10, théorème 5) donne $1 - \cos u_n \sim \dfrac{u_n^2}{2}$, d'où

$$\frac{u_n^2}{2} \sim \frac{1}{2+n^\alpha} \sim \frac{1}{n^\alpha}, \qquad \text{puis} \qquad \boxed{u_n \sim \frac{\sqrt{2}}{n^{\alpha/2}}}$$

par passage à la racine carrée, compatible avec les équivalents (chapitre 10, théorème 1). Pour $n = 10^8$ et $\alpha = 1$, on trouve $n^{1/2} u_n \approx 1{,}414\,213$ ✓.

Nature de $\sum u_n$. Les termes sont positifs, et le théorème 4 ramène la série à la série de Riemann d'exposant $\dfrac{\alpha}{2}$ (théorème 5) :

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge} \iff \alpha > 2}$$

Nature de $\sum (-1)^n u_n$. La suite (u_n) décroît et tend vers 0 : le critère des séries alternées (théorème 7) s'applique, quel que soit $\alpha > 0$.

$$\boxed{\sum (-1)^n u_n \text{ converge pour tout } \alpha > 0, \text{ absolument si et seulement si } \alpha > 2}$$

Pour $0 < \alpha \leqslant 2$, la série est donc semi-convergente.

2. Pour $n \geqslant 1$, on a $n + \sin n \geqslant 1 + \sin 1 > 0$ si $n = 1$, et $n + \sin n \geqslant n - 1 > 0$ si $n \geqslant 2$: le terme général est défini. Posons $a_n = \dfrac{1}{n + \sin n} > 0$. La formule $\sin p - \sin q = 2 \cos \dfrac{p+q}{2} \sin \dfrac{p-q}{2}$ (chapitre 4) donne

$$\big|\sin(n+1) - \sin n\big| = 2\Big|\cos\Big(n + \frac{1}{2}\Big)\Big| \sin\frac{1}{2} \leqslant 2 \sin\frac{1}{2} \approx 0{,}9589 < 1,$$

donc $(n+1) + \sin(n+1) - (n + \sin n) = 1 + \sin(n+1) - \sin n > 0$. La suite $(n + \sin n)$ est strictement croissante, et elle tend vers $+\infty$ puisqu'elle est minorée par $n - 1$. La suite (a_n) est donc décroissante de limite nulle, et le théorème 7 s'applique directement :

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n + \sin n} \text{ converge, et le théorème des séries alternées s'applique directement}}$$

La convergence n'est pas absolue, puisque $a_n \sim \dfrac{1}{n}$ (théorèmes 4 et 5) : la série est semi-convergente.

Piège. L'erreur la plus répandue est de croire que l'oscillation de $\sin n$ empêche la décroissance de (a_n). Elle ne l'empêche que si la perturbation varie, d'un rang au suivant, plus vite que le terme principal : ici le terme principal n augmente de 1 et la perturbation de moins de 0,96. Pour $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + \sin n}$, au contraire, $\sqrt{n}$ augmente de moins de $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, et la décroissance est en défaut, par exemple de $n = 1\,001$

à $n = 1\,002$; on revient alors à un développement asymptotique, comme dans l'exercice suivant. Ici, ce développement donnerait aussi le résultat :

$$\frac{(-1)^n}{n+\sin n} = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n \sin n}{n^2} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big),$$

où le premier terme relève du théorème 7 et les deux autres de la proposition 9.

EXERCICE 36 ⋆⋆

La méthode est celle de la remarque qui suit le théorème 7 : pour une série de signe variable, on écrit un développement asymptotique du terme général jusqu'à un reste qui est le terme général d'une série absolument convergente. Les termes qui restent sont alors soit de la forme $(-1)^n a_n$ avec (a_n) décroissante de limite nulle (théorème 7), soit de signe constant (théorèmes 3 et 4).

(a) Le terme $v_n = \mathrm{e} - (1+\frac{1}{n})^n$ est strictement positif, puisque $n\ln\big(1+\frac{1}{n}\big) < n\cdot\frac{1}{n} = 1$ (chapitre 5, $\ln(1+x) < x$ pour $x > 0$). Avec $h = \frac{1}{n}$, on a $\frac{1}{h}\ln(1+h) = 1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + O(h^3)$, et le développement de l'exponentielle donne

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = \mathrm{e}\cdot\exp\Big(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big) = \mathrm{e}\Big(1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big),$$

$$\text{d'où} \qquad \boxed{v_n = \frac{\mathrm{e}}{2n} - \frac{11\mathrm{e}}{24n^2} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)}$$

— *Convergence absolue.* On a $\dfrac{v_n}{n^\alpha} \sim \dfrac{\mathrm{e}}{2n^{\alpha+1}}$: la série converge absolument si et seulement si $\alpha+1 > 1$, c'est-à-dire $\alpha > 0$ (théorèmes 4 et 5).

— *Si* $\alpha \leqslant -1$, la valeur absolue du terme général est équivalente à $\frac{\mathrm{e}}{2}n^{-\alpha-1}$, qui tend vers $\frac{\mathrm{e}}{2}$ ou vers $+\infty$: la série diverge grossièrement (proposition 2).

— *Si* $-1 < \alpha \leqslant 0$, on écrit

$$\frac{(-1)^n v_n}{n^\alpha} = \frac{\mathrm{e}}{2}\cdot\frac{(-1)^n}{n^{\alpha+1}} + O\Big(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\Big).$$

Le premier terme donne une série convergente par le théorème 7, puisque $\alpha+1 > 0$; le second est le terme général d'une série absolument convergente (proposition 9), puisque $\alpha+2 > 1$. La série converge.

$$\boxed{\text{la série (a) converge} \iff \alpha > -1, \quad \text{absolument} \iff \alpha > 0}$$

(b) Pour $n \geqslant 2$, on factorise $\sqrt{n}$ au dénominateur et l'on développe $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + O(x^2)$ avec $x = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, qui tend vers 0 :

$$\frac{(-1)^n n^\alpha}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n n^\alpha}{\sqrt{n}}\Big(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big), \qquad \boxed{\frac{(-1)^n n^\alpha}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^{1/2-\alpha}} - \frac{1}{n^{1-\alpha}} + O\Big(\frac{1}{n^{3/2-\alpha}}\Big)}$$

— *Convergence absolue.* La valeur absolue du terme est équivalente à $n^{\alpha-1/2}$: la série converge absolument si et seulement si $\frac{1}{2} - \alpha > 1$, c'est-à-dire $\alpha < -\frac{1}{2}$.

— *Si* $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$, cette valeur absolue ne tend pas vers 0 : divergence grossière.

— *Si* $\alpha < \frac{1}{2}$, le premier terme donne une série convergente (théorème 7), et le reste une série absolument convergente, puisque $\frac{3}{2} - \alpha > 1$. Par linéarité (proposition 1), la série a la nature de $\sum \frac{1}{n^{1-\alpha}}$, qui converge si et seulement si $1-\alpha > 1$, soit $\alpha < 0$.

$$\boxed{\text{la série (b) converge } \iff \alpha < 0, \quad \text{absolument } \iff \alpha < -\frac{1}{2}}$$

Pour $\alpha = 0$, on retrouve exactement l'exemple de la remarque qui suit le théorème 7 : le terme est équivalent à $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, et pourtant la série diverge.

(c) On isole le terme $n\pi$ par la quantité conjuguée : pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\varepsilon_n = \sqrt{1+n^2\pi^2} - n\pi = \frac{1}{\sqrt{1+n^2\pi^2}+n\pi}, \qquad \sin\left(\sqrt{1+n^2\pi^2}\right) = \sin(n\pi+\varepsilon_n) = (-1)^n \sin\varepsilon_n.$$

Le dénominateur de ε_n est strictement croissant et tend vers $+\infty$: la suite (ε_n) décroît vers 0, à partir de $\varepsilon_0 = 1$. Comme sin est croissante sur $[0\,,1] \subset [0\,,\dfrac{\pi}{2}]$, la suite $(\sin\varepsilon_n)$ est positive, décroissante et de limite nulle, et le théorème 7 donne la convergence. Enfin $\sin\varepsilon_n \sim \varepsilon_n \sim \dfrac{1}{2\pi n}$: la convergence n'est pas absolue.

$$\boxed{\sum \sin\left(\sqrt{1+n^2\pi^2}\right) \text{ est semi-convergente}}$$

(d) Le même procédé, avec $n+\dfrac{1}{2}$ au lieu de $n\pi$, donne

$$\delta_n = \sqrt{n^2+n+1} - \left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{n^2+n+1-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n+\frac{1}{2}} = \frac{3/4}{\sqrt{n^2+n+1}+n+\frac{1}{2}}.$$

La suite (δ_n) décroît vers 0, de $\delta_0 = \dfrac{1}{2}$, et $\delta_n \sim \dfrac{3}{8n}$. Pour tout réel x, on a

$$\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}+x\right) = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = (-1)^{n+1}\sin x,$$

$$\boxed{\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right) = (-1)^{n+1}\sin(\pi\delta_n)}$$

avec $\pi\delta_n \in \left]0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$: la suite $\big(\sin(\pi\delta_n)\big)$ est décroissante de limite nulle, et la série converge par le théorème 7 (au signe global près). Comme $\sin(\pi\delta_n) \sim \dfrac{3\pi}{8n}$, elle n'est pas absolument convergente.

$$\boxed{\sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right) \text{ est semi-convergente}}$$

(e) Posons $c_n = (n!)^{1/n}$ pour $n \geqslant 1$. Comme $n! \leqslant n^n < (n+1)^n$, on a

$$\big((n+1)!\big)^n = (n!)^n(n+1)^n > (n!)^n \cdot n! = (n!)^{n+1},$$

et, en prenant la puissance $\dfrac{1}{n(n+1)}$, $c_{n+1} > c_n$: la suite (c_n) est croissante. Elle tend vers $+\infty$, puisque $\ln c_n = \dfrac{\ln(n!)}{n}$ et que $\ln(n!) \sim n\ln n$ (remarque qui suit la proposition 6). Ainsi $(\dfrac{1}{c_n})$ décroît vers 0, et la série converge par le théorème 7. Enfin $c_n \leqslant n$, puisque $n! \leqslant n^n$: on a $\dfrac{1}{c_n} \geqslant \dfrac{1}{n}$, et la série des valeurs absolues diverge par comparaison avec la série harmonique (théorème 3).

$$\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}} \text{ est semi-convergente}}$$

La formule de Stirling (chapitre 10, théorème 6) précise que $c_n \sim \dfrac{n}{\mathrm{e}}$, mais elle est inutile ici.

(f) Pour $n \geqslant 2$, posons $x_n = (\ln n)^a$. Le dénominateur $x_n + (-1)^n$ ne s'annule pas, puisque $x_n = 1$ équivaudrait à $n = \mathrm{e}$. Au lieu d'un développement, on écrit une identité exacte : pour $\varepsilon = \pm 1$, on a $\dfrac{\varepsilon}{x} - \dfrac{\varepsilon}{x+\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon^2}{x(x+\varepsilon)}$, d'où

$$\boxed{\frac{(-1)^n}{(\ln n)^a + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{x_n} - b_n, \qquad b_n = \frac{1}{x_n(x_n + (-1)^n)}}$$

La suite $(\dfrac{1}{x_n})$ décroît vers 0, puisque $a > 0$: la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{x_n}$ converge (théorème 7). Pour $n \geqslant 3$, on a $x_n > 1$, donc $b_n > 0$, et $b_n \sim \dfrac{1}{x_n^2} = \dfrac{1}{(\ln n)^{2a}}$. Par croissances comparées (chapitre 10, proposition 2), $\dfrac{(\ln n)^{2a}}{n}$ tend vers 0, donc $\dfrac{1}{(\ln n)^{2a}} \geqslant \dfrac{1}{n}$ à partir d'un certain rang : la série $\sum b_n$ diverge (théorèmes 3 et 4). Par linéarité, la série étudiée diverge, comme la différence d'une série convergente et d'une série divergente.

$$\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{(\ln n)^a + (-1)^n} \text{ diverge pour tout } a > 0}$$

(g) Si $n^a > 2$, on a $n^a + (-1)^n > 1$, et le terme est défini : il l'est donc à partir d'un certain rang, et la nature ne dépend pas de ce rang. On note $\varepsilon = (-1)^n$, $L_n = a \ln n$ et $\eta_n = \ln\left(1 + \varepsilon n^{-a}\right)$, de sorte que $\ln\left(n^a + \varepsilon\right) = L_n + \eta_n$. La même identité exacte qu'en (f) donne

$$\frac{\varepsilon}{L_n + \eta_n} = \frac{\varepsilon}{L_n} - c_n, \qquad c_n = \frac{\varepsilon \eta_n}{L_n(L_n + \eta_n)}.$$

Le réel $\varepsilon\eta_n$ est strictement positif : il vaut $\ln(1 + n^{-a})$ si n est pair et $-\ln(1 - n^{-a})$ si n est impair. Comme $\ln(1+x) \sim x$ en 0, on a $\varepsilon\eta_n \sim n^{-a}$, et $L_n + \eta_n \sim L_n$, d'où

$$\boxed{\frac{(-1)^n}{\ln\left(n^a + (-1)^n\right)} = \frac{(-1)^n}{a \ln n} - c_n, \qquad c_n > 0, \qquad c_n \sim \frac{1}{a^2\, n^a (\ln n)^2}}$$

La série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{a \ln n}$ converge par le théorème 7, et la série positive $\sum c_n$ a la nature de la série de Bertrand $\displaystyle\sum \frac{1}{n^a (\ln n)^2}$ (théorème 4) : par l'exercice 13, elle converge si et seulement si $a > 1$, ou $a = 1$ et $2 > 1$, c'est-à-dire si et seulement si $a \geqslant 1$. Enfin la valeur absolue du terme général est équivalente à $\dfrac{1}{a \ln n} \geqslant \dfrac{1}{n}$ pour n assez grand : la convergence n'est jamais absolue.

$$\boxed{\text{la série (g) converge } \iff a \geqslant 1, \quad \text{et elle n'est jamais absolument convergente}}$$

Les calculs de contrôle confirment l'identité et l'équivalent : pour $n = 10^{12}$, le rapport de c_n à $\dfrac{1}{a^2 n^a (\ln n)^2}$ vaut 1,000 00 pour $a = 1$ et $a = 2$ ✓.

À retenir. Dans les cas (f) et (g), le terme général est équivalent au terme d'une série alternée convergente, et pourtant la série peut diverger : c'est le piège annoncé par le cours après le théorème 4. Le terme correctif, de signe constant, est négligeable devant le terme principal, mais c'est lui qui décide de la nature. On a ici préféré une identité exacte à un développement asymptotique : elle évite d'avoir à contrôler un reste.

EXERCICE 37 ⋆⋆

1. Supposons u positive et $E(u)$ non vide. Soit $p \in E(u)$. La série $\sum u_n^p$ converge, donc u_n^p tend vers 0 (proposition 2), et $u_n = (u_n^p)^{1/p}$ aussi. À partir d'un certain rang, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, donc $0 \leqslant u_n^{p+1} \leqslant u_n^p$, et la série $\sum u_n^{p+1}$ converge par le théorème 3 : $p+1 \in E(u)$. La partie non vide $E(u)$ de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément $p_0 \geqslant 1$, et une récurrence immédiate donne

$$\boxed{E(u) = \emptyset \quad \text{ou} \quad E(u) = \{p \in \mathbb{N} \mid p \geqslant p_0\}, \quad p_0 = \min E(u)}$$

2. Pour $u_n = 1$, toutes les séries $\sum u_n^p$ divergent grossièrement : $\boxed{E(u) = \emptyset}$.

Soit $p_0 \geqslant 1$. On cherche $u_n = n^{-\beta}$, pour $n \geqslant 1$, avec $\beta > 0$: la série $\sum n^{-\beta p}$ converge si et seulement si $\beta p > 1$ (théorème 5). Il suffit donc que le seuil $\dfrac{1}{\beta}$ soit strictement compris entre $p_0 - 1$ et p_0, par exemple $\dfrac{1}{\beta} = p_0 - \dfrac{1}{2}$: pour un entier p, on a $p > p_0 - \dfrac{1}{2}$ si et seulement si $p \geqslant p_0$.

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n^{2/(2p_0-1)}} \quad : \quad E(u) = \{p \in \mathbb{N} \mid p \geqslant p_0\}}$$

Pour $p_0 = 1$, on obtient $u_n = \dfrac{1}{n^2}$, et toutes les séries $\sum \dfrac{1}{n^{2p}}$ convergent.

3. *Premier exemple.* Pour $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$, on a $u_n^p = \dfrac{(-1)^{np}}{(\ln(n+1))^p}$.

— Si p est pair, $u_n^p = \dfrac{1}{(\ln(n+1))^p}$. Par croissances comparées, $(\ln(n+1))^p \leqslant n+1$ à partir d'un certain rang, donc $u_n^p \geqslant \dfrac{1}{n+1}$, et la série diverge (théorème 3).

— Si p est impair, $u_n^p = \dfrac{(-1)^n}{(\ln(n+1))^p}$, et la suite $((\ln(n+1))^{-p})$ décroît vers 0 : la série converge par le théorème 7.

$$\boxed{E(u) = \{p \geqslant 1 \mid p \text{ impair}\}}$$

Cet ensemble n'est ni vide ni de la forme $\{p \geqslant p_0\}$: le résultat de la question 1 ne subsiste pas sans hypothèse de signe.

Second exemple. Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{1/3}}$. Comme $|x_n| \leqslant 2^{-1/3} < 1$, le terme $u_n = \ln(1+x_n)$ est bien défini. On a $x_n^2 = \dfrac{1}{n^{2/3}}$ et $x_n^3 = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, et le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 en 0 donne

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^{1/3}} - \frac{1}{2n^{2/3}} + \frac{(-1)^{n+1}}{3n} + O\Big(\frac{1}{n^{4/3}}\Big).$$

— $p = 1$: le premier et le troisième terme donnent des séries convergentes (théorème 7), le reste une série absolument convergente (proposition 9), et $\sum \dfrac{1}{2n^{2/3}}$ diverge : $\sum u_n$ diverge.

— $p = 2$: $u_n \sim x_n$, donc $u_n^2 \sim \dfrac{1}{n^{2/3}}$, de signe positif : $\sum u_n^2$ diverge (théorème 4).

— $p = 3$: on a $u_n - x_n = O(x_n^2)$ et $u_n^2 + u_n x_n + x_n^2 = O(x_n^2)$, donc

$$u_n^3 - x_n^3 = (u_n - x_n)(u_n^2 + u_n x_n + x_n^2) = O(x_n^4), \qquad u_n^3 = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + O\Big(\frac{1}{n^{4/3}}\Big),$$

et $\sum u_n^3$ converge (théorème 7 et proposition 9), sans convergence absolue.

— $p \geqslant 4$: $|u_n|^p \sim \dfrac{1}{n^{p/3}}$ avec $\dfrac{p}{3} > 1$: la série converge absolument.

$$\boxed{E(u) = \{p \in \mathbb{N} \mid p \geqslant 3\}}$$

Ce second ensemble a la forme de la question 1, mais pour une autre raison : le terme $-\dfrac{x_n^2}{2}$, de signe constant, fait diverger le cas $p = 1$, ce que la seule comparaison des modules ne laissait pas prévoir.

EXERCICE 38 ⋆⋆

Par le théorème 2, $\mathrm{e} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. En multipliant par $n!$ et en séparant les indices $k \leqslant n$ et $k > n$,

$$n!\,\mathrm{e} = a_n + r_n, \qquad a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}, \qquad r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}.$$

Parité de a_n. Chaque $\dfrac{n!}{k!} = (k+1)(k+2)\cdots n$ est un entier, donc $a_n \in \mathbb{N}$. Pour $n \geqslant 1$, on met n en facteur dans les termes d'indice $k \leqslant n-1$:

$$a_n = n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!} + 1 = n\,a_{n-1} + 1.$$

Montrons par récurrence que $a_n \equiv n+1\ [2]$. C'est vrai pour $n = 0$, puisque $a_0 = 1$. Si $a_{n-1} \equiv n\ [2]$, alors $a_n \equiv n^2 + 1 \equiv n+1\ [2]$, car $n^2 - n = n(n-1)$ est pair.

$$\boxed{a_n \equiv n+1\ [2]}, \qquad a_0, \ldots, a_5 = 1, 2, 5, 16, 65, 326\ \checkmark$$

Encadrement de r_n. Pour $j \geqslant 1$, $\dfrac{n!}{(n+j)!} = \dfrac{1}{(n+1)\cdots(n+j)}$, qui vaut $\dfrac{1}{n+1}$ pour $j = 1$ et est strictement inférieur à $\dfrac{1}{(n+1)^j}$ pour $j \geqslant 2$. En sommant (théorème 1 pour la série géométrique),

$$\frac{1}{n+1} < r_n < \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^j} = \frac{1}{n}, \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{1}{n+1} < r_n < \frac{1}{n}, \qquad r_n \sim \frac{1}{n}}$$

En particulier $r_{n+1} < \dfrac{1}{n+1} < r_n$: la suite (r_n) est strictement décroissante.

Nature de la série. Comme a_n est un entier de la parité de $n+1$, on a, pour tout réel x,

$$\sin(\pi a_n + x) = (-1)^{a_n} \sin x = (-1)^{n+1} \sin x, \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\sin(\pi\, n!\,\mathrm{e}) = (-1)^{n+1} \sin(\pi r_n)}$$

Pour $n \geqslant 2$, on a $\pi r_n \in \left]0\,, \dfrac{\pi}{2}\right[$, puisque $r_n < \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{2}$; la fonction sin est croissante sur cet intervalle, et $\big(\sin(\pi r_n)\big)_{n \geqslant 2}$ est décroissante, de limite nulle. Le théorème 7 donne la convergence. Enfin $\sin(\pi r_n) \sim \pi r_n \sim \dfrac{\pi}{n}$: la convergence n'est pas absolue.

$$\boxed{\textstyle\sum_{n \geqslant 1} \sin(\pi\, n!\,\mathrm{e}) \text{ est semi-convergente}}$$

On contrôle en précision élevée : $100 \sin(\pi \cdot 100!\,\mathrm{e}) \approx -3{,}1408$, proche de $(-1)^{101}\pi$ ✓.

Piège. Le rang compte : pour $n = 1$, $r_1 = \mathrm{e} - 2 \approx 0{,}718$ dépasse $\dfrac{1}{2}$, et l'argument de monotonie ne vaut qu'à partir de $n = 2$, ce qui ne change pas la nature. L'encadrement $0 < r_n < 1$ est exactement celui de la démonstration de l'irrationalité de e (chapitre 18, proposition 12) : si l'on avait $\mathrm{e} = \dfrac{p}{q}$, le réel $r_q = q!\,\mathrm{e} - a_q$ serait un entier de $]0\,, 1[$. Ici le même encadrement, rendu plus fin, dit à quelle vitesse $n!\,\mathrm{e}$ s'approche des entiers.

EXERCICE 39 ⋆⋆

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $I_k = \{n \geqslant 1 \mid \lfloor \ln n \rfloor = k\} = \{n \geqslant 1 \mid \mathrm{e}^k \leqslant n < \mathrm{e}^{k+1}\}$. C'est un intervalle d'entiers $[\![A_k\,;B_k]\!]$, non vide puisque $\mathrm{e}^{k+1} - \mathrm{e}^k > 1$, avec

$$\mathrm{e}^k \leqslant A_k < \mathrm{e}^k + 1, \qquad \mathrm{e}^{k+1} - 1 \leqslant B_k < \mathrm{e}^{k+1}.$$

Sur I_k, le terme général vaut $\dfrac{(-1)^k}{n}$, et la somme du paquet est $(-1)^k T_k$ avec $T_k = \displaystyle\sum_{n=A_k}^{B_k} \frac{1}{n}$. La méthode des rectangles (proposition 6 (ii)), appliquée à $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ à partir de $n_0 = A_k$, donne

$$\ln \frac{B_k+1}{A_k} \leqslant T_k \leqslant \frac{1}{A_k} + \ln \frac{B_k}{A_k}, \qquad \text{donc} \qquad 1 - \ln\left(1+\mathrm{e}^{-k}\right) \leqslant T_k \leqslant 1 + \mathrm{e}^{-k}.$$

Ainsi $\boxed{T_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1}$: pour $k = 8$, $T_8 \approx 1{,}0002$ ✓. Les intervalles I_k se suivent : en posant $a_0 = 0$ et $a_n = \dfrac{(-1)^{\lfloor \ln n \rfloor}}{n}$ pour $n \geqslant 1$, ce sont les paquets de l'exercice 6, avec $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(k) = A_k$ pour $k \geqslant 1$. Si la série convergeait, la question 1 de l'exercice 6 donnerait la convergence de la série des paquets $\sum (-1)^k T_k$, dont le terme général tendrait vers 0 ; or $|(-1)^k T_k| = T_k$ tend vers 1.

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{\lfloor \ln n \rfloor}}{n} \text{ diverge}}$$

Le terme général tend pourtant vers 0 et change de signe une infinité de fois : mais les plages de signe constant s'allongent si vite que chacune apporte une contribution voisine de ± 1.

2. Soit $f(t) = \dfrac{\sin(\ln t)}{t}$ sur $[1\,,+\infty[$, de sorte que le terme général est $a_n = (-1)^n f(n)$. La fonction f est dérivable, avec

$$f'(t) = \frac{\cos(\ln t) - \sin(\ln t)}{t^2}, \qquad |f'(t)| \leqslant \frac{2}{t^2}.$$

On regroupe les termes par paires : $a_1 = -f(1) = 0$, et pour $p \geqslant 1$, l'inégalité des accroissements finis (chapitre 9, théorème 6) sur $[2p\,,2p+1]$ donne

$$|a_{2p} + a_{2p+1}| = |f(2p) - f(2p+1)| \leqslant \frac{2}{(2p)^2} = \frac{1}{2p^2}.$$

Avec $a_0 = 0$ et $\varphi(p) = 2p$, la série des paquets est absolument convergente (proposition 9), et la somme des modules dans chaque paquet, majorée par $|f(2p)| + |f(2p+1)| \leqslant \dfrac{1}{p}$, tend vers 0. La question 3 de l'exercice 6 donne la convergence.

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{\sin(\ln n)}{n} \text{ converge}}$$

L'exercice 23 a montré que $\displaystyle\sum \frac{\sin(\ln n)}{n}$ diverge. La série étudiée ici n'est donc pas absolument convergente : sinon $\sum |f(n)|$ convergerait, et $\sum f(n)$ aussi (théorème 6). C'est l'alternance des signes, et elle seule, qui fait converger : les termes consécutifs $f(2p)$ et $f(2p+1)$ sont si proches qu'ils se compensent presque, alors que dans l'exercice 23 les plages où $\sin(\ln n)$ garde un signe constant sont trop longues. Numériquement, les sommes partielles d'indices 10^5 et 10^6 valent 0,158 09 et 0,158 10.

Piège. Le théorème 7 ne s'applique pas directement : la suite $(|f(n)|)$ n'est pas décroissante, puisque $|\sin(\ln n)|$ croît sur de longues plages. Le regroupement par paires remplace l'hypothèse de monotonie par une estimation de la différence de deux termes consécutifs.

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆

1. Soit $g(t) = \dfrac{\ln t}{t}$ sur $[1\,,+\infty[$, de dérivée $g'(t) = \dfrac{1-\ln t}{t^2}$, négative pour $t \geqslant \mathrm{e}$. La suite $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)_{n\geqslant 3}$ est donc décroissante, et elle tend vers 0 par croissances comparées. Le théorème 7, appliqué à partir du rang 3, donne

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{\ln n}{n} \text{ converge}}$$

Elle n'est pas absolument convergente, puisque $\dfrac{\ln n}{n} \geqslant \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 3$.

2. La fonction g est continue, positive et décroissante sur $[3\,,+\infty[$. Pour calculer son intégrale, on reconnaît la forme $u'u$ avec $u = \ln$, de primitive $\dfrac{u^2}{2}$:

$$\int_3^n \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{(\ln n)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2}.$$

Par la proposition 6 (iii), avec $n_0 = 3$, la suite $w_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln k}{k} - \int_3^n g$ converge vers un réel w. Comme le terme d'indice 1 est nul,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k} = \frac{\ln 2}{2} + w_n + \frac{(\ln n)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2}, \qquad \boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k} = \frac{(\ln n)^2}{2} + C + o(1)}$$

avec $C = \dfrac{\ln 2}{2} - \dfrac{(\ln 3)^2}{2} + w$. Numériquement, $C \approx -0{,}0728$; la valeur de C n'interviendra pas.

3. On note $L_m = \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{\ln k}{k}$. Dans la somme partielle d'indice $2n$, les termes d'indice pair, $k = 2j$, sont comptés positivement et les autres négativement ; on les ajoute deux fois et on les retranche une fois :

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{\ln k}{k} = 2\sum_{j=1}^{n}\frac{\ln(2j)}{2j} - L_{2n} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\ln 2 + \ln j}{j} - L_{2n}, \qquad \boxed{\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{\ln k}{k} = H_n\ln 2 + L_n - L_{2n}}$$

Par la question 2, puis la proposition 7, $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$,

$$L_n - L_{2n} = \frac{(\ln n)^2 - (\ln 2 + \ln n)^2}{2} + o(1) = -\ln 2\ln n - \frac{(\ln 2)^2}{2} + o(1),$$

$$H_n\ln 2 + L_n - L_{2n} = \gamma\ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2} + o(1).$$

La constante C et les termes en $\ln n$ disparaissent. La série converge par la question 1 ; sa somme est la limite de la suite extraite des sommes partielles d'indice pair :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n} = \gamma\ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2} \approx 0{,}159\,869}$$

Une sommation numérique accélérée redonne cette valeur à 10^{-25} près ✓.

Piège. La limite de (S_{2n}) ne suffit pas à elle seule : la suite (S_{2n}) peut converger sans que la série converge, comme pour $\sum(-1)^n$. C'est la question 1 qui permet de conclure, en garantissant que toute la suite (S_n) converge. Le calcul suit le même schéma que pour la série harmonique alternée, dont la somme partielle $S_{2n} = H_{2n} - H_n$ s'obtient aussi en séparant les indices pairs et impairs, et tend vers $\ln 2$ par la remarque qui suit la proposition 7.

EXERCICE 41 ⋆⋆⋆

1. On écrit $\dfrac{1}{k}$ comme l'intégrale de t^{k-1} sur $[0\,,1]$ et l'on somme une progression géométrique ; l'intégrale obtenue s'estime ensuite par une intégration par parties. Pour $t \in [0\,,1]$, la somme géométrique de raison $-t \neq 1$ donne

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} t^{k-1} = \frac{1-(-t)^n}{1+t}.$$

On intègre sur $[0\,,1]$, par linéarité, avec $\displaystyle\int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2$:

$$S_n = \ln 2 - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{R_n = (-1)^n I_n, \quad I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t}$$

On intègre par parties, en primitivant t^n en $\dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ et en dérivant $\dfrac{1}{1+t}$, les deux fonctions étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,,1]$:

$$I_n = \Big[\frac{t^{n+1}}{(n+1)(1+t)}\Big]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}\,\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{J_n}{n+1}, \qquad J_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}\,\mathrm{d}t}{(1+t)^2},$$

où l'intégrale J_n est encadrée par croissance de l'intégrale, puisque $\dfrac{1}{(1+t)^2} \in [0\,,1]$:

$$0 \leqslant J_n \leqslant \int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+2}, \qquad \frac{J_n}{n+1} = O\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \qquad \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n(n+1)}.$$

On en déduit :

$$\boxed{I_n = \frac{1}{2n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \qquad R_n = \frac{(-1)^n}{2n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)}$$

On contrôle : $n^2(I_n - \dfrac{1}{2n}) \approx -0{,}2500$ pour $n = 1\,000$ ✓.

2. Comme $S_n = \ln 2 - R_n$, on a $\exp(S_n) = 2\mathrm{e}^{-R_n}$, et

$$2 - \exp(S_n) = 2\big(1 - \mathrm{e}^{-R_n}\big).$$

Comme R_n tend vers 0, le développement $1-\mathrm{e}^{-x} = x + O(x^2)$ (chapitre 10, théorème 5) et $R_n = O(\dfrac{1}{n})$ donnent

$$2 - \exp(S_n) = 2R_n + O(R_n^2) = \frac{(-1)^n}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

La série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge (théorème 7) et le reste est le terme général d'une série absolument convergente (proposition 9). Enfin $|2 - \exp(S_n)| \sim \dfrac{1}{n}$: la convergence n'est pas absolue.

$$\boxed{\textstyle\sum_{n\geqslant 1} (2 - \exp(S_n)) \text{ est semi-convergente}}$$

Ses sommes partielles d'indices 10^5 et 10^6 valent $-0{,}607\,80$ et $-0{,}607\,80$ ✓.

À retenir. La seule majoration $|R_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ du théorème 7 (ii) ne suffisait pas : elle montre seulement que le terme général est un $O(\dfrac{1}{n})$, ce qui ne décide de rien. Il fallait le signe du reste, que donne aussi le théorème 7, et surtout son équivalent $\dfrac{1}{2n}$ avec un reste en $O(\dfrac{1}{n^2})$, que fournit la représentation intégrale.

EXERCICE 42 ⋆⋆⋆

1. On pose $V_{-1} = 0$, de sorte que $v_k = V_k - V_{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On développe, puis on décale l'indice dans la seconde somme :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = \sum_{k=0}^{n} u_k V_k - \sum_{k=0}^{n} u_k V_{k-1} = \sum_{k=0}^{n} u_k V_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} V_k.$$

On ajoute et on retranche $u_{n+1}V_n$, ce qui complète la seconde somme jusqu'à $k = n$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_{n+1}V_n - \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k)V_k}$$

C'est l'analogue discret de l'intégration par parties : V joue le rôle d'une primitive de v, et $u_{k+1} - u_k$ celui de la dérivée de u.

2. Soit (a_n) décroissante de limite nulle, donc positive. On applique la question 1 avec $u_k = a_k$ et $v_k = (-1)^k$: V_k vaut 1 si k est pair et 0 sinon, donc $0 \leqslant V_k \leqslant 1$. Le terme $a_{n+1}V_n$ tend vers 0. Pour la somme, $|(a_{k+1} - a_k)V_k| \leqslant a_k - a_{k+1}$, et la série télescopique $\sum(a_k - a_{k+1})$, à termes positifs, converge (proposition 4), puisque (a_n) converge. La série $\sum(a_{k+1} - a_k)V_k$ est donc absolument convergente (théorème 3), donc convergente (théorème 6). Les deux termes du membre de droite ont une limite :

$$\boxed{\textstyle\sum (-1)^n a_n \text{ converge}}$$

Cette démonstration ne donne ni l'encadrement de la somme ni le signe du reste du théorème 7 : elle ne remplace que la partie « convergence ».

3. Soit M un majorant de $(|V_n|)$. La suite réelle (u_n) décroît vers 0, donc $u_k - u_{k+1} \geqslant 0$. Le terme $u_{n+1}V_n$, produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle, tend vers 0. Enfin

$$\big|(u_{k+1} - u_k)V_k\big| \leqslant M(u_k - u_{k+1}),$$

terme général d'une série convergente, comme à la question 2. La transformation d'Abel conclut :

$$\boxed{(u_n) \text{ décroissante de limite nulle et } (V_n) \text{ bornée } \Longrightarrow \textstyle\sum u_n v_n \text{ converge}}$$

4. On distingue trois cas selon α.

— Si $\alpha \leqslant 0$, le terme général a pour module $n^{-\alpha} \geqslant 1$: divergence grossière.

— Si $\alpha > 1$, la série converge absolument (exemple qui suit la proposition 9).

— Si $0 < \alpha \leqslant 1$ et $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, le terme vaut $\dfrac{1}{n^\alpha}$, et la série diverge (théorème 5). Si $0 < \alpha \leqslant 1$ et $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$, et la somme géométrique (chapitre 4, factorisation par l'angle moitié) donne

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\Big| = \Big|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\Big| \leqslant \frac{2}{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|} = \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}.$$

Les sommes partielles de $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta})_{n\geqslant 1}$ sont bornées et $(\dfrac{1}{n^\alpha})_{n\geqslant 1}$ décroît vers 0 : la question 3, appliquée aux suites $u_k = \dfrac{1}{(k+1)^\alpha}$ et $v_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)\theta}$, donne la convergence. Elle n'est pas absolue, puisque le module du terme vaut $\dfrac{1}{n^\alpha}$.

$$\boxed{\textstyle\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n^\alpha} \text{ converge } \Longleftrightarrow\ \alpha > 1,\ \text{ou } 0 < \alpha \leqslant 1 \text{ et } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \text{ (semi-convergence)}}$$

Pour $\theta = 1$, la plus grande valeur de $\big|\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k}\big|$ pour $n < 2\,000$ vaut 2,085 83, et la borne $\dfrac{1}{\sin(1/2)}$ vaut 2,085 83 : la majoration est presque atteinte ✓.

5. Comme $0 < 1 < 2\pi$, on a $1 \notin 2\pi\mathbb{Z}$, et la série $\sum \dfrac{\mathrm{e}^{in}}{n}$ converge par la question 4. Ses parties réelle et imaginaire convergent donc (proposition 1 (iii)) : les séries $\sum \dfrac{\cos n}{n}$ et $\sum \dfrac{\sin n}{n}$ convergent.

Pour les valeurs absolues, on utilise $|\cos n| \leqslant 1$, qui donne $|\cos n| \geqslant \cos^2 n$, puis la linéarisation de $\cos^2 n$:

$$\frac{|\cos n|}{n} \geqslant \frac{\cos^2 n}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{\cos(2n)}{2n}.$$

La série $\sum \dfrac{\cos(2n)}{2n}$ converge, par la question 4 avec $\theta = 2 \notin 2\pi\mathbb{Z}$, et la série $\sum \dfrac{1}{2n}$ diverge : leur somme diverge, et, comme elle est à termes positifs, la série $\sum \dfrac{|\cos n|}{n}$ diverge par le théorème 3. De même, $|\sin n| \geqslant \sin^2 n = \dfrac{1 - \cos(2n)}{2}$ donne la divergence de $\sum \dfrac{|\sin n|}{n}$.

$$\boxed{\sum \frac{\cos n}{n} \text{ et } \sum \frac{\sin n}{n} \text{ convergent,} \quad \sum \frac{|\cos n|}{n} \text{ et } \sum \frac{|\sin n|}{n} \text{ divergent}}$$

Piège. L'erreur la plus répandue est de minorer $|\cos n|$ par une constante strictement positive, ce qui est faux, puisque $\cos n$ s'approche de 0 pour une infinité d'entiers. Le passage par $\cos^2 n$ contourne la difficulté : il remplace une minoration ponctuelle, impossible, par une minoration en moyenne, le terme $\cos(2n)$ ayant des sommes partielles bornées. On a ainsi deux nouvelles séries semi-convergentes, qui ne sont pas alternées : la transformation d'Abel étend le théorème 7 au-delà des signes alternés.

EXERCICE 43 ⋆⋆⋆

1. Montrons par récurrence que $u_n \in]0\,,1]$. C'est vrai pour $u_1 = 1$. Si $u_n \in]0\,,1] \subset]0\,,\dfrac{\pi}{2}[$, alors $\cos u_n \in]0\,,1]$, et, comme $n^\alpha \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{\cos u_n}{n^\alpha} \in]0\,,1]$.

On en déduit $0 < u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha}$, qui tend vers 0 puisque $\alpha > 0$: $\boxed{u_n \to 0}$. Alors $\cos u_n$ tend vers 1, et

$$u_{n+1} \sim \frac{1}{n^\alpha}, \qquad \text{donc} \qquad u_n \sim \frac{1}{(n-1)^\alpha} \sim \frac{1}{n^\alpha}.$$

La série $\sum u_n$ est à termes positifs ; par les théorèmes 4 et 5,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge} \iff \alpha > 1}$$

2. On note $d_n = u_n - u_{n+1}$ et $\rho_n = \max(u_n, u_{n+1})$, qui tend vers 0. On écrit $u_{n+2} = \dfrac{\cos u_{n+1}}{(n+1)^\alpha}$, et l'on fait apparaître $\cos u_n - \cos u_{n+1}$:

$$d_{n+1} = \frac{\cos u_n}{n^\alpha} - \frac{\cos u_{n+1}}{(n+1)^\alpha} = \cos(u_n)\Big(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\Big) + \frac{\cos u_n - \cos u_{n+1}}{(n+1)^\alpha}. \qquad (*)$$

Deux estimations servent. D'abord, l'égalité des accroissements finis (chapitre 9, théorème 5), appliquée à $t \mapsto t^{-\alpha}$ sur $[n\,,n+1]$, fournit $c \in]n\,,n+1[$ tel que $\dfrac{1}{n^\alpha} - \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} = \dfrac{\alpha}{c^{\alpha+1}}$, d'où

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{\alpha+1}} \leqslant \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}.$$

Ensuite, l'inégalité des accroissements finis (chapitre 9, théorème 6), appliquée à cos entre u_{n+1} et u_n, où $|\sin x| \leqslant x \leqslant \rho_n$, donne $|\cos u_n - \cos u_{n+1}| \leqslant \rho_n |d_n|$.

Domination. Par $(*)$, $|d_{n+1}| \leqslant \dfrac{\alpha}{n^{\alpha+1}} + \rho_n |d_n|$. On pose $D_n = n^{\alpha+1}|d_n|$; en multipliant par $(n+1)^{\alpha+1} \leqslant 2^{\alpha+1} n^{\alpha+1}$,

$$D_{n+1} \leqslant 2^{\alpha+1}(\alpha + \rho_n D_n).$$

Soit N tel que $2^{\alpha+1}\rho_n \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour $n \geqslant N$, et $M = \max\left(D_N, 2^{\alpha+2}\alpha\right)$. Si $D_n \leqslant M$ pour un $n \geqslant N$, alors $D_{n+1} \leqslant 2^{\alpha+1}\alpha + \dfrac{M}{2} \leqslant \dfrac{M}{2} + \dfrac{M}{2} = M$. Par récurrence, $D_n \leqslant M$ pour tout $n \geqslant N$:

$$\boxed{u_n - u_{n+1} = O\Big(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\Big)}$$

Décroissance. On revient à $(*)$: le premier terme est au moins $\cos(1)\dfrac{\alpha}{(n+1)^{\alpha+1}}$, puisque $u_n \leqslant 1$, et le second est majoré en valeur absolue par $\rho_n|d_n| \leqslant \dfrac{\rho_n M}{n^{\alpha+1}}$ pour $n \geqslant N$. Ainsi

$$(n+1)^{\alpha+1}d_{n+1} \geqslant \alpha\cos 1 - 2^{\alpha+1}\rho_n M \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha\cos 1 > 0.$$

Le membre de droite est strictement positif à partir d'un certain rang, donc $d_{n+1} > 0$: la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang. Le même calcul montre d'ailleurs que $d_{n+1} \sim \dfrac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$, puisque $\cos u_n \to 1$. Numériquement, (u_n) décroît à partir de $n = 9$ pour $\alpha = 0{,}1$, de $n = 5$ pour $\alpha = 0{,}2$, de $n = 3$ pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$, et dès $n = 1$ pour $\alpha \geqslant 1$ ✓.

3. À partir d'un certain rang, (u_n) est décroissante et de limite nulle : le théorème 7, appliqué à partir de ce rang, donne la convergence. La convergence absolue est celle de $\sum u_n$, étudiée à la question 1.

$$\boxed{\sum(-1)^n u_n \text{ converge pour tout } \alpha > 0, \text{ absolument si et seulement si } \alpha > 1}$$

Piège. L'erreur la plus répandue est de partir d'un développement de u_n. Comme $u_n = O(\dfrac{1}{n^\alpha})$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{n^\alpha}\Big(1 - \frac{u_n^2}{2} + O(u_n^4)\Big) = \frac{1}{n^\alpha} + O\Big(\frac{1}{n^{3\alpha}}\Big), \qquad (-1)^n u_n = \frac{(-1)^n}{(n-1)^\alpha} + O\Big(\frac{1}{n^{3\alpha}}\Big),$$

et le reste n'est le terme d'une série absolument convergente que si $3\alpha > 1$. Pousser le développement ne fait que déplacer le seuil, en $\dfrac{1}{5}$, puis $\dfrac{1}{7}$, et ainsi de suite, sans jamais couvrir tous les $\alpha > 0$. L'argument de monotonie, lui, règle tous les cas d'un coup : quand le théorème 7 s'applique, il est plus fort qu'un développement.

EXERCICE 44 ⋆⋆⋆

1. Supposons que $\sum u_n^+$ converge. Comme $u_n^- = u_n^+ - u_n$ et que $\sum u_n$ converge, la série $\sum u_n^-$ converge par linéarité (proposition 1), puis $\sum|u_n| = \sum(u_n^+ + u_n^-)$ aussi : la série serait absolument convergente, ce qui est exclu. De même, si $\sum u_n^-$ convergeait, $u_n^+ = u_n + u_n^-$ donnerait la convergence de $\sum u_n^+$, puis celle de $\sum|u_n|$.

$$\boxed{\sum u_n^+ \text{ et } \sum u_n^- \text{ divergent}}$$

Si P était fini, u_n^+ serait nul à partir d'un certain rang, et $\sum u_n^+$ convergerait ; de même pour N et u_n^-. Les ensembles P et N sont donc infinis. On note $p_0 < p_1 < \cdots$ les éléments de P et $n_0 < n_1 < \cdots$ ceux de N, rangés dans l'ordre croissant. Les termes u_n^+ sont nuls hors de P et valent u_{p_j} en p_j : par la proposition 10, $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} u_{p_j} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ = +\infty$, et de même $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}|u_{n_j}| = +\infty$. Retirer un nombre fini de termes ne change pas cette divergence. Enfin u_n tend vers 0, puisque la série converge (proposition 2).

2. La construction se formule ainsi : on note $T_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} u_{\varphi(j)}$ la somme des termes déjà choisis $(T_0 = 0)$; si $T_k \leqslant S$, on prend pour $\varphi(k)$ le plus petit élément de P non encore utilisé, et si $T_k > S$, le plus petit élément de N non encore utilisé. C'est exactement la règle de l'énoncé.

La construction ne s'arrête jamais. Comme P et N sont infinis, il reste toujours des indices non utilisés dans chacun : $\varphi(k)$ est défini pour tout k.

On change de camp une infinité de fois. Supposons qu'à partir d'un rang K, on ne prenne plus que des indices de P. Ce sont alors les éléments consécutifs $p_J, p_{J+1}, \dots$ de P, et $T_k = T_K + \sum_{j=J}^{J+k-K-1} u_{p_j}$ tend vers $+\infty$ par la question 1 ; mais on ne choisit un indice de P que si $T_k \leqslant S$, ce qui est contradictoire. De même, si l'on ne prenait plus que des indices de N, on aurait $T_k > S$ pour tout $k \geqslant K$, alors que T_k tend vers $-\infty$.

Bijectivité. L'application φ est injective : un indice n'est jamais choisi deux fois, puisque l'on prend un indice non encore utilisé. Les indices de P sont choisis dans l'ordre croissant, et une infinité le sont : le j-ième choisi est p_j, et tout élément de P est atteint. De même pour N. Comme $P \cup N = \mathbb{N}$, l'application φ est surjective.

$$\boxed{\varphi \text{ est une bijection de } \mathbb{N} \text{ sur } \mathbb{N}}$$

3. *Chaque terme rapproche de S, sauf au moment d'un franchissement.* Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $T_k \leqslant S$, on ajoute $u_{\varphi(k)} \geqslant 0$; si $T_k > S$, on ajoute $u_{\varphi(k)} < 0$. Dans les deux cas, si T_k et T_{k+1} sont du même côté de S (au sens : tous deux $\leqslant S$, ou tous deux $> S$), alors $|T_{k+1} - S| \leqslant |T_k - S|$. S'ils sont de part et d'autre, on dit qu'il y a franchissement au rang $k+1$; comme S est alors compris entre T_k et $T_{k+1} = T_k + u_{\varphi(k)}$,

$$|T_{k+1} - S| \leqslant |u_{\varphi(k)}|.$$

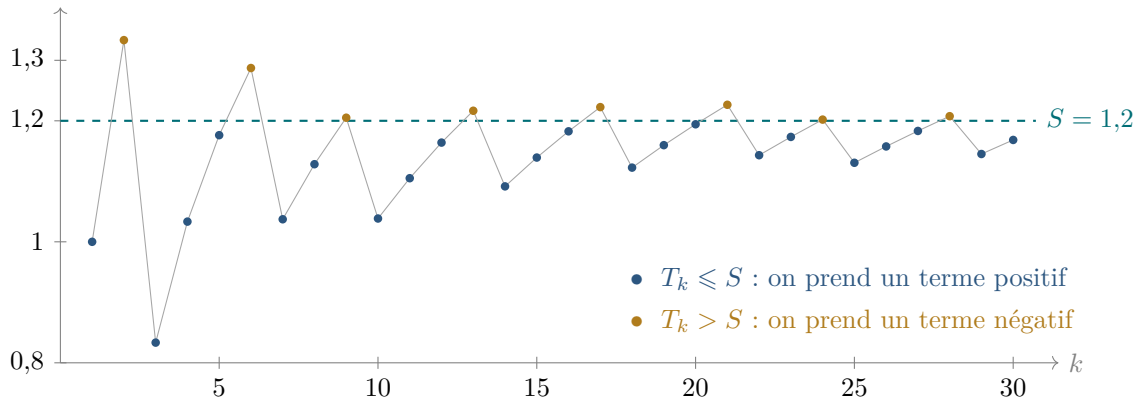
Majoration de l'écart. Par la question 2, il y a une infinité de franchissements. Pour k supérieur au premier rang de franchissement, on note $f(k) \leqslant k$ le dernier rang de franchissement inférieur ou égal à k. Entre $f(k)$ et k, il n'y a pas de franchissement, donc l'écart à S ne fait que décroître :

$$\boxed{|T_k - S| \leqslant |T_{f(k)} - S| \leqslant |u_{\varphi(f(k)-1)}|}$$

Le terme $u_{\varphi(f(k)-1)}$ est le dernier terme qui précède un changement de signe des termes choisis, comme le suggérait l'énoncé.

Passage à la limite. La suite $(f(k))$ est croissante au sens large et tend vers $+\infty$, puisque les franchissements sont en nombre infini. Il reste à voir que $u_{\varphi(m)}$ tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$; l'ensemble $A = \{n \mid |u_n| \geqslant \varepsilon\}$ est fini, puisque $u_n \to 0$, et son image réciproque $\varphi^{-1}(A)$ aussi, puisque φ est injective : pour m supérieur au plus grand élément de $\varphi^{-1}(A)$, $|u_{\varphi(m)}| < \varepsilon$. Ainsi T_k tend vers S :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\varphi(k)} = S}$$



La figure montre les sommes T_k, pour k de 1 à 30, lorsque l'on réordonne la série harmonique alternée $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$, de somme $\ln 2$, pour viser $S = 1{,}2$. Les points bleus sont sous la droite, et l'on y ajoute un terme positif ; les points ocre sont au-dessus, et l'on y ajoute un terme négatif. Les sauts

au moment des franchissements, qui majorent l'écart à S, diminuent au fil des termes. L'ordre obtenu commence par $u_0, u_2, u_1, u_4, u_6, u_8, u_3, \dots$, et $T_{60\,000} \approx 1{,}199\,998$ ✓.

4. Pour $S = +\infty$, on vise des paliers croissants. On prend des indices de P, dans l'ordre croissant, jusqu'à ce que la somme dépasse strictement 1, puis un seul indice de N ; puis des indices de P (éventuellement aucun) jusqu'à ce que la somme dépasse strictement 2, puis un seul indice de N, et ainsi de suite, le palier m étant suivi du palier $m+1$.

Chaque phase positive s'achève, puisque les termes de P restants ont une somme infinie (question 1). On prend un indice de N par palier, donc une infinité ; et une infinité d'indices de P, sinon la somme ne ferait que décroître à partir d'un certain rang tout en devant dépasser chaque palier. Comme à la question 2, φ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.

Soit $c = \sup_n |u_n|$, fini puisque (u_n) converge, et $m \geqslant 1$. Soit k un rang postérieur au premier dépassement du palier m, et $m' \geqslant m$ le dernier palier dépassé avant le rang k. Si T_k est la somme obtenue au moment de ce dépassement, $T_k > m'$. Sinon, T_k s'obtient à partir de cette somme en ajoutant l'unique terme négatif u_n du palier, puis des termes positifs : $T_k \geqslant m' + u_n \geqslant m' - c$. Dans tous les cas, $T_k \geqslant m - c$ pour k assez grand, et ceci pour tout m :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\varphi(k)} = +\infty}$$

Le cas $S = -\infty$ s'en déduit en échangeant les rôles de P et N.

À retenir. Toute la démonstration repose sur deux faits : les termes positifs et les termes négatifs ont chacun une somme infinie, ce qui permet de franchir S aussi souvent qu'on le veut, et le terme général tend vers 0, ce qui rend les franchissements de plus en plus fins. Pour une série absolument convergente, le premier fait tombe, et la proposition 13 (iv) du cours montre que l'ordre est alors indifférent.

Familles sommables de réels positifs

EXERCICE 45 ⋆

Les trois familles sont positives : on calcule leur somme dans $[0, +\infty]$, par paquets (théorème 8) ou par lignes (théorème 9), et la sommabilité se lit sur le résultat.

(a) On regroupe les couples selon la valeur de $k = n+m$. Le paquet $\{(n,m) \mid n+m=k\}$ contient les $k+1$ couples $(n, k-n)$, $0 \leqslant n \leqslant k$, et la somme géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ (théorème 1) donne

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{2^n 3^{k-n}}{k!} = \frac{3^k}{k!} \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{3^k}{k!} \cdot \frac{1-(2/3)^{k+1}}{1/3} = \frac{3^{k+1} - 2^{k+1}}{k!}.$$

Par le théorème 8, puis le théorème 2 (série exponentielle) et la linéarité, les deux séries étant convergentes,

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \frac{2^n 3^m}{(n+m)!} = 3 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} = 3\mathrm{e}^3 - 2\mathrm{e}^2.$$

$$\boxed{\text{la famille (a) est sommable, de somme } 3\mathrm{e}^3 - 2\mathrm{e}^2 \approx 45{,}478}$$

La somme des termes pour $n, m < 80$ redonne $45{,}478\,498\,57$ ✓.

(b) On somme par lignes (théorème 9). Pour $n \geqslant 1$ fixé, la ligne contient le terme $m = n+1$, qui vaut $\dfrac{1}{(n+1)^2 - n^2} = \dfrac{1}{2n+1}$; par positivité, la somme de la ligne est au moins $\dfrac{1}{2n+1}$ (proposition 10 (iii)). Comme $\sum \dfrac{1}{2n+1}$ diverge (théorème 4, $\dfrac{1}{2n+1} \sim \dfrac{1}{2n}$),

$$\sum_{\substack{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ n\neq m}} \frac{1}{|n^2 - m^2|} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} = +\infty, \qquad \boxed{\text{la famille (b) n'est pas sommable}}$$

Chaque ligne est pourtant de somme finie, puisque ses termes sont équivalents à $\dfrac{1}{m^2}$: c'est la somme des lignes qui diverge, comme dans la remarque de la section 20.6.4.

(c) Les rationnels $r_q = 1 + \dfrac{1}{q}$, pour $q \geqslant 1$, sont deux à deux distincts et appartiennent à $\mathbb{Q} \cap]1\,,2]$, donc vérifient $\dfrac{1}{r_q^2} \geqslant \dfrac{1}{4}$. Pour tout N, la partie finie $\{r_1, \dots, r_N\}$ donne une somme finie au moins égale à $\dfrac{N}{4}$: la borne supérieure des sommes finies est $+\infty$.

$$\boxed{\text{la famille (c) n'est pas sommable}}$$

Piège. Pour (c), l'erreur la plus répandue est de comparer avec la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$, comme si les rationnels étaient espacés comme les entiers. Or ils s'accumulent : il y en a une infinité dans $]1\,,2]$, où le terme reste supérieur à $\dfrac{1}{4}$. En général, une famille positive sommable n'a, pour tout $\varepsilon > 0$, qu'un nombre fini de termes supérieurs à ε : si F est une partie finie de tels indices, $\varepsilon \operatorname{card} F \leqslant \sum_F u_i \leqslant \sum_I u_i$.

EXERCICE 46 ⋆

Si $\alpha \leqslant 0$, tous les termes valent au moins 1, et la famille, infinie, n'est pas sommable. Supposons $\alpha > 0$. Par le théorème 9, on somme d'abord en p, pour $n \geqslant 2$ fixé : c'est une série géométrique de raison $n^{-\alpha} \in]0\,,1[$ (théorème 1),

$$\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha p}} = \frac{n^{-2\alpha}}{1 - n^{-\alpha}} = \frac{1}{n^\alpha(n^\alpha - 1)} \sim \frac{1}{n^{2\alpha}}.$$

Par les théorèmes 4 et 5, la série de ces sommes converge si et seulement si $2\alpha > 1$.

$$\boxed{\left(\frac{1}{n^{\alpha p}}\right)_{n\geqslant 2,\, p\geqslant 2} \text{ est sommable } \iff \alpha > \frac{1}{2}}$$

Pour $\alpha = 1$, c'est, à l'échange des noms des indices près, la famille $\left(\dfrac{1}{k^n}\right)_{n\geqslant 2,\, k\geqslant 2}$ de l'exemple du cours, et l'on retrouve $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 = \sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1)$. En sommant dans l'autre ordre, on obtient pour $\alpha > \dfrac{1}{2}$ l'identité $\displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty} (\zeta(\alpha p) - 1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha(n^\alpha - 1)}$, où l'on note $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$ pour $s > 1$.

À retenir. Le seuil $\alpha > \dfrac{1}{2}$ se lit sur la seule colonne $p = 2$, dont la somme est $\zeta(2\alpha) - 1$: elle est finie si et seulement si $2\alpha > 1$, et les autres colonnes sont plus petites. Pour $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$, l'identité précédente n'a plus de sens, puisque $\zeta(2\alpha)$ n'est pas défini.

EXERCICE 47 ⋆

1. On considère la famille positive $(w_{p,n})$ indexée par $(\mathbb{N}^*)^2$, avec $w_{p,n} = \dfrac{p\,a_n}{n(n+1)}$ si $p \leqslant n$ et $w_{p,n} = 0$ sinon. Le théorème 9 permet d'intervertir les sommes dans $[0\,,+\infty]$. En sommant d'abord en n, on trouve $\sum_n w_{p,n} = b_p$; en sommant d'abord en p, on trouve, pour n fixé,

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{p\,a_n}{n(n+1)} = \frac{a_n}{n(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{a_n}{2}.$$

Ainsi $\sum_p b_p = \frac{1}{2}\sum_n a_n$ dans $[0\,,+\infty]$; le second membre est fini, donc la série à termes positifs $\sum b_p$ converge (proposition 10 (ii)) :

$$\boxed{\sum b_p \text{ converge et } \sum_{p=1}^{+\infty} b_p = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n}$$

Pour $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, on trouve numériquement 0,822 467, qui est bien $\dfrac{\pi^2}{12}$ ✓.

2. Le même échange, pour la famille positive $(\frac{1}{n^{p+1}})_{1\leqslant m\leqslant n}$, donne dans $[0\,,+\infty]$, puisque l'indice m prend n valeurs pour n fixé,

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{1}{n^{p+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{n^{p+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^{p+1}}, \qquad \boxed{\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{1}{n^{p+1}} = \zeta(p)}$$

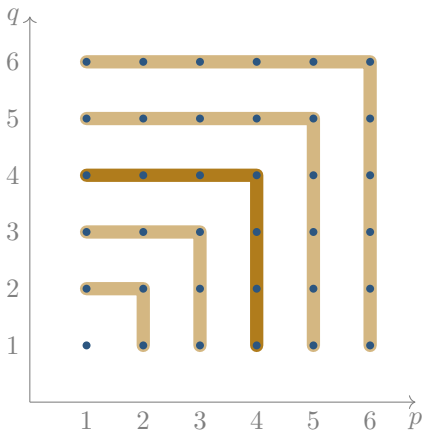
qui est fini puisque $p \geqslant 2$ (théorème 5). Pour $p = 2$, on obtient $\dfrac{\pi^2}{6}$ par la proposition 8 ✓. Pour $p = 1$, le même calcul donne $+\infty$: chaque reste $\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ est équivalent à $\frac{1}{m}$ (théorème 5), et leur somme diverge comme la série harmonique.

EXERCICE 48 ⋆⋆

Si $\alpha \leqslant 0$, on a $p^\alpha + q^\alpha \leqslant 2$, et tous les termes valent au moins $\frac{1}{2}$: la famille n'est pas sommable. Supposons $\alpha > 0$, et notons $M = \max(p,q)$. Par croissance de $t \mapsto t^\alpha$,

$$M^\alpha \leqslant p^\alpha + q^\alpha \leqslant 2M^\alpha, \qquad \text{donc} \qquad \frac{1}{2M^\alpha} \leqslant \frac{1}{p^\alpha+q^\alpha} \leqslant \frac{1}{M^\alpha}.$$

Pour $N \geqslant 1$, le paquet $J_N = \{(p,q) \mid \max(p,q) = N\}$ contient $2N-1$ couples : les N couples (N,q) avec $q \leqslant N$ et les $N-1$ couples (p,N) avec $p < N$.



paquet $\max(p,q) = 4$: 7 couples

Les points bleus sont les indices (p,q), et chaque équerre ocre réunit les $2N-1$ indices du paquet $\max(p,q) = N$; on y lit que le paquet $N = 4$ compte $4+3 = 7$ couples. Sur chaque équerre, le terme général est comparable à $\dfrac{1}{N^\alpha}$, à un facteur 2 près.

Par le théorème 8 et la croissance (proposition 10 (iii)), la somme de la famille est comprise, dans $[0\,,+\infty]$, entre

$$\sum_{N=1}^{+\infty}\frac{2N-1}{2N^\alpha} \qquad \text{et} \qquad \sum_{N=1}^{+\infty}\frac{2N-1}{N^\alpha}.$$

Ces deux séries ont pour terme général un équivalent de $\dfrac{1}{N^{\alpha-1}}$ et $\dfrac{2}{N^{\alpha-1}}$: elles convergent si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ (théorèmes 4 et 5).

$$\boxed{\Big(\frac{1}{p^\alpha + q^\alpha}\Big)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \text{ est sommable } \iff \alpha > 2}$$

On retrouve le seuil de la famille $\big(\dfrac{1}{(p+q)^\alpha}\big)$ de la section 20.6.4, et ce n'est pas un hasard : on a $M \leqslant p+q \leqslant 2M$, et les trois quantités $p^\alpha + q^\alpha$, $(p+q)^\alpha$ et $\max(p,q)^\alpha$ sont comparables à des constantes près. En dimension deux, le nombre d'indices « à distance N » de l'origine croît comme N, d'où le seuil 2 au lieu de 1.

EXERCICE 49 ⋆⋆

On regroupe les couples $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ selon la valeur de $d = p \wedge q \geqslant 1$, en notant I_d le paquet correspondant. Si $p \wedge q = d$, on écrit $p = dp'$ et $q = dq'$, et la proposition 5 du chapitre 12 donne $d = d(p' \wedge q')$, soit $p' \wedge q' = 1$. Réciproquement, si $p' \wedge q' = 1$, alors $(dp') \wedge (dq') = d$. L'application $(p',q') \mapsto (dp', dq')$ est donc une bijection de I_1 sur I_d, et, par la proposition 10 (iv) et la proposition 11, la somme de la famille sur I_d vaut

$$\sum_{(p,q)\in I_d} \frac{1}{p^2q^2} = \sum_{(p',q')\in I_1} \frac{1}{d^4p'^2q'^2} = \frac{S}{d^4}, \qquad \text{où} \qquad S = \sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ p\wedge q=1}} \frac{1}{p^2q^2}.$$

La somme sur $(\mathbb{N}^*)^2$ entier vaut $\zeta(2)^2$ (premier exemple de la méthode de la section 20.6.3). Par le théorème 8, dans $[0\,,+\infty]$,

$$\zeta(2)^2 = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{S}{d^4} = S\,\zeta(4).$$

Le réel S est fini, puisque $S \leqslant \zeta(2)^2$ par la proposition 10 (iii), et l'on peut diviser par $\zeta(4) > 0$:

$$\boxed{S = \frac{\zeta(2)^2}{\zeta(4)}} \qquad \text{et, avec } \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},\ \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} : \qquad \boxed{S = \frac{\pi^4/36}{\pi^4/90} = \frac{5}{2}}$$

La somme des termes pour p, $q \leqslant 3\,000$ vaut 2,4991 ✓. Le résultat se lit ainsi : les couples premiers entre eux portent la fraction $\dfrac{1}{\zeta(4)} = \dfrac{90}{\pi^4} \approx 0{,}924$ de la masse totale $\zeta(2)^2$, beaucoup plus que la proportion $\dfrac{6}{\pi^2} \approx 0{,}61$ de couples premiers entre eux que l'exercice 60, plus loin, établira, parce que les poids $\dfrac{1}{p^2q^2}$ privilégient les petits entiers, qui sont souvent premiers entre eux.

EXERCICE 50 ⋆⋆⋆

La famille est positive : toutes les sommes se calculent dans $[0\,,+\infty]$, et la sommabilité se constatera à la fin.

Première égalité : sommation en m. Pour $n \geqslant 1$ fixé, on décompose en éléments simples la fraction en m :

$$\frac{1}{m(n+m)} = \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{m} - \frac{1}{n+m}\Big).$$

La somme partielle jusqu'à M de la série en m est télescopique par blocs de n termes :

$$\sum_{m=1}^{M} \Big(\frac{1}{m} - \frac{1}{n+m}\Big) = H_M - (H_{n+M} - H_n) = H_n - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{M+j},$$

et la dernière somme, majorée par $\dfrac{n}{M}$, tend vers 0 quand M tend vers $+\infty$. La somme de la ligne n vaut donc $\dfrac{H_n}{n^2}$, et le théorème 9 donne

$$\boxed{\sum_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{nm(n+m)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n^2}}$$

Comme $H_n \leqslant 1 + \ln n$ (proposition 6 (ii)), on a $\dfrac{H_n}{n^2} = O(\dfrac{\ln n}{n^2}) = o(\dfrac{1}{n^{3/2}})$, et cette série converge (théorème 3) : la famille est sommable.

Deuxième égalité : paquets selon $s = n+m$. Pour $s \geqslant 2$, le paquet $\{n+m = s\}$ contient les couples $(n, s-n)$, $1 \leqslant n \leqslant s-1$. La décomposition $\dfrac{1}{n(s-n)} = \dfrac{1}{s}(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{s-n})$ donne

$$\sum_{n=1}^{s-1} \frac{1}{n(s-n)s} = \frac{1}{s^2} \sum_{n=1}^{s-1} \Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{s-n}\Big) = \frac{2H_{s-1}}{s^2},$$

les deux sommes valant H_{s-1}, la seconde après le changement d'indice $n \mapsto s-n$. Par le théorème 8, puis le décalage $s = n+1$,

$$\boxed{\sum_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{nm(n+m)} = \sum_{s=2}^{+\infty} \frac{2H_{s-1}}{s^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^2}}$$

Troisième égalité. On note $X = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n^2}$, réel fini par la première étape. Comme $H_{s-1} = H_s - \dfrac{1}{s}$ et que le terme $s = 1$ de la série suivante est nul ($H_0 = 0$),

$$\sum_{s=2}^{+\infty} \frac{H_{s-1}}{s^2} = \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{H_s - 1/s}{s^2} = X - \zeta(3),$$

la soustraction étant légitime puisque les deux séries convergent. Les deux premières égalités donnent alors $X = 2(X - \zeta(3))$, d'où, puisque X est fini,

$$\boxed{\sum_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{nm(n+m)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n^2} = 2\zeta(3) \approx 2{,}404\,11}$$

La somme partielle de $\displaystyle\sum \frac{H_n}{n^2}$ jusqu'à 10^6, complétée par l'estimation $\dfrac{\ln N + \gamma + 1}{N}$ du reste, donne 2,404 113 806, pour $2\zeta(3) = 2{,}404\,113\,806$ ✓.

Piège. L'erreur la plus répandue est de résoudre $X = 2X - 2\zeta(3)$ sans avoir vérifié que X est fini : dans $[0\,, +\infty]$, l'égalité $X = 2X - 2\zeta(3)$ est aussi satisfaite par $X = +\infty$, et la soustraction n'y a pas de sens (remarque de la section 20.6.1). C'est la première étape, qui montre la convergence de $\displaystyle\sum \frac{H_n}{n^2}$, qui autorise la simplification. On obtient ainsi une valeur exacte d'une série où apparaît $\zeta(3)$, nombre dont le cours rappelait qu'on ne connaît aucune expression à l'aide de π.

EXERCICE 51 ⋆⋆⋆

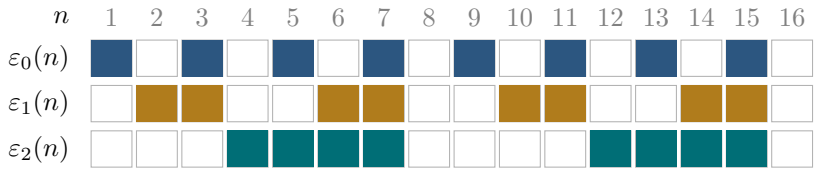
Les chiffres binaires. Pour $n \geqslant 1$, on écrit $n = \sum_{k\geqslant 0} \varepsilon_k(n) 2^k$, la somme étant finie. En séparant les rangs $k \geqslant j$ et $k < j$,

$$n = 2^j \sum_{k\geqslant j} \varepsilon_k(n) 2^{k-j} + \sum_{k<j} \varepsilon_k(n) 2^k, \qquad 0 \leqslant \sum_{k<j} \varepsilon_k(n) 2^k \leqslant 2^j - 1,$$

donc $\lfloor n/2^j \rfloor = \sum_{k\geqslant j} \varepsilon_k(n) 2^{k-j}$, entier dont la parité est $\varepsilon_j(n)$. Ainsi $\varepsilon_j(n) = 1$ si et seulement si $\lfloor n/2^j \rfloor = 2i+1$ pour un entier $i \geqslant 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\varepsilon_j(n) = 1 \iff \exists\, i \in \mathbb{N}, \quad 2^j(2i+1) \leqslant n < 2^j(2i+2)}$$

Les entiers dont le chiffre de rang j vaut 1 forment des blocs de 2^j entiers consécutifs, séparés par des blocs de même longueur où ce chiffre vaut 0.



Chaque case colorée indique un chiffre égal à 1 : sur la ligne j, les cases colorées forment des blocs de 2^j entiers commençant en $2^j(2i+1)$, et la somme d'une colonne est $b(n)$, par exemple $b(7) = 3$ et $b(8) = 1$.

Interversion. La famille $\left(\frac{\varepsilon_j(n)}{n(n+1)}\right)_{n\geqslant 1,\, j\geqslant 0}$ est positive ; pour n fixé, seul un nombre fini de ses termes est non nul, et leur somme vaut $\frac{b(n)}{n(n+1)}$. Par le théorème 9, dans $[0\,,+\infty]$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b(n)}{n(n+1)} = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{n\geqslant 1} \frac{\varepsilon_j(n)}{n(n+1)}.$$

Somme à j fixé. Par le théorème 8, on somme sur chaque bloc $[\![A\,;B-1]\!]$, avec $A = 2^j(2i+1)$ et $B = 2^j(2i+2)$, en utilisant $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, qui donne une somme télescopique :

$$\sum_{n=A}^{B-1} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{2^j}\Big(\frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2i+2}\Big).$$

La série en i est la série harmonique alternée regroupée par paires : sa somme partielle jusqu'à $i = N-1$ est $S_{2N} = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, qui tend vers $\ln 2$ (exemple qui suit le théorème 7). Ainsi

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{\varepsilon_j(n)}{n(n+1)} = \frac{\ln 2}{2^j}} \qquad \text{puis} \qquad \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b(n)}{n(n+1)} = \ln 2 \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = 2\ln 2 \approx 1{,}386\,294}$$

La somme des termes pour $n < 2\cdot 10^6$ vaut 1,386 289, et le reste, pour $N = 2\cdot 10^6$, est de l'ordre de $\frac{\ln N}{2N \ln 2} \approx 5\cdot 10^{-6}$, puisque $b(n)$ vaut en moyenne environ la moitié du nombre de chiffres de n ✓.

À retenir. La fonction b est très irrégulière, et aucune comparaison directe ne donnerait la somme. L'idée est d'écrire $b(n)$ comme une somme de termes simples, puis d'intervertir : chaque chiffre, pris séparément, a une structure périodique, et c'est la positivité qui autorise l'échange sans aucune vérification préalable. La même démarche (décomposer le terme général en une somme, puis sommer d'abord sur l'autre indice) sert dans l'exercice 47, et elle resservira dans les exercices 54 et 62.

EXERCICE 52 ⋆

On note sgn la fonction signe de l'énoncé. Pour $i \neq j$, on a $|a_{i,j}| = 2^{-|i-j|}$, et $a_{i,i} = 0$. La famille est antisymétrique : $a_{j,i} = -a_{i,j}$ pour tous i, j, puisque $\operatorname{sgn}(j-i) = -\operatorname{sgn}(i-j)$.

1. Soit $j \in \mathbb{N}$. Dans la colonne d'indice j, il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls d'indice $i < j$, et les termes d'indice $i > j$ forment une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ (théorème 1) : la série $\displaystyle\sum_i a_{i,j}$ converge, et

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j} = -\sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{2^{j-i}} + \sum_{i=j+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{i-j}} = -\sum_{m=1}^{j} \frac{1}{2^m} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2^m} = -\Big(1 - \frac{1}{2^j}\Big) + 1,$$

en posant $m = j - i$ dans la première somme et $m = i - j$ dans la seconde. Ainsi

$$\boxed{\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j} = \frac{1}{2^j}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = 2}$$

2. Par antisymétrie, la ligne d'indice i est l'opposée de la colonne d'indice i : pour tout i, $\displaystyle\sum_j a_{i,j} = -\sum_j a_{j,i}$ converge et vaut $-\dfrac{1}{2^i}$. D'où

$$\boxed{\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} = -\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = -2}$$

Si la famille était sommable, le théorème de Fubini (théorème 11) donnerait l'égalité des deux sommes itérées, et l'on aurait $2 = -2$. Donc $\boxed{(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \text{ n'est pas sommable}}$.

	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$		ligne
$i=0$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$	$\cdots$	-1
$i=1$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$
$i=2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\cdots$	$-\frac{1}{4}$
$i=3$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{8}$
$i=4$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\cdots$	$-\frac{1}{16}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
colonne	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$		

Les termes positifs, sous la diagonale, sont en bleu, les négatifs, au-dessus, en ocre ; les sommes des lignes et des colonnes, en rouge, sont opposées, et chaque ligne comme chaque colonne a une infinité de termes non nuls.

3. La sous-famille $(a_{j+1,j})_{j\in\mathbb{N}}$, juste sous la diagonale, est constante égale à $\dfrac{1}{2}$. Par croissance (proposition 10 (iii)),

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} |a_{i,j}| \geqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{j+1,j}| = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2} = +\infty,$$

donc $\boxed{\text{la famille n'est pas sommable}}$. Plus précisément, le théorème de Fubini positif (théorème 9) donne $\sum_{(i,j)} |a_{i,j}| = \sum_j (2 - 2^{-j}) = +\infty$, chaque colonne des modules ayant pour somme $(1 - 2^{-j}) + 1$.

Dans l'exemple du cours (section 20.7.2), chaque ligne et chaque colonne n'a qu'un nombre fini de termes non nuls, et les sommes de lignes et de colonnes sont des sommes finies. Ici, chaque ligne et chaque colonne est une série *absolument convergente*, de somme des modules au plus 2 : même cette condition plus forte ne suffit pas.

Piège. L'erreur la plus répandue est de croire que la convergence absolue de chaque ligne et de chaque colonne autorise l'interversion. Le théorème 11 exige la sommabilité de la famille double tout entière, qui se vérifie par le théorème 9 sur les modules : ici, les colonnes des modules ont des sommes bornées, mais leur nombre infini fait diverger le total.

EXERCICE 53 ⋆

1. Comme $|z| < 1$, les séries géométriques $\sum_p |z|^{2p}$ et $\sum_q |z|^{3q}$ convergent (théorème 1), c'est-à-dire que les familles $(z^{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(z^{3q})_{q\in\mathbb{N}}$ sont sommables (proposition 12 (iv)). Par la proposition 15, la famille des produits $z^{2p}z^{3q} = z^{2p+3q}$ est sommable, et sa somme est le produit des deux sommes :

$$\boxed{S(z) = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} z^{2p+3q} = \frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)}}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid 2p+3q = n\}$. Ces parties sont finies et forment une partition de $\mathbb{N}^2$, et le terme vaut z^n sur I_n. Par la sommation par paquets (théorème 10), la famille $(d_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $d_n = \operatorname{card} I_n$, est sommable, c'est-à-dire que la série $\sum d_n z^n$ converge absolument, et

$$\boxed{S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n z^n, \qquad d_n = \operatorname{card}\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid 2p+3q = n\}}$$

L'entier d_n est le nombre de façons de payer la somme n avec des pièces de 2 et de 3 unités, seul le nombre de pièces de chaque sorte comptant. On les obtient en choisissant le nombre q de pièces de 3, de même parité que n et au plus égal à $\frac{n}{3}$. Pour $n \leqslant 12$, on trouve

$$\boxed{(d_0, \dots, d_{12}) = (1,0,1,1,1,1,2,1,2,2,2,2,3)}$$

par exemple $d_{12} = 3$ pour $12 = 6\times 2 = 3\times 2 + 2\times 3 = 4\times 3$. On a de plus $d_{n+6} = d_n + 1$: l'application $(p,q) \mapsto (p, q+2)$ est une bijection de I_n sur les couples de I_{n+6} tels que $q \geqslant 2$, et il y a exactement un couple de I_{n+6} tel que $q \in \{0,1\}$, celui pour lequel q a la parité de n. On en déduit

$$\boxed{d_n = \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 1 \text{ si } n \not\equiv 1\ [6], \qquad d_n = \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor \text{ si } n \equiv 1\ [6]}$$

ce qui a été contrôlé par énumération jusqu'à $n = 59$ ✓. L'exercice 35 de la feuille du chapitre 10 obtenait de la même façon le nombre de façons de payer 10 centimes avec des pièces de 1, 2 et 5, comme coefficient d'un développement limité. Ici, la sommation par paquets donne d'un coup tous les coefficients, sans troncature, et justifie le développement du produit de deux séries infinies.

3. Si $|z| = 1$, tous les termes z^{2p+3q} sont de module 1, et $\sum_{(p,q)} |z^{2p+3q}| = +\infty$: la famille $\boxed{\text{n'est pas sommable}}$. La série $\sum d_n z^n$ diverge aussi grossièrement, puisque $|d_n z^n| = d_n \geqslant \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$ tend vers $+\infty$.

Piège. Pour $z = \mathrm{i}$, l'expression $\dfrac{1}{(1-z^2)(1-z^3)} = \dfrac{1}{2(1+\mathrm{i})}$ est parfaitement définie, alors que la famille n'est pas sommable : une formule obtenue pour $|z| < 1$ ne dit rien au-delà. L'erreur la plus répandue est d'étendre un résultat jusqu'au bord du domaine où il a été démontré.

EXERCICE 54 ⋆⋆

On pose $r = |x| < 1$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $|x^n| = r^n < 1$, donc $1 - x^n \neq 0$, et la série géométrique donne $\dfrac{x^n}{1-x^n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} x^{nk}$ (théorème 1). Tout repose sur la famille $(x^{nk})_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

Sommabilité. Par le théorème de Fubini positif (théorème 9), puis la majoration $1 - r^n \geqslant 1 - r$,

$$\sum_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2} r^{nk} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{1-r^n} \leqslant \frac{1}{1-r} \sum_{n=1}^{+\infty} r^n = \frac{r}{(1-r)^2} < +\infty.$$

La famille (x^{nk}) est donc sommable. Le théorème de Fubini (théorème 11), par lignes, montre que la série $\sum \dfrac{x^n}{1-x^n}$ converge, et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2} x^{nk}.$$

(a) On partage $(\mathbb{N}^*)^2$ en $D_< = \{k < n\}$, $D_= = \{k = n\}$ et $D_> = \{k > n\}$. Le théorème 10 donne

$$\sum_{(n,k)} x^{nk} = \sum_{D_<} x^{nk} + \sum_{D_=} x^{nk} + \sum_{D_>} x^{nk}.$$

L'échange $(n,k) \mapsto (k,n)$ est une bijection de $D_<$ sur $D_>$ qui conserve le produit nk : par la proposition 13 (iv), les sommes sur $D_>$ et sur $D_<$ sont égales. La somme sur $D_=$ est celle de la série absolument convergente $\sum x^{n^2}$. Enfin, en sommant $D_<$ par lignes (théorème 10, paquets $\{n\} \times [\![1\,;n-1]\!]$), la ligne n est une somme géométrique finie :

$$\sum_{k=1}^{n-1} x^{nk} = x^n \frac{1-x^{n(n-1)}}{1-x^n} = \frac{x^n - x^{n^2}}{1-x^n}.$$

Les trois sommes existent, et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n - x^{n^2}}{1-x^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}}$$

En groupant les couples selon la valeur $N = nk$ (théorème 10, paquets finis), le paquet de N contient un couple $(d, \dfrac{N}{d})$ par diviseur d de N, d'où $\boxed{a_N = d(N)}$, le nombre de diviseurs positifs de N. Le membre de droite compte ces diviseurs autrement : le couple (n,k) est dans $D_<$ lorsque $k < \sqrt{N}$, dans $D_=$ lorsque $N = k^2$. Les diviseurs vont par paires $\{k, \dfrac{N}{k}\}$, l'un inférieur et l'autre supérieur à $\sqrt{N}$, sauf $\sqrt{N}$ lorsque N est un carré :

$$d(N) = 2\ \mathrm{card}\{k \mid N,\ k < \sqrt{N}\} + (1 \text{ si } N \text{ est un carré, } 0 \text{ sinon}).$$

Par exemple $d(12) = 2 \times 3 = 6$, avec 1, 2, 3 inférieurs à $\sqrt{12}$, et $d(16) = 2 \times 2 + 1 = 5$.

(b) La famille (x^{mk}), indexée par les couples (m,k) avec m impair et $k \geqslant 1$, est une sous-famille de la précédente, donc sommable (proposition 12 (ii)). On la somme de deux façons par le théorème de Fubini. À $m = 2n-1$ fixé, la somme sur k vaut $\dfrac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}}$; à $k = i$ fixé, la somme sur $m = 2j+1$ est géométrique de raison x^{2i}, de module $r^{2i} < 1$:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} x^{i(2j+1)} = \frac{x^i}{1-x^{2i}}, \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x^i}{1-x^{2i}}}$$

En groupant selon $N = mk$, le coefficient a_N est le nombre de couples (m,k) avec m impair et $mk = N$, c'est-à-dire $\boxed{a_N = \text{nombre de diviseurs impairs de } N}$. Par exemple, $a_{12} = 2$, pour les diviseurs 1 et 3.

(c) La famille $(i\,x^{ik})_{(i,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable : par le théorème 9,

$$\sum_{(i,k)} i\,r^{ik} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i\,r^i}{1-r^i} \leqslant \frac{1}{1-r}\sum_{i=1}^{+\infty} i\,r^i = \frac{r}{(1-r)^3} < +\infty,$$

la série $\sum i\,r^i$ convergeant d'après le second exemple de produit de Cauchy de la section 20.7.4. Le théorème 11, par lignes, donne la somme demandée, en notant n l'indice de ligne :

$$\boxed{\sum_{(i,k)\in(\mathbb{N}^*)^2} i\,x^{ik} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\,x^n}{1-x^n}}$$

En groupant selon $N = ik$, le paquet de N apporte $\sum_{i|N} i\,x^N$, d'où $\boxed{a_N = \sigma(N)}$, la somme des diviseurs positifs de N ; par exemple $\sigma(12) = 1+2+3+4+6+12 = 28$.

Les trois identités et les trois interprétations ont été contrôlées numériquement en $x = 0{,}37$ et en deux valeurs complexes, $0{,}5 + 0{,}3\,\mathrm{i}$ et $-0{,}6 + 0{,}2\,\mathrm{i}$ ✓.

À retenir. Une seule famille double, (x^{nk}), sommée par lignes, par colonnes, par diagonales $nk = N$ ou par morceaux du quadrant, produit toutes ces identités. La sommabilité, établie une fois pour toutes par le théorème 9 sur les modules, rend chacun de ces regroupements légitime ; c'est la méthode du cours de la section 20.7.2.

EXERCICE 55 ⋆⋆⋆

1. Soit $z = x + \mathrm{i}y$ avec $y > 0$, et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Comme a et b sont réels, $\mathrm{Im}(az+b) = ay$, donc

$$|az+b| \geqslant |a|\,y. \qquad (*)$$

Premier cas : $|b| \geqslant 2|a|\,|z|$. Par l'inégalité triangulaire, $|az+b| \geqslant |b| - |a|\,|z| \geqslant \dfrac{|b|}{2}$. Avec $(*)$, on obtient $|az+b| \geqslant \max\left(\dfrac{|b|}{2}, y|a|\right) \geqslant \min\left(\dfrac{1}{2}, y\right)\max(|a|,|b|)$.

Second cas : $|b| < 2|a|\,|z|$. Alors $\max(|a|,|b|) \leqslant \max(1,2|z|)\,|a|$, et $(*)$ donne

$$|az+b| \geqslant \frac{y}{\max(1,2|z|)}\max(|a|,|b|).$$

Comme $\dfrac{y}{\max(1,2|z|)} \leqslant y$, les deux cas donnent le résultat avec

$$\boxed{c_z = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{y}{\max(1,2|z|)}\right) > 0, \qquad |az+b| \geqslant c_z \max(|a|,|b|) \text{ pour tout } (a,b) \in \mathbb{R}^2}$$

La minoration a été testée sur 20 000 triplets (z,a,b) tirés au hasard ✓.

2. Les couples tels que $\max(|n|,|m|) \leqslant N$ forment le carré $[\![-N\,;N]\!]^2$, de $(2N+1)^2$ éléments ; ceux pour lesquels le maximum vaut exactement N sont ceux de ce carré qui ne sont pas dans $[\![-(N-1)\,;N-1]\!]^2$:

$$\boxed{\mathrm{card}\{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \mid \max(|n|,|m|) = N\} = (2N+1)^2 - (2N-1)^2 = 8N}$$

Soit $k \geqslant 3$ et $z \in \mathbb{H}$. Par la question 1 avec $(a,b) = (n,m)$, pour $(n,m) \neq (0,0)$,

$$\frac{1}{|nz+m|^k} \leqslant \frac{1}{c_z^k \max(|n|,|m|)^k}.$$

On somme ce majorant positif par paquets selon la valeur $N \geqslant 1$ de $\max(|n|,|m|)$ (théorème 8) : chaque paquet a $8N$ éléments, d'où

$$\sum_{(n,m)\neq(0,0)} \frac{1}{c_z^k \max(|n|,|m|)^k} = \frac{8}{c_z^k} \sum_{N=1}^{+\infty} \frac{1}{N^{k-1}} < +\infty,$$

puisque $k-1 \geqslant 2 > 1$ (théorème 5). Par domination (proposition 12 (i)),

$$\boxed{\Big(\frac{1}{(nz+m)^k}\Big)_{(n,m)\neq(0,0)} \text{ est sommable pour } k \geqslant 3 \text{ et } z \in \mathbb{H}}$$

Le seuil est exact : comme $|nz+m| \leqslant (|z|+1)\max(|n|,|m|)$, le même découpage minore la somme des modules par $\dfrac{8}{(|z|+1)^k} \displaystyle\sum_N \frac{1}{N^{k-1}}$, infinie pour $k=2$. Comme dans la section 20.6.4 du cours, le seuil $k \geqslant 3$, et non $k \geqslant 2$, vient de ce que le paquet de rang N a un nombre d'éléments proportionnel à N.

3. L'application $(n,m) \mapsto (-n,-m)$ est une bijection de $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sur lui-même. Par l'invariance par permutation (proposition 13 (iv)), puis la linéarité, pour k impair,

$$G_k(z) = \sum_{(n,m)\neq(0,0)} \frac{1}{(-nz-m)^k} = (-1)^k G_k(z) = -G_k(z), \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{G_k(z) = 0 \ \text{ pour } k \text{ impair}}$$

4. Soit k pair ; comme $k \geqslant 3$, on a $k \geqslant 4$. On partage $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en la partie où $n=0$ et celle où $n \neq 0$ (théorème 10). Sur la première, le terme vaut $\dfrac{1}{m^k}$ avec $m \neq 0$; comme k est pair, les indices m et $-m$ donnent le même terme, et cette partie a pour somme $2\zeta(k)$. Ainsi $G_k(\mathrm{i}y) = 2\zeta(k) + T(y)$, avec

$$T(y) = \sum_{n\neq 0,\ m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\mathrm{i}ny+m)^k}.$$

Soit $y \geqslant 1$ et $n \neq 0$. Alors $|\mathrm{i}ny+m|^2 = n^2y^2+m^2$ est au moins égal à n^2+m^2, puisque $y \geqslant 1$, et au moins égal à $n^2y^2 \geqslant y^2$. En écrivant $|\mathrm{i}ny+m|^k = |\mathrm{i}ny+m| \cdot |\mathrm{i}ny+m|^{k-1}$, on obtient l'inégalité de l'énoncé :

$$\Big|\frac{1}{(\mathrm{i}ny+m)^k}\Big| \leqslant \frac{1}{y} \frac{1}{(n^2+m^2)^{(k-1)/2}}.$$

Comme $n^2+m^2 \geqslant \max(|n|,|m|)^2$, la sommation par paquets de la question 2 donne

$$C_k = \sum_{(n,m)\neq(0,0)} \frac{1}{(n^2+m^2)^{(k-1)/2}} \leqslant \sum_{N=1}^{+\infty} \frac{8N}{N^{k-1}} = 8\sum_{N=1}^{+\infty} \frac{1}{N^{k-2}} < +\infty,$$

puisque $k-2 \geqslant 2$. Par la proposition 13 (ii), $|T(y)| \leqslant \dfrac{C_k}{y}$, qui tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$:

$$\boxed{G_k(\mathrm{i}y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} 2\zeta(k) \quad (k \text{ pair})}$$

Pour $k=4$, on a $2\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{45} \approx 2{,}164646$, et la somme des termes pour $|n|,|m| \leqslant 200$ donne $G_4(3\mathrm{i}) \approx 2{,}164650$: dès $y=3$, la contribution des $n \neq 0$ est minuscule ✓.

Piège. La majoration de la question 4 perd une puissance : C_k n'est fini que pour $k \geqslant 4$. Elle ne vaudrait rien pour $k=3$, mais c'est sans importance, puisque $G_3 = 0$. L'erreur la plus répandue est d'écrire $G_k(\mathrm{i}y) = \displaystyle\sum_n \sum_m$ et de faire tendre y vers $+\infty$ terme à terme : on n'a aucun théorème pour passer à la limite dans une somme infinie, et c'est la majoration uniforme par $\dfrac{C_k}{y}$ qui remplace ce passage à la limite.

À retenir. Ces sommes sont les séries d'Eisenstein. Leur sommabilité repose sur deux ingrédients du chapitre : la minoration de $|nz+m|$ par la « norme » $\max(|n|,|m|)$ du couple, et le dénombrement des couples de norme N.

EXERCICE 56 ⋆⋆

1. Faux. La série harmonique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ a un terme général qui tend vers 0, et elle diverge (théorème 5). La proposition 2 ne donne qu'une condition nécessaire.

2. Vrai. Comme $\sum u_n$ converge, u_n tend vers 0 (proposition 2), donc $0\leqslant u_n\leqslant 1$ à partir d'un certain rang, et alors $0\leqslant u_n^2\leqslant u_n$. Le théorème 3 donne la convergence de $\sum u_n^2$. L'hypothèse de signe est indispensable : $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (théorème 7), alors que la série des carrés est la série harmonique.

3. Faux. Pour $n\geqslant 1$, soit $u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$. On a $\frac{v_n}{u_n}=1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, qui tend vers 1, donc $u_n\sim v_n$. La série $\sum u_n$ converge par le théorème 7, et $\sum v_n$ diverge, comme somme d'une série convergente et d'une série divergente (proposition 1 (ii)). Le théorème 4 exige que l'une des suites soit de signe constant à partir d'un certain rang ; c'est la seconde remarque qui suit le théorème 7.

4. Vrai. Soit σ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. La suite (u_n) est sommable (proposition 12 (iv)) ; par la proposition 13 (iv), la suite $(u_{\sigma(n)})$ l'est aussi et a la même somme, c'est-à-dire que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument et que $\sum_{n=0}^{+\infty}u_{\sigma(n)}=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ (proposition 13 (iii)). C'est l'observation de Dirichlet, première remarque qui suit la proposition 13.

5. Faux. La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$ converge (théorème 7), alors que $u_{2n}=\frac{1}{2n}$ est le terme général d'une série divergente. Extraire les termes d'indice pair revient à supprimer tous les termes négatifs : la compensation qui assurait la convergence disparaît.

6. Vrai. Pour deux réels positifs a et b, on a $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$, puisque $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$. Ainsi $0\leqslant\sqrt{u_nv_n}\leqslant\frac{u_n+v_n}{2}$, terme général d'une série convergente (proposition 1 (i)), et le théorème 3 conclut.

7. Vrai. On a $u_n=u_n^+-u_n^-$ et $|u_n|=u_n^++u_n^-$. Si $\sum u_n^+$ convergeait, alors $\sum u_n^-=\sum(u_n^+-u_n)$ convergerait aussi (proposition 1 (i)), puis $\sum|u_n|=\sum(u_n^++u_n^-)$, contrairement à l'hypothèse. De même en échangeant les rôles de u^+ et u^-. C'est la première question de l'exercice 44, point de départ du théorème de réarrangement de Riemann.

8. Vrai. Soit M un majorant de $(|v_n|)$. Alors $|u_nv_n|\leqslant M|u_n|$, terme général d'une série convergente : $\sum u_nv_n$ converge absolument (théorème 3), donc converge (théorème 6). L'hypothèse de convergence absolue est indispensable : avec $u_n=v_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, la suite (v_n) est bornée et $\sum u_nv_n$ est la série harmonique.

9. Faux. Soit $a_{p,p}=\frac{(-1)^p}{p+1}$ pour $p\in\mathbb{N}$, et $a_{p,q}=0$ si $p\neq q$. Chaque ligne et chaque colonne n'a qu'un terme non nul, et les deux sommes itérées sont égales à

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p+1}=\ln 2,$$

somme de la série harmonique alternée donnée par le cours. Pourtant, $\sum_{(p,q)}|a_{p,q}|=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p+1}=+\infty$: la famille n'est pas sommable. L'égalité des deux sommes itérées ne suffit pas ; c'est la somme itérée des *modules* qui décide, par le théorème 9.

10. Vrai. Les familles $\left((-\frac{1}{2})^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\left((-\frac{1}{3})^q\right)_{q\in\mathbb{N}}$ sont sommables (théorème 1 et proposition 12 (iv)). Par la proposition 15, la famille de leurs produits, qui est la famille de l'énoncé, est sommable, et

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{(-1)^{p+q}}{2^p\,3^q} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\text{Vrai : } 2,4,6,7,8,10; \qquad \text{Faux : } 1,3,5,9}$$

Piège. Les assertions 3, 5 et 9 sont fausses pour la même raison de fond : une série semi-convergente n'est convergente que grâce à la compensation entre termes positifs et négatifs, et toute opération qui touche à cette compensation, remplacer par un équivalent, extraire, réordonner ou regrouper autrement, peut la détruire. Les assertions 2, 4, 6 et 8, qui reposent sur la positivité ou la convergence absolue, sont au contraire à l'abri de ce phénomène.

EXERCICE 57 ⋆⋆

1. Un entier de E à k chiffres a son premier chiffre pris dans $\{1,\dots,9\}\setminus\{7\}$, qui a 8 éléments, et chacun des $k-1$ autres dans $\{0,\dots,9\}\setminus\{7\}$, qui en a 9. Par l'unicité de l'écriture décimale, le nombre cherché est le cardinal d'un produit cartésien :

$$\boxed{\operatorname{card} E_k = 8\times 9^{k-1}}, \qquad E_k = E\cap[\![10^{k-1}\,;10^k-1]\!].$$

2. Les entiers de $[\![1\,;10^k-1]\!]$ sont ceux qui ont au plus k chiffres. Par la question 1 et la somme géométrique,

$$\operatorname{card}\left(E\cap[\![1\,;10^k-1]\!]\right) = \sum_{j=1}^{k} 8\times 9^{j-1} = 8\,\frac{9^k-1}{9-1} = 9^k-1,$$

et la proportion cherchée vaut

$$\boxed{\frac{9^k-1}{10^k-1} \leqslant \frac{9^k}{10^k-1} \leqslant 2\Big(\frac{9}{10}\Big)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0}$$

en utilisant $10^k-1\geqslant\dfrac{10^k}{2}$. Parmi les entiers d'au plus 20 chiffres, la proportion de ceux qui n'ont pas de 7 est déjà inférieure à 0,13 : presque tous les entiers contiennent un 7.

3. Les parties E_k, pour $k\geqslant 1$, forment une partition de E. Chaque élément de E_k est au moins égal à 10^{k-1}, donc, par la question 1,

$$\sum_{n\in E_k}\frac{1}{n} \leqslant \frac{8\times 9^{k-1}}{10^{k-1}} = 8\Big(\frac{9}{10}\Big)^{k-1}.$$

La sommation par paquets dans $[0\,,+\infty]$ (théorème 8) et la série géométrique donnent

$$\sum_{n\in E}\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n\in E_k}\frac{1}{n} \leqslant 8\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\frac{9}{10}\Big)^{k-1} = \frac{8}{1-\frac{9}{10}} = 80,$$

donc $\boxed{(\frac{1}{n})_{n\in E} \text{ est sommable, de somme au plus } 80}$. La convergence est très lente : la somme des $\dfrac{1}{n}$ pour $n\in E$ et $n<10^7$ ne vaut encore qu'environ 11,99 ✓.

Pour la série harmonique, le paquet des entiers à k chiffres contribue $H_{10^k-1}-H_{10^{k-1}-1}$, qui tend vers $\ln 10$ par la proposition 7 : chaque paquet apporte à peu près la même quantité, et la somme diverge. Pour E, les contributions décroissent comme $(\frac{9}{10})^k$, car le nombre d'éléments du paquet croît comme 9^k et non comme 10^k. Par le théorème 8, la famille des $\dfrac{1}{n}$, où n parcourt les entiers qui *contiennent* un 7, n'est pas sommable, puisque sa somme, ajoutée à une somme finie, donne $+\infty$.

À retenir. La convergence d'une somme d'inverses ne se lit pas sur une proportion, mais sur la vitesse à laquelle les éléments se raréfient d'un paquet au suivant. On retrouvera ce point de vue à l'exercice 59, qui compare de la même façon les nombres premiers et les carrés.

EXERCICE 58 ⋆⋆⋆

1. *Existence.* Soit $m \geqslant 2$ et $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_\ell^{\alpha_\ell}$ sa décomposition en facteurs premiers (chapitre 12, théorème 6). On note g le plus grand entier qui divise tous les exposants α_i ; il existe, puisque ces diviseurs communs sont compris entre 1 et α_1. On pose $r = g$ et $a = p_1^{\alpha_1/g} \cdots p_\ell^{\alpha_\ell/g}$, de sorte que $a \geqslant 2$ et $m = a^r$. Si a était une puissance parfaite, $a = b^s$ avec $s \geqslant 2$, l'unicité de la décomposition donnerait $\dfrac{\alpha_i}{g} = s\, v_{p_i}(b)$ pour tout i : l'entier $sg > g$ diviserait tous les α_i, ce qui contredit la définition de g. Donc $a \in A$.

Unicité. Soit $m = a^r = b^t$ avec $a, b \in A$ et $r, t \geqslant 1$. Soit $d = r \wedge t$, et $r = dr'$, $t = dt'$, avec $r' \wedge t' = 1$ (chapitre 12, proposition 6). Pour tout nombre premier p, la proposition 10 du chapitre 12 donne $r\, v_p(a) = t\, v_p(b)$, donc $r'\, v_p(a) = t'\, v_p(b)$. Ainsi t' divise $r'\, v_p(a)$, et, par le lemme de Gauss (chapitre 12, théorème 5), t' divise $v_p(a)$ pour tout p. L'entier $c = \displaystyle\prod_p p^{v_p(a)/t'}$ vérifie alors $a = c^{t'}$; comme a n'est pas une puissance parfaite, $t' = 1$. De même $r' = 1$, donc $r = t$, puis $v_p(a) = v_p(b)$ pour tout p, et $a = b$.

$$\boxed{\text{tout } m \geqslant 2 \text{ s'écrit de façon unique } m = a^r,\ a \in A,\ r \geqslant 1}$$

Par exemple, $64 = 2^6$, avec $a = 2$ et $r = 6$, et non 8^2 ou 4^3, car 8 et 4 sont des puissances parfaites ; $36 = 6^2$, avec $6 \in A$. L'unicité a été contrôlée pour $m < 5\,000$ ✓.

2. Pour $a \in A$ et $s \geqslant 2$, l'entier a^s est une puissance parfaite : l'application $(a, s) \mapsto a^s$ envoie bien $A \times \{2, 3, \dots\}$ dans P. Elle est surjective : si $n = b^t \in P$, avec $b \geqslant 2$ et $t \geqslant 2$, la question 1 donne $b = a^r$ avec $a \in A$, et $n = a^{rt}$ avec $rt \geqslant 2$. Elle est injective : si $a^s = a'^{s'}$, l'unicité de la question 1, appliquée à l'entier a^s, donne $a = a'$ et $s = s'$. Donc

$$\boxed{(a, s) \mapsto a^s \text{ est une bijection de } A \times \{2, 3, \dots\} \text{ sur } P}$$

3. Tous les termes sont positifs, et tous les calculs se font dans $[0\,, +\infty]$. Pour $n \in P$, on a $n \geqslant 4$, et la série géométrique donne $\dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1/n}{1 - 1/n} = \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{n^j}$ (théorème 1). Par le théorème 9, puis le changement d'indice par la bijection $(a, s, j) \mapsto (a^s, j)$ de $A \times \{s \geqslant 2\} \times \mathbb{N}^*$ sur $P \times \mathbb{N}^*$ (question 2 et proposition 10 (iv)),

$$\sum_{n \in P} \frac{1}{n-1} = \sum_{(n,j) \in P \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^j} = \sum_{(a,s,j)} \frac{1}{a^{sj}}.$$

On groupe les triplets selon a et selon la valeur $N = sj$ (théorème 8) : pour a et N fixés, le paquet a c_N éléments, sur lesquels le terme vaut a^{-N}, et $c_1 = 0$ puisque $s \geqslant 2$. D'où la première égalité :

$$\boxed{\sum_{n \in P} \frac{1}{n-1} = \sum_{a \in A} \sum_{N \geqslant 2} \frac{c_N}{a^N}}$$

De même, la bijection $(a, r) \mapsto a^r$ de $A \times \mathbb{N}^*$ sur $\{2, 3, \dots\}$ de la question 1 transforme la famille $(m^{-k})_{m \geqslant 2, k \geqslant 2}$ en la famille (a^{-rk}), indexée par les triplets (a, r, k) tels que $r \geqslant 1$ et $k \geqslant 2$. En groupant encore selon a et $N = rk$:

$$\boxed{\sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{m^k} = \sum_{(m,k)} \frac{1}{m^k} = \sum_{a \in A} \sum_{N \geqslant 2} \frac{c'_N}{a^N}}$$

la première égalité étant le théorème 9.

4. Un couple (s, j) tel que $sj = N$ est déterminé par le diviseur s de N, et la condition $j \geqslant 1$ est automatique : c_N est le nombre de diviseurs $s \geqslant 2$ de N. De même, c'_N est le nombre de diviseurs $k \geqslant 2$ de N. Ainsi $\boxed{c_N = c'_N = d(N) - 1}$, où $d(N)$ est le nombre de diviseurs positifs de N, et les deux

sommes de la question 3 sont égales. Le cours (section 20.6.3) a calculé la seconde par le théorème de Fubini positif : elle vaut $\sum_{k\geqslant 2}(\zeta(k)-1)=1$. Donc

$$\boxed{\sum_{n\in P}\frac{1}{n-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+\frac{1}{31}+\cdots=1}$$

La somme sur les puissances parfaites inférieures à 10^{12} vaut 0,999999, l'écart étant de l'ordre de 10^{-6} ✓.

À retenir. Le calcul ne demande jamais de vérifier une convergence : tous les termes étant positifs, les théorèmes 8 et 9 et la proposition 10 (iv) justifient chaque étape dans $[0\,,+\infty]$, et la finitude apparaît à la fin. La difficulté est arithmétique : c'est l'unicité de la question 1 qui permet de compter chaque puissance parfaite une seule fois. L'erreur la plus répandue est de sommer directement sur les couples (a,s) avec $a\geqslant 2$ quelconque : $16=2^4=4^2$ serait alors compté deux fois.

EXERCICE 59 ⋆⋆⋆

Comme l'ensemble des nombres premiers est infini (chapitre 1), la suite (p_k) est bien définie ; elle est strictement croissante et à valeurs entières, donc $p_k\geqslant k+1$ et p_k tend vers $+\infty$. Pour $s\geqslant 1$ réel, on a $p^{-s}\leqslant\dfrac{1}{2}<1$ pour tout nombre premier p.

1. On raisonne par récurrence sur r. Pour $r=1$, l'application $j\mapsto p_1^j$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur E_1, et, par la proposition 10 (iv) et la série géométrique,

$$\sum_{n\in E_1}\frac{1}{n^s}=\sum_{j=0}^{+\infty}(p_1^{-s})^j=\frac{1}{1-p_1^{-s}}.$$

Soit $r\geqslant 2$, et supposons le résultat vrai au rang $r-1$; la somme sur E_{r-1} est alors finie. Tout $n\in E_r$ s'écrit de façon unique $n=m\,p_r^j$, avec $j=v_{p_r}(n)\in\mathbb{N}$ et $m\in E_{r-1}$, par l'unicité de la décomposition en facteurs premiers (chapitre 12, théorème 6). L'application $(m,j)\mapsto m\,p_r^j$ est donc une bijection de $E_{r-1}\times\mathbb{N}$ sur E_r. Par la proposition 10 (iv), puis le produit de deux familles sommables (proposition 15),

$$\sum_{n\in E_r}\frac{1}{n^s}=\sum_{(m,j)\in E_{r-1}\times\mathbb{N}}\frac{1}{m^s}\,(p_r^{-s})^j=\Big(\sum_{m\in E_{r-1}}\frac{1}{m^s}\Big)\frac{1}{1-p_r^{-s}}=\prod_{k=1}^{r}\frac{1}{1-p_k^{-s}}.$$

$$\boxed{\sum_{n\in E_r}\frac{1}{n^s}=\prod_{k=1}^{r}\frac{1}{1-p_k^{-s}}\qquad(r\geqslant 1,\ s\geqslant 1)}$$

La somme est donc finie, même pour $s=1$: par exemple, la somme des inverses des entiers $2^a3^b5^c$ vaut $2\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}=\dfrac{15}{4}$ ✓.

2. Soit $s>1$ et $P_r(s)$ le produit de la question 1. Un entier $n\leqslant p_r$ appartient à E_r, puisque ses diviseurs premiers sont au plus égaux à n, donc à p_r. Le théorème 8, appliqué à la partition de $\mathbb{N}^*$ en E_r et son complémentaire, donne, toutes les sommes étant finies (théorème 5),

$$0\leqslant\zeta(s)-P_r(s)=\sum_{n\notin E_r}\frac{1}{n^s}\leqslant\sum_{n=p_r+1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}.$$

Le majorant est le reste d'indice p_r de la série de Riemann, qui tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$ (proposition 3), puisque p_r tend vers $+\infty$:

$$\boxed{\prod_{k=1}^{r}\frac{1}{1-p_k^{-s}}\xrightarrow[r\to+\infty]{}\zeta(s)\qquad(s>1)}$$

Pour $s = 2$, le produit étendu aux nombres premiers inférieurs à 10^6 vaut 1,6449340, très proche de $\zeta(2) \approx 1{,}6449341$ ✓.

3. Avec $s = 1$ et le même argument, les entiers $1, \ldots, p_r$ appartiennent à E_r, et la croissance (proposition 10 (iii)) donne

$$\boxed{\prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1-1/p_k} = \sum_{n \in E_r} \frac{1}{n} \geqslant \sum_{n=1}^{p_r} \frac{1}{n} = H_{p_r}}$$

En prenant le logarithme, la somme partielle d'indice r de la série étudiée vérifie

$$\sum_{k=1}^{r} \ln\Big(\frac{1}{1-1/p_k}\Big) \geqslant \ln H_{p_r},$$

qui tend vers $+\infty$, puisque H_n tend vers $+\infty$ et que p_r tend vers $+\infty$. Les sommes partielles ne sont pas majorées : $\boxed{\text{la série } \sum \ln\Big(\frac{1}{1-1/p_k}\Big) \text{ diverge}}$.

4. Comme $\dfrac{1}{p_k}$ tend vers 0, on a $\ln\big(\dfrac{1}{1-1/p_k}\big) = -\ln\big(1 - \dfrac{1}{p_k}\big) \sim \dfrac{1}{p_k}$ (chapitre 10, $\ln(1+x) \sim x$). Les deux séries sont à termes positifs ; par le théorème 4, elles sont de même nature :

$$\boxed{\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{p_k} \text{ diverge}}$$

alors que $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ converge. En ce sens, il y a « plus » de nombres premiers que de carrés : s'il existait un réel $c > 0$ tel que $p_k \geqslant c\,k^2$ à partir d'un certain rang, la série $\displaystyle\sum \frac{1}{p_k}$ convergerait par comparaison. Le même argument vaut pour toute puissance k^α avec $\alpha > 1$. La divergence est d'une lenteur extrême : la somme des inverses des nombres premiers inférieurs à 10^6 ne vaut qu'environ 2,887.

À retenir. La question 3 redémontre que l'ensemble des nombres premiers est infini, ce qui est la preuve d'Euler : s'il n'y avait que r nombres premiers, on aurait $E_r = \mathbb{N}^*$, et H_n serait majoré par le produit fini $\displaystyle\prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1-1/p_k}$ pour tout n, ce qui contredit la divergence de la série harmonique. La divergence de $\displaystyle\sum \frac{1}{p_k}$ est un renforcement quantitatif du théorème d'Euclide du chapitre 1.

EXERCICE 60 ⋆⋆⋆

1.(a) Pour $n = 1$, le seul diviseur est 1, et $s_1 = \mu(1) = 1$. Soit $n \geqslant 2$ et $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition, avec $r \geqslant 1$. Les diviseurs positifs de n sont les $p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$ avec $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$ (chapitre 12, théorème 6). Par définition, μ est nulle en ceux dont un exposant β_i dépasse 1. Il reste les diviseurs de $p_1 \cdots p_r$, c'est-à-dire les produits $\displaystyle\prod_{i \in J} p_i$, pour $J \subset [\![1\,;r]\!]$, chacun obtenu une seule fois, et μ vaut $(-1)^{\operatorname{card} J}$ en ce produit. En groupant les parties J selon leur cardinal j (chapitre 3, théorème 1), puis par la formule du binôme (chapitre 3, théorème 2),

$$s_n = \sum_{J \subset [\![1\,;r]\!]} (-1)^{\operatorname{card} J} = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^j = (1-1)^r = 0,$$

puisque $r \geqslant 1$. Ainsi

$$\boxed{s_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad s_n = 0 \text{ pour } n \geqslant 2}$$

Par exemple, pour $n = 12$, les diviseurs 1, 2, 3, 4, 6, 12 donnent $1 - 1 - 1 + 0 + 1 + 0 = 0$ ✓.

(b) Comme $|\mu(k)| \leqslant 1$, on a $\left|\dfrac{\mu(k)}{k^2m^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{k^2m^2}$, terme d'une famille sommable, de somme $\dfrac{\pi^4}{36}$ (premier exemple de la section 20.6.3). Par domination (proposition 12 (i)), la famille $\left(\dfrac{\mu(k)}{k^2m^2}\right)_{(k,m)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable. On calcule sa somme de deux façons.

D'une part, c'est la famille des produits de $\left(\dfrac{\mu(k)}{k^2}\right)_{k\geqslant 1}$ et de $\left(\dfrac{1}{m^2}\right)_{m\geqslant 1}$, sommables par domination et par le théorème 5 ; la proposition 15 donne la somme $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mu(k)}{k^2}\right)\frac{\pi^2}{6}$.

D'autre part, on groupe les couples selon la valeur $n = km$ (théorème 10). Le paquet de n est formé des couples $(k, \dfrac{n}{k})$, pour k diviseur de n, et sa somme est $\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k|n}\mu(k) = \frac{s_n}{n^2}$. Par la question (a), la somme totale est $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{s_n}{n^2} = 1$. En comparant,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mu(k)}{k^2} = \frac{6}{\pi^2} \approx 0{,}6079}$$

La somme des 20 000 premiers termes vaut 0,607927 ✓.

2. Soit $u, v \in [\![1\,;n]\!]$. Par la question 1(a), $\displaystyle\sum_{d|u\wedge v}\mu(d) = s_{u\wedge v}$ vaut 1 si $u \wedge v = 1$ et 0 sinon. Les diviseurs de $u \wedge v$ sont les diviseurs communs à u et v (chapitre 12, proposition 3 (i)), qui sont au plus égaux à n. Donc

$$q_n = \sum_{u=1}^{n}\sum_{v=1}^{n}\sum_{\substack{1\leqslant d\leqslant n\\ d|u,\ d|v}}\mu(d) = \sum_{d=1}^{n}\mu(d)\ \mathrm{card}\{u\in[\![1\,;n]\!] \mid d \mid u\}^2,$$

en intervertissant les sommes finies (chapitre 3, proposition 6) et en écrivant le nombre de couples (u, v) de multiples de d comme un carré (chapitre 3, proposition 7). Les multiples de d dans $[\![1\,;n]\!]$ sont d, $2d$, …, $\lfloor\dfrac{n}{d}\rfloor d$, au nombre de $\lfloor\dfrac{n}{d}\rfloor$. Pour $d > n$, ce nombre est nul, et la somme peut être prolongée à tout $d \geqslant 1$:

$$\boxed{q_n = \sum_{k=1}^{n}\mu(k)\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}\mu(k)\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor^2}$$

La formule a été contrôlée par un dénombrement direct pour $n \leqslant 120$ ✓. Par exemple,

$$q_4 = 16\,\mu(1) + 4\,\mu(2) + 1\,\mu(3) + 1\,\mu(4) = 16 - 4 - 1 + 0 = 11 :$$

parmi les 16 couples de $[\![1\,;4]\!]^2$, on retire les 4 couples de nombres pairs et le couple $(3, 3)$.

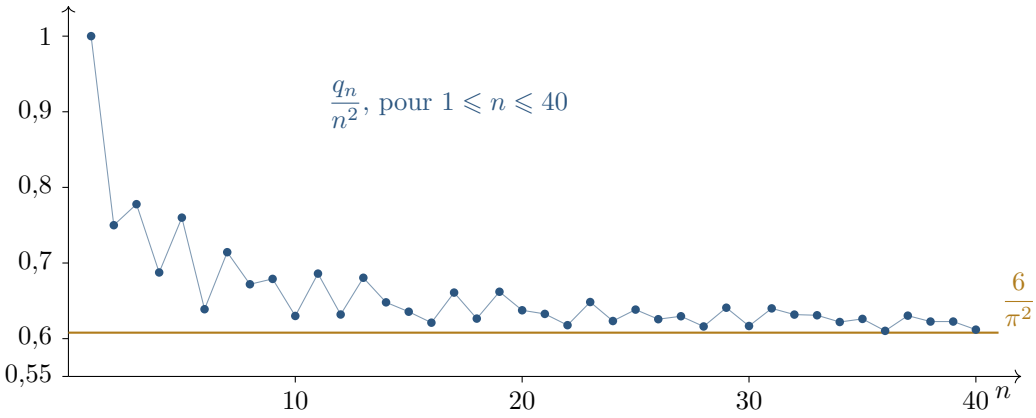
3. Pour $x \geqslant 0$, on a $0 \leqslant x - \lfloor x\rfloor < 1$ et $0 \leqslant x + \lfloor x\rfloor \leqslant 2x$, donc $0 \leqslant x^2 - \lfloor x\rfloor^2 \leqslant 2x$. Avec $x = \dfrac{n}{k}$ et $|\mu(k)| \leqslant 1$,

$$\left|\frac{q_n}{n^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)}{k^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{n}{k}\right)^2 - \left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor^2\right) \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2n}{k} = \frac{2H_n}{n}.$$

Comme $H_n \sim \ln n$ (proposition 7), $\dfrac{2H_n}{n}$ tend vers 0, et la somme partielle $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)}{k^2}$ tend vers $\dfrac{6}{\pi^2}$ par la question 1(b). Donc

$$\boxed{\frac{q_n}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{6}{\pi^2} \approx 0{,}608}$$

Parmi les n^2 couples d'entiers de $[\![1\,;n]\!]$, la proportion de ceux qui sont formés de deux entiers premiers entre eux tend vers $\dfrac{6}{\pi^2}$: pour n grand, un peu plus de six couples sur dix sont premiers entre eux. On trouve $\dfrac{q_{100}}{100^2} = 0{,}6087$ et $\dfrac{q_{1\,000}}{1\,000^2} = 0{,}608383$ ✓.



Les points bleus sont les proportions $\dfrac{q_n}{n^2}$, calculées exactement par la formule de la question 2 ; ils oscillent au-dessus de la droite ocre d'ordonnée $\dfrac{6}{\pi^2}$, avec des pics aux nombres premiers n (par exemple $n = 37$), et l'écart décroît comme le prévoit la majoration en $\dfrac{2H_n}{n}$.

À retenir. La fonction μ « inverse » la fonction constante 1 : la relation $\displaystyle\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ pour $n \geqslant 2$ est exactement ce qui fait du produit de familles de la question 1(b) un calcul de $\dfrac{1}{\zeta(2)}$. La question 2 en fait un outil de dénombrement : remplacer la condition « $u \wedge v = 1$ » par la somme $\displaystyle\sum_{d|u\wedge v} \mu(d)$ transforme un comptage difficile en sommes de parties entières.

Les quatre derniers exercices sont des problèmes en autonomie ; le corrigé commence par l'idée directrice.

EXERCICE 61 ⋆⋆⋆⋆

Idée. La relation exprime $f(x)$ comme une moyenne pondérée des valeurs $f(x^n)$, de poids $\dfrac{1}{2^n}$ de somme 1 dans le premier cas, et de poids $\dfrac{1}{3^n}$ de somme $\dfrac{1}{2}$ dans le second. On l'écrit au point où f atteint son maximum sur un segment $[0\,,a]$ avec $a < 1$: les points x^n restent dans ce segment et tendent vers 0.

Dans les deux questions, la série du second membre converge pour toute fonction f continue sur $[0\,,1]$, puisque f y est bornée (chapitre 8, théorème 10) : son terme général est dominé par $\dfrac{1}{2^n}$ (proposition 9).

1. Toute fonction constante égale à c convient, puisque $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c}{2^n} = c$. Réciproquement, soit f une solution et $a \in [0\,,1[$. La fonction f est continue sur le segment $[0\,,a]$: elle y atteint son maximum M en un point x_0 (chapitre 8, théorème 10). Pour tout $n \geqslant 1$, $x_0^n \in [0\,,a]$, donc $f(x_0^n) \leqslant M$, et

$$0 = M - f(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{2^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x_0^n)}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M - f(x_0^n)}{2^n}.$$

Une série convergente de termes positifs de somme nulle a tous ses termes nuls, puisque chaque terme est majoré par la somme (proposition 5) : $f(x_0^n) = M$ pour tout $n \geqslant 1$. Comme $0 \leqslant x_0 \leqslant a < 1$, la suite (x_0^n) tend vers 0, et la continuité de f en 0 donne $f(0) = M$ (chapitre 8, théorème 7). Le même raisonnement au point où f atteint son minimum m sur $[0\,,a]$ donne $f(0) = m$. Ainsi $m = M$: f est constante, égale à $f(0)$, sur $[0\,,a]$.

Ceci valant pour tout $a < 1$, f est constante sur $[0\,,1[$, et, par continuité en 1, $f(1) = f(0)$.

les solutions sont les fonctions constantes

2. La fonction nulle convient. Soit f une solution. En $x=0$ et en $x=1$, les points x^n valent x, et la relation donne $f(x)=f(x)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}f(x)$, d'où $f(0)=f(1)=0$. Soit $a\in[0\,,1[$, et $M=f(x_0)$ le maximum de f sur $[0\,,a]$. Comme dans la question 1,

$$M=f(x_0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(x_0^n)}{3^n}\leqslant M\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{M}{2},$$

donc $M\leqslant 0$. De même, le minimum m vérifie $m\geqslant\frac{m}{2}$, donc $m\geqslant 0$. Ainsi $f=0$ sur $[0\,,a]$ pour tout $a<1$, et $f(1)=0$.

la seule solution est la fonction nulle

Piège. L'erreur la plus répandue est d'appliquer l'argument du maximum sur $[0\,,1]$ tout entier. Si le maximum est atteint en $x_0=1$, les points x_0^n valent tous 1 et ne tendent pas vers 0 : on n'apprend rien, puisque la relation en 1 se réduit à $f(1)=f(1)$ dans la question 1. C'est pour cela qu'on travaille sur $[0\,,a]$, avec $a<1$, et qu'on conclut en 1 par continuité.
À retenir. Seule compte la somme σ des poids. Si les poids sont positifs et de somme 1, la relation est une moyenne, et l'argument du maximum donne les constantes ; si leur somme est dans $[0\,,1[$, il donne $M\leqslant\sigma M$ et $m\geqslant\sigma m$, donc la seule solution nulle. C'est le même mécanisme qu'un principe du maximum : une fonction égale à la moyenne de ses valeurs ne peut pas avoir de maximum strict.

EXERCICE 62 ⋆⋆⋆⋆

Idée. On développe chaque $\frac{1}{2^n-1}$ en série géométrique de raison 2^{-n}, et l'on somme la famille positive $(\varphi(n)\,2^{-nk})$ selon la valeur du produit $N=nk$. Il faut alors connaître $\sum_{d|N}\varphi(d)$, qui vaut N : c'est une identité de Gauss, que l'on démontre en classant les entiers de $[\![1\,;N]\!]$ selon leur PGCD avec N.

L'identité $\sum_{d|N}\varphi(d)=N$. Soit $N\geqslant 1$. Pour chaque diviseur positif d de N, soit A_d l'ensemble des $k\in[\![1\,;N]\!]$ tels que $k\wedge N=\frac{N}{d}$. Pour tout $k\in[\![1\,;N]\!]$, l'entier $k\wedge N$ est un diviseur positif de N, de la forme $\frac{N}{d}$ pour un unique diviseur d : les A_d forment une partition de $[\![1\,;N]\!]$. Soit $g=\frac{N}{d}$. Si $k\in A_d$, on écrit $k=gj$ et $N=gd$; alors $1\leqslant j\leqslant d$, et $j\wedge d=1$ (chapitre 12, proposition 6). Réciproquement, si $j\in[\![1\,;d]\!]$ et $j\wedge d=1$, l'entier $k=gj$ appartient à $[\![1\,;N]\!]$, et $k\wedge N=g\,(j\wedge d)=g$ (chapitre 12, proposition 5). L'application $k\mapsto\frac{k}{g}$ est donc une bijection de A_d sur l'ensemble des $j\in[\![1\,;d]\!]$ premiers avec d, qui a $\varphi(d)$ éléments. En comptant les éléments de $[\![1\,;N]\!]$ par paquets,

$$\boxed{\sum_{d|N}\varphi(d)=N}$$

Par exemple, pour $N=12$: $\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(4)+\varphi(6)+\varphi(12)=1+1+2+2+2+4=12$ ✓.

Le calcul. Pour $n\geqslant 1$, la série géométrique de raison 2^{-n} donne $\sum_{k=1}^{+\infty}2^{-nk}=\frac{2^{-n}}{1-2^{-n}}=\frac{1}{2^n-1}$. La famille $(\varphi(n)\,2^{-nk})_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est positive ; par le théorème 9, en sommant d'abord sur k,

$$\sum_{(n,k)}\varphi(n)\,2^{-nk}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varphi(n)}{2^n-1}.$$

On groupe maintenant les couples selon la valeur $N=nk\geqslant 1$ (théorème 8) : le paquet de N est formé des couples $(d,\frac{N}{d})$, pour d diviseur de N, et sa somme est $2^{-N}\sum_{d|N}\varphi(d)=N\,2^{-N}$. Ainsi, dans

$[0\,,+\infty]$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varphi(n)}{2^n-1}=\sum_{N=1}^{+\infty}\frac{N}{2^N}.$$

Le cours (section 20.7.4) donne $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n=\frac{1}{(1-z)^2}$ pour $|z|<1$; avec $z=\dfrac{1}{2}$, on obtient $\displaystyle\sum_{N=1}^{+\infty}\frac{N}{2^N}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{2^n}=\frac{1}{2}\times 4=2$. La somme est finie, ce qui établit du même coup la convergence de la série :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varphi(n)}{2^n-1}=2}$$

La somme des 199 premiers termes vaut 2 à la précision des calculs ✓, et les cinq premiers donnent déjà

$$1+\frac{1}{3}+\frac{2}{7}+\frac{2}{15}+\frac{4}{31}\approx 1{,}88.$$

À retenir. Aucune convergence n'est à vérifier : la famille étant positive, le théorème 8 garantit que le regroupement selon nk est légitime, et le résultat fini prouve la convergence. La même méthode donne, pour $|x|<1$, l'identité $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varphi(n)x^n}{1-x^n}=\frac{x}{(1-x)^2}$, de la même famille que celles de l'exercice 54 ; pour x complexe, il faut alors établir la sommabilité par le théorème 9 sur les modules, en utilisant $\varphi(n)\leqslant n$.

EXERCICE 63 ⋆⋆⋆⋆

Idée. On construit v par blocs : sur le k-ième bloc d'entiers, v vaut le maximum de u_0, …, u_k, et l'on commence ce bloc assez loin pour que le reste de la série correspondante soit inférieur à 2^{-k}. C'est un procédé diagonal.

Les séries majorantes. Pour $k\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}$, soit $w_k(n)=\max\left(u_0(n),\dots,u_k(n)\right)$. On a $0\leqslant w_k(n)\leqslant u_0(n)+\cdots+u_k(n)$, terme général d'une série convergente (proposition 1 (i)) : la série $\displaystyle\sum_n w_k(n)$ converge (théorème 3). On note $R_k(N)=\sum_{n=N}^{+\infty}w_k(n)$; pour k fixé, $R_k(N)$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$ (proposition 3). Enfin, $w_k\leqslant w_{k+1}$ et $u_j\leqslant w_k$ dès que $j\leqslant k$.

Les blocs. On pose $N_0=0$, et l'on construit par récurrence des entiers $N_1<N_2<\cdots$: si N_{k-1} est construit, on choisit $N_k>N_{k-1}$ tel que $R_k(N_k)\leqslant 2^{-k}$, ce qui est possible puisque $R_k(N)$ tend vers 0. La suite (N_k) est strictement croissante et à valeurs entières, donc elle tend vers $+\infty$, et tout entier n appartient à un unique intervalle $[\![N_k\,;N_{k+1}-1]\!]$. On pose

$$v(n)=w_k(n)\qquad\text{pour } N_k\leqslant n<N_{k+1}.$$

La série $\sum v(n)$ converge. Elle est à termes positifs. Par la sommation par paquets (théorème 8), avec les blocs $[\![N_k\,;N_{k+1}-1]\!]$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}v(n)=\sum_{n=0}^{N_1-1}w_0(n)+\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=N_k}^{N_{k+1}-1}w_k(n)\leqslant\sum_{n=0}^{N_1-1}w_0(n)+\sum_{k=1}^{+\infty}R_k(N_k)\leqslant\sum_{n=0}^{N_1-1}w_0(n)+1,$$

qui est fini.

Domination. Soit $j\in\mathbb{N}$ et $n\geqslant N_j$. L'entier n appartient à un bloc $[\![N_k\,;N_{k+1}-1]\!]$ avec $k\geqslant j$, puisque la suite (N_k) est croissante, et $v(n)=w_k(n)\geqslant u_j(n)$.

$$\boxed{\text{la suite } v \text{ convient : } \sum v(n) \text{ converge, et } u_j(n)\leqslant v(n) \text{ pour tout } n\geqslant N_j}$$

Piège. L'erreur la plus répandue est de poser $v(n)=\sup_k u_k(n)$: ce supremum peut être infini, et même fini, il n'a aucune raison d'être le terme général d'une série convergente. Pour $u_k(n)=1$ si $n=k$ et 0

sinon, il vaut 1 pour tout n. La construction par blocs ne compare v qu'à un nombre fini de suites à la fois, et c'est le « à partir d'un certain rang » de l'énoncé qui le permet.
À retenir. L'exercice 27 a montré qu'aucune série convergente à termes strictement positifs $\sum v(n)$ ne domine toutes les autres : sa deuxième question fournit $b_n \to +\infty$ telle que $\sum v(n)b_n$ converge, et $v(n)b_n$ dépasse $v(n)$ à partir d'un certain rang. L'exercice 63 montre en revanche qu'une *suite* de séries convergentes est toujours dominée par une seule : on peut converger plus lentement que chacune des séries d'une suite donnée, mais pas que toutes les séries convergentes à la fois.

EXERCICE 64 ⋆⋆⋆⋆

Idée. Une série convergente peut contenir, à des rangs de plus en plus éloignés, des blocs de termes de somme nulle répétés autant de fois qu'on le veut. Si f ne respecte pas la somme d'un tel bloc, en répétant le bloc assez de fois on fait diverger la série des images. On en tire, près de 0, l'additivité $f(x+y) = f(x) + f(y)$; la continuité en 0, obtenue de la même façon, transforme cette additivité en linéarité.

Condition suffisante. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$ tels que $f(x) = \lambda x$ pour $|x| < \delta$. Si $\sum a_n$ converge, alors a_n tend vers 0 (proposition 2), donc $|a_n| < \delta$ et $f(a_n) = \lambda a_n$ à partir d'un certain rang n_0. La série $\sum_{n \geqslant n_0} \lambda a_n$ converge (proposition 1), et modifier un nombre fini de termes ne change pas la nature d'une série : $\sum f(a_n)$ converge.

Condition nécessaire. Soit f une fonction qui préserve la convergence.

Étape 1 : un lemme sur les blocs. Soit $p \geqslant 1$ un entier et, pour tout $k \geqslant 1$, une liste $(b_{k,1}, \dots, b_{k,p})$ de réels telle que

$$b_{k,1} + \cdots + b_{k,p} = 0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_k = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} |b_{k,1} + \cdots + b_{k,i}| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$$

On pose $h_k = f(b_{k,1}) + \cdots + f(b_{k,p})$. Montrons que $h_k = 0$ à partir d'un certain rang.

Supposons le contraire : l'ensemble des k tels que $h_k \neq 0$ est infini, et l'on note $k_1 < k_2 < \cdots$ ses éléments. Pour tout $\ell \geqslant 1$, soit m_ℓ un entier tel que $m_\ell |h_{k_\ell}| \geqslant 1$. On forme la suite (a_n) en écrivant, pour $\ell = 1, 2, \dots$, la liste $(b_{k_\ell,1}, \dots, b_{k_\ell,p})$ répétée m_ℓ fois ; on appelle « groupe ℓ » ces $p\,m_\ell$ termes consécutifs, et l'on note $L_\ell = p\,(m_1 + \cdots + m_\ell)$ le nombre de termes des ℓ premiers groupes.

La série $\sum a_n$ converge vers 0. En effet, chaque liste complète a une somme nulle ; la somme partielle des N premiers termes est donc une somme $b_{k_\ell,1} + \cdots + b_{k_\ell,i}$, où ℓ est le groupe du dernier terme écrit, et sa valeur absolue est au plus ε_{k_ℓ}. Pour $N > L_{\ell_0}$, ce groupe est d'indice $\ell > \ell_0$; comme $k_\ell \geqslant \ell$ et $\varepsilon_k \to 0$, la somme partielle tend vers 0.

Par hypothèse, la série $\sum f(a_n)$ converge ; soit B_N la somme de ses N premiers termes, et B sa somme. La suite extraite $(B_{L_\ell})_\ell$ tend aussi vers B (chapitre 7, proposition 11), donc $B_{L_\ell} - B_{L_{\ell-1}}$ tend vers 0. Or cette différence est la somme des images du groupe ℓ, c'est-à-dire $m_\ell\, h_{k_\ell}$, de valeur absolue au moins 1. C'est une contradiction, et le lemme est démontré.

Étape 2 : additivité près de 0. Montrons qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$f(x) + f(y) + f(-x-y) = 0 \qquad \text{pour tous } x, y \in \left]-\delta\,,\delta\right[. \tag{1}$$

Sinon, pour tout $k \geqslant 1$, il existe x_k, y_k dans $\left]-\dfrac{1}{k}\,,\dfrac{1}{k}\right[$ tels que $f(x_k) + f(y_k) + f(-x_k - y_k) \neq 0$. Les listes $(x_k, y_k, -x_k - y_k)$ ont une somme nulle, et leurs sommes partielles x_k, $x_k + y_k$, 0 sont de valeur absolue au plus $\dfrac{2}{k}$, qui tend vers 0. Le lemme, avec $p = 3$, donne $f(x_k) + f(y_k) + f(-x_k - y_k) = 0$ à partir d'un certain rang : c'est une contradiction.

Avec $x = y = 0$, la relation (1) donne $3f(0) = 0$, donc $f(0) = 0$. Avec $y = -x$, elle donne $f(x) + f(-x) = 0$: f est impaire sur $]-\delta\,,\delta[$. Enfin, soit $\eta = \dfrac{\delta}{2}$ et $x, y \in \left]-\eta\,,\eta\right[$; alors $x + y \in \left]-\delta\,,\delta\right[$, donc $f(-x-y) = -f(x+y)$, et (1) devient

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{pour tous } x, y \in \left]-\eta\,,\eta\right[. \tag{2}$$

Étape 3 : continuité en 0. Supposons que f ne tende pas vers $f(0) = 0$ en 0. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on puisse trouver un réel x_k avec $|x_k| \leqslant 2^{-k}$ et $|f(x_k)| > \varepsilon$. La série $\sum x_k$ est absolument convergente, par comparaison avec une série géométrique (théorème 3), donc convergente (théorème 6). Mais $f(x_k)$ ne tend pas vers 0, et $\sum f(x_k)$ diverge grossièrement (proposition 2). C'est une contradiction : f est continue en 0.

Étape 4 : linéarité près de 0. Soit $x \in]-\eta\,,\eta[$ et $q \geqslant 1$ un entier. Pour $1 \leqslant j < q$, les réels $\dfrac{jx}{q}$ et $\dfrac{x}{q}$ sont dans $]-\eta\,,\eta[$, et (2) donne $f(\dfrac{(j+1)x}{q}) = f(\dfrac{jx}{q}) + f(\dfrac{x}{q})$. Par récurrence sur j, $f(\dfrac{jx}{q}) = j\, f(\dfrac{x}{q})$ pour $1 \leqslant j \leqslant q$; avec $j = q$, $f(\dfrac{x}{q}) = \dfrac{1}{q} f(x)$. Ainsi, en tenant compte de $f(0) = 0$,

$$f\Big(\frac{j}{q}\,x\Big) = \frac{j}{q}\, f(x) \qquad \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant q. \tag{3}$$

Soit $x_0 = \dfrac{\eta}{2}$ et $\lambda = \dfrac{f(x_0)}{x_0}$. Soit $t \in [0\,,x_0]$ et, pour $n \geqslant 1$, $r_n = \dfrac{1}{n}\lfloor \dfrac{nt}{x_0} \rfloor$, qui est un rationnel de $[0\,,1]$ tel que $0 \leqslant \dfrac{t}{x_0} - r_n < \dfrac{1}{n}$. Les réels $r_n x_0$ et $t - r_n x_0$ sont dans $[0\,,x_0] \subset]-\eta\,,\eta[$; par (2) puis (3),

$$f(t) = f(r_n x_0) + f(t - r_n x_0) = \lambda\, r_n x_0 + f(t - r_n x_0).$$

Quand n tend vers $+\infty$, $r_n x_0$ tend vers t, et $t - r_n x_0$ tend vers 0, donc $f(t - r_n x_0)$ tend vers $f(0) = 0$ par l'étape 3 (chapitre 8, théorème 7). Il reste $f(t) = \lambda t$ pour tout $t \in [0\,,x_0]$, puis, par imparité, pour tout $t \in [-x_0\,,x_0]$.

$$\boxed{f \text{ préserve la convergence } \iff \text{ il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \delta' > 0 \text{ tels que } f(x) = \lambda x \text{ pour } |x| < \delta'}$$

Piège. L'erreur la plus répandue est de croire qu'un équivalent suffit : la fonction sin vérifie $\sin x \sim x$ en 0, et pourtant elle ne préserve pas la convergence. Avec $x_k = k^{-1/3}$, la série formée des blocs $(x_k, x_k, -2x_k)$ converge, ses sommes partielles valant x_k, $2x_k$ ou 0. Si la série des sinus convergeait, la série de ses paquets de trois termes convergerait aussi (exercice 6). Or ces paquets valent

$$2\sin x_k - \sin(2x_k) = 2\sin x_k\,(1 - \cos x_k) \sim x_k^3 = \frac{1}{k},$$

terme général positif d'une série divergente (théorème 4). Les termes d'ordre 3 du développement de sin, invisibles dans l'équivalent, se cumulent : sur les 20 000 premiers blocs, la somme des sinus vaut déjà environ 9,98, alors que les sommes partielles de la série de départ, en fin de bloc, sont nulles ✓. Le résultat est le même pour toute fonction non linéaire près de 0, par exemple $x \mapsto x + x^2$, avec les blocs $(x_k, -x_k)$ et $x_k = k^{-1/2}$, dont les images ont pour somme $2x_k^2 = \dfrac{2}{k}$.

À retenir. L'étape 3 n'est pas un détail : l'additivité (2) seule ne suffit pas à conclure, car il existe des fonctions additives sur $\mathbb{R}$ qui ne sont pas linéaires, dont la construction dépasse largement le programme. C'est la continuité en 0, fournie elle aussi par l'hypothèse, qui permet le passage des rationnels aux réels, comme dans l'étude de l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.