EXERCICES – CHAPITRE 20

SÉRIES NUMÉRIQUES ET FAMILLES SOMMABLES

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Dans toute la feuille, on reprend les notations du cours : $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est la somme partielle de la série harmonique, γ la constante d'Euler, de sorte que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$, et $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ pour tout réel $s > 1$. On pourra utiliser librement les résultats démontrés dans le cours, en particulier $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

Séries numériques : généralités

EXERCICE 1 ⋆

Montrer les égalités suivantes, après avoir justifié la convergence de chacune des séries.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right) = \ln 2$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(3 + (-1)^k\right)^{-k} = \frac{26}{15}$

EXERCICE 2 ⋆

Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme. Dans la dernière, p désigne un entier naturel non nul.

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)}.$$

Pour la dernière, on pourra écrire le terme général comme la différence de deux termes consécutifs d'une même suite.

EXERCICE 3 ⋆

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!}$ converge et calculer sa somme ; pour $k = 0$, le produit vide vaut 1.
2. En déduire les sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+2n+3}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^4}{n!}$. On cherchera à écrire n^4 comme combinaison linéaire des polynômes $X(X-1)\cdots(X-k+1)$, pour $0 \leqslant k \leqslant 4$.

EXERCICE 4 ⋆⋆

1. Déterminer les réels a et b pour lesquels la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(\ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)\right)$ converge, et calculer alors sa somme.
2. Même question pour la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}\right)$.

EXERCICE 5 ⋆⋆

Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n\geqslant 2} \ln\Big(\frac{\big(\ln(n+1)\big)^2}{\ln n\,\ln(n+2)}\Big),$$

puis calculer sa somme lorsqu'elle existe. On pourra poser $a_n = \ln(\ln n)$ pour $n \geqslant 2$.

EXERCICE 6 ⋆⋆

Regrouper les termes d'une série. Soit $\sum a_n$ une série d'éléments de $\mathbb{K}$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que $\varphi(0) = 0$. On pose, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$S_p = \sum_{k=\varphi(p)}^{\varphi(p+1)-1} a_k.$$

1. Montrer que si $\sum a_n$ converge, alors $\sum S_p$ converge et $\sum_{p=0}^{+\infty} S_p = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
2. Montrer par un exemple que la réciproque est fausse.
3. On suppose que $\sum S_p$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=\varphi(p)}^{\varphi(p+1)-1} |a_k|$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$. Montrer que $\sum a_n$ converge.
4. En déduire la nature de la série $\dfrac{a}{\sqrt{1}} + \dfrac{b}{\sqrt{2}} + \dfrac{c}{\sqrt{3}} + \dfrac{a}{\sqrt{4}} + \dfrac{b}{\sqrt{5}} + \dfrac{c}{\sqrt{6}} + \dfrac{a}{\sqrt{7}} + \cdots$ selon les réels a, b et c.

Séries à termes positifs

EXERCICE 7 ⋆

Déterminer, en fonction des paramètres a, $b \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$, la nature des séries de termes généraux suivants.

(a) $\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^{\sqrt{n}}$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\Big(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)$

(c) $1 - \cos\dfrac{\pi}{n}$

(d) $a^n\, n!$

(e) $\ln\Big(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\Big)$

(f) $\dfrac{\ln n}{\ln(\mathrm{e}^n - 1)}$

(g) $\sqrt{\operatorname{ch}\dfrac{1}{n} - 1}$

(h) $\Big(\dfrac{n}{n+1}\Big)^{n^2}$

(i) $\Big(n \sin\dfrac{1}{n}\Big)^{n^\alpha}$

(j) $\sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2+3}$

(k) $\mathrm{e}^{1/n} - a - \dfrac{b}{n}$

(l) $\dfrac{(n+1)^{1+1/n} - (n-1)^{1-1/n}}{n^a}$ $(n \geqslant 2)$

EXERCICE 8 ⋆

On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_n = \frac{1}{n}$ si n est le carré d'un entier, et $u_n = \frac{1}{n^2}$ sinon. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$. La suite (nu_n) tend-elle vers 0 ?

EXERCICE 9 ⋆

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrer que la série $\sum u_n^\alpha$ converge pour tout réel $\alpha > 1$.
2. On suppose que $\sum u_n$ diverge. Montrer que la série $\sum u_n^\alpha$ diverge pour tout réel $\alpha \in]0\,,1[$.
3. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ sont de même nature.

EXERCICE 10 ⋆

À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, donner un équivalent simple, quand n tend vers $+\infty$, de

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad \text{et de} \qquad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}.$$

EXERCICE 11 ⋆⋆

Déterminer la nature des séries suivantes, en fonction des paramètres réels indiqués.

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \Big(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (1 - \operatorname{th} n)$.

(b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^\lambda + \ln n}{n^2}$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{a^n\, 2^{\sqrt{n}}}{b^n + 2^{\sqrt{n}}}$, pour $a > 0$ et $b > 0$.

(d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \Big(\sqrt[3]{n^3 + an^2 + bn + c} - \sqrt{n^2 + n + 1}\Big)$, pour a, b, $c \in \mathbb{R}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \Big(\operatorname{Arccos}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{n^\alpha}\Big) - \frac{\pi}{4}\Big)$, pour $\alpha > 0$; le terme général n'est défini que si $n^\alpha \geqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$, et la série commence au premier rang qui vérifie cette condition.

EXERCICE 12 ⋆⋆

Déterminer la nature des séries de termes généraux suivants.

(a) $u_n = \dfrac{1}{\ln(n!)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, pour $n \geqslant 2$.

(b) $v_n = \displaystyle\int_0^{\pi/n} \frac{\sin^3 x}{1+x}\,\mathrm{d}x$, pour $n \geqslant 1$.

(c) $w_n = a^{H_n}$, pour $n \geqslant 1$, où $a > 0$ est un réel fixé.

EXERCICE 13 ⋆⋆

Les séries de Bertrand. Pour α, $\beta \in \mathbb{R}$, on considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

1. Déterminer sa nature lorsque $\alpha \neq 1$, par comparaison avec des séries de Riemann bien choisies.
2. À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, déterminer sa nature lorsque $\alpha = 1$.
3. Représenter dans le plan l'ensemble des couples (α, β) pour lesquels la série converge.

EXERCICE 14 ⋆⋆

Montrer que $(s-1)\,\zeta(s)$ tend vers 1 quand le réel s tend vers 1 par valeurs supérieures. Que peut-on en déduire pour $\zeta(s)$?

EXERCICE 15 ⋆⋆

Déterminer la partie entière du réel $\displaystyle\sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n^{2/3}}$, sans calculatrice.

EXERCICE 16 ⋆⋆

1. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(2n+1)}$ et calculer sa somme. On pourra exprimer ses sommes partielles à l'aide de H_n et de H_{2n+1}.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_n = -\frac{4}{n}$ si 5 divise n, et $u_n = \frac{1}{n}$ sinon. Montrer que la série $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

EXERCICE 17 ⋆⋆

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs.

1. Montrer que si $\sum a_n$ converge, alors $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge.
2. Montrer que la réciproque est vraie si la suite (a_n) est décroissante, mais qu'elle est fausse en général.

EXERCICE 18 ⋆⋆

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle positive et décroissante telle que la série $\sum u_n$ converge.

1. En minorant la somme $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k$, montrer que nu_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
2. Montrer, à l'aide de l'exercice 8, que l'hypothèse de décroissance est indispensable.
3. Montrer que la série $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge et que sa somme vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

EXERCICE 19 ⋆⋆

Une condensation. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle décroissante de limite nulle.

1. Montrer que les séries $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ et $\sum_{p\geqslant 0} 2^p a_{2^p}$ sont de même nature.
2. Retrouver ainsi la nature des séries de Riemann, puis déterminer, selon le réel α, la nature de la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n\ln n\,(\ln\ln n)^\alpha}$.
3. On suppose que $\sum a_n$ diverge. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \min\left(a_n, \frac{1}{n}\right)$ diverge.

EXERCICE 20 ⋆⋆

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une bijection. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$. On pourra minorer les sommes $\sum_{n=N+1}^{2N} \frac{\sigma(n)}{n^2}$.

EXERCICE 21 ⋆⋆

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^k}{2^{n+1}}$ converge, et que sa somme S_k est un nombre entier. On pourra exprimer S_k à l'aide de $S_0, \ldots, S_{k-1}$ en effectuant le changement d'indice $n = m+1$. Calculer $S_0, \ldots, S_4$.

EXERCICE 22 ⋆⋆

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite injective d'entiers naturels non nuls. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\operatorname{ppcm}(u_1,u_2,\dots,u_n)}$. On pourra montrer qu'un entier $m\geqslant 1$ a au plus $2\sqrt{m}$ diviseurs positifs.

EXERCICE 23 ⋆⋆⋆

1. Montrer que la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_1^x\frac{\sin(\ln t)}{t}\,\mathrm{d}t$ n'a pas de limite en $+\infty$.
2. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que, quand l'entier k tend vers $+\infty$,
$$\frac{\sin(\ln k)}{k}-\int_k^{k+1}\frac{\sin(\ln t)}{t}\,\mathrm{d}t=O\Big(\frac{1}{k^2}\Big).$$
3. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(\ln n)}{n}$ diverge.
4. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln n}}{n}$?

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

Restes de séries équivalentes.

1. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes strictement positifs telles que $u_n\sim v_n$. Montrer que leurs restes sont équivalents : $\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k\sim\sum_{k=n+1}^{+\infty}v_k$.
2. En appliquant la question précédente avec $v_k=\frac{1}{\alpha-1}\big(\frac{1}{k^{\alpha-1}}-\frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\big)$, retrouver un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha>1$.
3. On pose $u_n=H_n-\ln n-\gamma$ pour $n\geqslant 1$. Donner un équivalent de u_n-u_{n+1}, et en déduire un équivalent de u_n. Montrer enfin que
$$H_n=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

EXERCICE 25 ⋆⋆⋆

Pour tout $n\geqslant 2$, on pose $u_n=\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(2-3^{1/k})$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge.
2. Déterminer sa limite, en étudiant la série de terme général $\ln(2-3^{1/k})$.
3. Montrer qu'il existe un réel $\alpha>0$ tel que $u_n\sim\dfrac{\alpha}{n^{\ln 3}}$.

EXERCICE 26 ⋆⋆⋆

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose qu'il existe un réel α tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1-\dfrac{\alpha}{n}+o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge si $\alpha>1$ et diverge si $\alpha<1$. On pourra comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à $\big(\frac{n}{n+1}\big)^\beta$ pour un réel β bien choisi. Montrer par deux exemples que l'on ne peut pas conclure si $\alpha=1$.
2. On suppose qu'il existe un réel λ et une suite (v_n) tels que la série $\sum v_n$ soit absolument convergente et que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1-\dfrac{\lambda}{n}+v_n$ pour tout n. Montrer que la suite $(n^\lambda u_n)$ converge vers un réel strictement positif.
3. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^n}{n!\,\mathrm{e}^n}$. Retrouver ce résultat à l'aide de la formule de Stirling.

EXERCICE 27 ⋆⋆⋆

Il n'existe pas de série de comparaison universelle.

1. Soit (η_n) une suite de réels strictement positifs de limite nulle. Montrer qu'il existe une série convergente à termes positifs $\sum a_n$ telle que a_n ne soit pas négligeable devant η_n.
2. Soit $\sum a_n$ une série convergente à termes strictement positifs, de restes $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Montrer que $\frac{a_n}{\sqrt{R_{n-1}}} \leqslant 2\left(\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}\right)$ pour tout $n \geqslant 1$. En déduire qu'il existe une suite positive (b_n) de limite $+\infty$ telle que $\sum a_n b_n$ converge.
3. Soit $\sum a_n$ une série divergente à termes strictement positifs, de sommes partielles S_n. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{S_n}$ diverge, en minorant $\sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{S_k}$. En déduire qu'il existe une suite positive (b_n) de limite nulle telle que $\sum a_n b_n$ diverge.

EXERCICE 28 ⋆⋆⋆

Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs et $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ sa somme partielle. On suppose que $a_n S_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

1. Montrer que la série $\sum a_n$ diverge et que a_n tend vers 0.
2. Montrer que $S_{n+1} \sim S_n$, puis que $S_{n+1}^2 - S_n^2$ tend vers 2.
3. En déduire que $a_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.
4. Réciproquement, montrer que si $b_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$, alors $b_n \sum_{k=1}^{n} b_k$ tend vers 1.

EXERCICE 29 ⋆⋆⋆

Sommes partielles « à trous ». Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs, de somme U, telle que

$$u_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que, pour tout réel $S \in [0\,, U]$, il existe une partie A de $\mathbb{N}$ telle que $S = \sum_{k\in A} u_k$. On pourra construire A en parcourant les entiers dans l'ordre croissant et en retenant k chaque fois que c'est possible sans dépasser S. Que donne ce résultat pour $u_n = \frac{1}{2^{n+1}}$?

Séries absolument convergentes

EXERCICE 30 ⋆

Soit $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ trois séries réelles telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent. Montrer que $\sum v_n$ converge. Peut-on remplacer l'hypothèse par $|v_n| \leqslant |w_n|$ et la seule convergence de $\sum w_n$?

EXERCICE 31 ⋆

1. On note a_n la n-ième décimale de π, de sorte que $\pi = 3 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$. Déterminer, selon le réel x, la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$. On pourra utiliser l'irrationalité de π, établie à l'exercice 52 de la feuille du chapitre 18.
2. Représenter dans le plan l'ensemble des points $M(x, y)$, avec $y \neq -1$, tels que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{1+y^n}$ converge.

EXERCICE 32 ⋆⋆

Déterminer, selon le réel x, la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\binom{2n}{n}x^n$. On pourra comparer le terme général à celui d'une série géométrique, en étudiant le quotient de deux termes consécutifs, et utiliser la formule de Stirling lorsque $|x|=\frac{1}{4}$.

EXERCICE 33 ⋆⋆

Pour tout $n\geqslant 1$, on pose $z_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{k}\right)$.

1. Montrer que la suite $(|z_n|)$ converge.
2. Montrer que la suite (z_n) diverge. On pourra écrire $1+\frac{\mathrm{i}}{k}=\left|1+\frac{\mathrm{i}}{k}\right|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}$, avec $\theta_k=\operatorname{Arctan}\frac{1}{k}$.

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum u_n$ soit absolument convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^k=0 \qquad \text{pour tout entier } k\geqslant 1.$$

Montrer que la suite (u_n) est nulle. On pourra raisonner par l'absurde, diviser par le plus grand des modules $|u_n|$, et étudier la moyenne des carrés des modules des sommes obtenues pour k allant de 1 à K.

Séries alternées

EXERCICE 35 ⋆

1. Soit $\alpha>0$ et, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\operatorname{Arccos}\left(\frac{1+n^\alpha}{2+n^\alpha}\right)$. Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum(-1)^n u_n$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n+\sin n}$. Le théorème des séries alternées s'applique-t-il directement ?

EXERCICE 36 ⋆⋆

À l'aide de développements asymptotiques, déterminer la nature des séries suivantes, en fonction des paramètres indiqués. On précisera, en cas de convergence, si elle est absolue.

(a) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$

(b) $\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n n^\alpha}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

(c) $\sum_{n\geqslant 0}\sin\left(\sqrt{1+n^2\pi^2}\right)$

(d) $\sum_{n\geqslant 0}\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$

(e) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$

(f) $\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{(\ln n)^a+(-1)^n}$, $a>0$

(g) $\sum\frac{(-1)^n}{\ln\left(n^a+(-1)^n\right)}$, pour $a>0$, la somme commençant au premier rang à partir duquel le terme général est défini.

EXERCICE 37 ⋆⋆

Pour toute suite réelle $u = (u_n)$, on note $E(u)$ l'ensemble des entiers $p \geqslant 1$ tels que la série $\sum u_n^p$ converge.

1. On suppose u à termes positifs. Montrer que $E(u)$ est soit vide, soit de la forme $\{p \in \mathbb{N} \mid p \geqslant p_0\}$ pour un entier $p_0 \geqslant 1$.
2. Donner un exemple de suite u positive telle que $E(u)$ soit vide et, pour tout entier $p_0 \geqslant 1$, un exemple de suite u positive telle que $E(u) = \{p \in \mathbb{N} \mid p \geqslant p_0\}$.
3. Déterminer $E(u)$ lorsque $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ pour $n \geqslant 1$, puis lorsque $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{1/3}}\right)$ pour $n \geqslant 2$. Le résultat de la première question subsiste-t-il sans hypothèse de signe ?

EXERCICE 38 ⋆⋆

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \sin(\pi\, n!\, \mathrm{e})$. On pourra écrire, à l'aide du théorème 2 du cours, $n!\,\mathrm{e} = a_n + r_n$, où $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ est un entier dont on étudiera la parité, et $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}$.

EXERCICE 39 ⋆⋆

On pourra utiliser l'exercice 6 de cette feuille.

1. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{\lfloor \ln n \rfloor}}{n}$.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{\sin(\ln n)}{n}$, et comparer avec l'exercice 23.

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆

On veut calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

1. Montrer que cette série converge.
2. Montrer qu'il existe un réel C tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} = \frac{(\ln n)^2}{2} + C + o(1)$.
3. En séparant les indices pairs et impairs, exprimer la somme partielle $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$ à l'aide de H_n et de sommes de la forme $\sum_{k=1}^{m} \frac{\ln k}{k}$, puis montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

EXERCICE 41 ⋆⋆⋆

Pour $n \geqslant 1$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et $R_n = \ln 2 - S_n$.

1. Montrer que $R_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$, puis que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$.
2. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \big(2 - \exp(S_n)\big)$.

EXERCICE 42 ⋆⋆⋆

La transformation d'Abel. Soit (u_n) et (v_n) deux suites de nombres complexes, et $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_{n+1}V_n - \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k)V_k$.
2. En déduire une nouvelle démonstration de la convergence dans le théorème des séries alternées.
3. Plus généralement, on suppose que (u_n) est une suite réelle décroissante de limite nulle et que la suite (V_n) est bornée. Montrer que la série $\sum u_n v_n$ converge.
4. Déterminer, en fonction des réels α et θ, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n^\alpha}$.
5. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos n}{n}$ converge mais que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{|\cos n|}{n}$ diverge. On pourra comparer $|\cos n|$ et $\cos^2 n$. Qu'en est-il de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin n}{n}$ et de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{|\sin n|}{n}$?

EXERCICE 43 ⋆⋆⋆

Soit $\alpha > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{\cos u_n}{n^\alpha}$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. Montrer que $u_n \in]0\,,1]$ pour tout n, que (u_n) tend vers 0, et déterminer en fonction de α la nature de la série $\sum u_n$.
2. Montrer que $u_n - u_{n+1} = O\Big(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\Big)$, puis que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang. On pourra exprimer $u_{n+1} - u_{n+2}$ à l'aide de $u_n - u_{n+1}$.
3. En déduire, en fonction de α, la nature de la série $\sum (-1)^n u_n$.

EXERCICE 44 ⋆⋆⋆

Le théorème de réarrangement de Riemann. Le cours a admis ce théorème à la section 20.5 ; on le démontre ici. Soit $\sum u_n$ une série réelle semi-convergente, c'est-à-dire convergente mais non absolument convergente, et $S \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1. Montrer que les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ divergent toutes les deux. En déduire que l'ensemble P des indices n tels que $u_n \geqslant 0$ et l'ensemble N des indices n tels que $u_n < 0$ sont infinis.
2. On suppose S réel. On construit une suite d'indices $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, … en prenant, dans l'ordre croissant, des indices de P jusqu'à ce que la somme des termes choisis dépasse strictement S, puis des indices de N, dans l'ordre croissant, jusqu'à ce qu'elle redevienne inférieure ou égale à S, et ainsi de suite. Justifier que cette construction ne s'arrête jamais, et que φ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.
3. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)}$ tend vers S quand n tend vers $+\infty$. On majorera l'écart à S à l'aide des termes $u_{\varphi(k)}$ qui précèdent un changement de signe.
4. Adapter la construction au cas où $S = +\infty$.

Familles sommables de réels positifs

EXERCICE 45 ⋆

Les familles suivantes sont-elles sommables ? Lorsque c'est le cas, on calculera la somme de la première.

$$\text{(a)}\ \left(\frac{2^n 3^m}{(n+m)!}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}, \qquad \text{(b)}\ \left(\frac{1}{|n^2-m^2|}\right)_{\substack{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2,\\ n\neq m}}, \qquad \text{(c)}\ \left(\frac{1}{r^2}\right)_{r\in\mathbb{Q}\cap]1,+\infty[}.$$

EXERCICE 46 ⋆

Pour quelles valeurs du réel α la famille $\left(\frac{1}{n^{\alpha p}}\right)_{n\geqslant 2,\, p\geqslant 2}$ est-elle sommable ? Comparer avec l'exemple du cours où l'on calcule $\sum_{n=2}^{+\infty}(\zeta(n)-1)$.

EXERCICE 47 ⋆

1. Soit $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ une série convergente à termes positifs. Montrer que la série de terme général

$$b_p = p\sum_{n=p}^{+\infty}\frac{a_n}{n(n+1)}, \qquad p\geqslant 1,$$

converge, et calculer sa somme en fonction de celle de $\sum a_n$.

2. Soit $p\geqslant 2$ un entier. Calculer $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{1}{n^{p+1}}$.

EXERCICE 48 ⋆⋆

Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel α pour que la famille $\left(\frac{1}{p^\alpha+q^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ soit sommable. On pourra regrouper les couples (p,q) selon la valeur de $\max(p,q)$.

EXERCICE 49 ⋆⋆

Pour deux entiers p, $q\geqslant 1$, on note $p\wedge q$ leur PGCD. Calculer, en fonction de $\zeta(2)$ et de $\zeta(4)$, la somme

$$\sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ p\wedge q=1}}\frac{1}{p^2q^2}.$$

On pourra regrouper les couples $(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2$ selon la valeur de $p\wedge q$. En admettant que $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$, donner la valeur de cette somme.

EXERCICE 50 ⋆⋆⋆

Montrer que la famille $\left(\frac{1}{nm(n+m)}\right)_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et que

$$\sum_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{nm(n+m)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{n^2}=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{(n+1)^2}=2\zeta(3).$$

On pourra, pour la première égalité, sommer d'abord en m ; pour la deuxième, regrouper les couples selon la valeur de $n+m$.

EXERCICE 51 ⋆⋆⋆

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $b(n)$ le nombre de chiffres égaux à 1 dans l'écriture de n en base 2 ; par exemple $b(6) = b(\overline{110}^2) = 2$. Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b(n)}{n(n+1)}.$$

On pourra écrire $b(n) = \sum_{j\geqslant 0} \varepsilon_j(n)$, où $\varepsilon_j(n) \in \{0,1\}$ est le chiffre de rang j de n, et décrire les entiers n tels que $\varepsilon_j(n) = 1$.

Familles sommables de nombres complexes

EXERCICE 52 ⋆

Pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on pose $a_{i,j} = \dfrac{\operatorname{sgn}(i-j)}{2^{|i-j|}}$, où $\operatorname{sgn}(x)$ vaut 1, -1 ou 0 selon que x est strictement positif, strictement négatif ou nul.

1. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, montrer que la série $\sum_i a_{i,j}$ converge et calculer sa somme. En déduire la valeur de $\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$.
2. Calculer $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$, et en déduire que la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.
3. Montrer directement que cette famille n'est pas sommable. En quoi cet exemple diffère-t-il de celui du cours ?

EXERCICE 53 ⋆

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

1. Montrer que la famille $(z^{2p+3q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme $S(z)$.
2. Écrire $S(z)$ sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} d_n z^n$, où (d_n) est une suite d'entiers naturels que l'on interprétera de façon combinatoire. Calculer d_n pour $n \leqslant 12$, et comparer avec l'exercice 35 de la feuille du chapitre 10.
3. Que se passe-t-il lorsque $|z| = 1$?

EXERCICE 54 ⋆⋆

Soit x un nombre complexe de module strictement inférieur à 1. Montrer les égalités suivantes, après avoir justifié l'existence de chacune des sommes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n - x^{n^2}}{1-x^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}.$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x^i}{1-x^{2i}}.$

(c) $\displaystyle\sum_{(i,k)\in(\mathbb{N}^*)^2} i\,x^{ik} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n}.$

Dans chaque cas, écrire aussi la quantité étudiée sous la forme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$, pour une suite (a_n) que l'on interprétera à l'aide des diviseurs de n.

EXERCICE 55 ⋆⋆⋆

Une famille indexée par $\mathbb{Z}^2$. On note $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ et, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\max(|a|,|b|)$ le plus grand des réels $|a|$ et $|b|$.

1. Soit $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{H}$. Montrer qu'il existe un réel $c_z > 0$ tel que $|az+b| \geqslant c_z \max(|a|,|b|)$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On pourra distinguer les cas $|b| \geqslant 2|a|\,|z|$ et $|b| < 2|a|\,|z|$.
2. Pour $N \geqslant 1$, dénombrer les couples $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\max(|n|,|m|) = N$. En déduire que, pour tout entier $k \geqslant 3$ et tout $z \in \mathbb{H}$, la famille $\left(\dfrac{1}{(nz+m)^k}\right)_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}$ est sommable.
3. Pour $k \geqslant 3$ et $z \in \mathbb{H}$, on note $G_k(z)$ la somme de cette famille. Calculer $G_k(z)$ lorsque k est impair.
4. On suppose k pair. Montrer que $G_k(\mathrm{i}y)$ tend vers $2\zeta(k)$ quand le réel y tend vers $+\infty$. On pourra majorer, pour $y \geqslant 1$ et $n \neq 0$, le module de $\frac{1}{(niy+m)^k}$ par $\frac{1}{y}\,\frac{1}{(n^2+m^2)^{(k-1)/2}}$.

Exercices de synthèse

EXERCICE 56 ⋆⋆

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Les suites considérées sont réelles.

1. Si u_n tend vers 0, alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Si la série $\sum u_n$ converge et si $u_n \geqslant 0$ pour tout n, alors la série $\sum u_n^2$ converge.
3. Si la série $\sum u_n$ converge et si $u_n \sim v_n$, alors la série $\sum v_n$ converge.
4. Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, toute série obtenue en écrivant ses termes dans un autre ordre converge, et a la même somme.
5. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum u_{2n}$ converge.
6. Si les séries à termes positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors la série $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.
7. Si la série $\sum u_n$ converge sans converger absolument, alors les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ divergent toutes les deux.
8. Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente et si la suite (v_n) est bornée, alors la série $\sum u_n v_n$ converge.
9. Si une famille $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est telle que toutes les séries $\sum_q a_{p,q}$ et $\sum_p a_{p,q}$ convergent, et que les deux sommes itérées $\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}$ et $\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q}$ existent et sont égales, alors elle est sommable.
10. La famille $\left(\dfrac{(-1)^{p+q}}{2^p\,3^q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, et sa somme vaut $\dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 57 ⋆⋆

Presque tous les entiers contiennent un 7. On note E l'ensemble des entiers $n \geqslant 1$ dont l'écriture en base 10 ne contient pas le chiffre 7.

1. Pour $k \geqslant 1$, dénombrer les entiers de E qui s'écrivent avec exactement k chiffres.
2. En déduire que la proportion des entiers de $[\![1\,;10^k-1]\!]$ qui appartiennent à E tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.
3. Montrer pourtant que la famille $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in E}$ est sommable, et que sa somme est au plus égale à 80. Comparer avec la série harmonique.

Cette série a été étudiée par A. J. Kempner en 1914 ; pour le chiffre 9 au lieu du chiffre 7, sa somme vaut environ 22,92.

EXERCICE 58 ⋆⋆⋆

Une somme sur les puissances parfaites. On appelle *puissance parfaite* tout entier de la forme a^s, avec $a \geqslant 2$ et $s \geqslant 2$ entiers, et l'on note $P = \{4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, \dots\}$ leur ensemble, chacune n'étant comptée qu'une fois. On note A l'ensemble des entiers $a \geqslant 2$ qui ne sont pas des puissances parfaites. On veut calculer $\sum_{n\in P} \frac{1}{n-1}$.

1. Montrer que tout entier $m \geqslant 2$ s'écrit de façon unique sous la forme $m = a^r$, avec $a \in A$ et $r \geqslant 1$. On pourra utiliser la décomposition en facteurs premiers et le PGCD des exposants.
2. En déduire que $(a, s) \mapsto a^s$ est une bijection de $A \times \{2, 3, \dots\}$ sur P.
3. Montrer que, dans $[0\,, +\infty]$,

$$\sum_{n\in P} \frac{1}{n-1} = \sum_{a\in A} \sum_{N\geqslant 2} \frac{c_N}{a^N} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{m^k} = \sum_{a\in A} \sum_{N\geqslant 2} \frac{c'_N}{a^N},$$

   où c_N est le nombre de couples (s, j) d'entiers tels que $s \geqslant 2$, $j \geqslant 1$ et $sj = N$, et c'_N le nombre de couples (r, k) tels que $r \geqslant 1$, $k \geqslant 2$ et $rk = N$.
4. Conclure à l'aide d'un exemple du cours.

Ce résultat a été publié par Euler en 1737, qui l'attribuait à Goldbach.

EXERCICE 59 ⋆⋆⋆

La série des inverses des nombres premiers diverge. On note $(p_k)_{k\geqslant 1}$ la suite croissante des nombres premiers et, pour $r \geqslant 1$, E_r l'ensemble des entiers $n \geqslant 1$ dont tous les diviseurs premiers appartiennent à $\{p_1, \dots, p_r\}$; ainsi $1 \in E_r$.

1. Soit $r \geqslant 1$ et $s \geqslant 1$ un réel. Montrer que, dans $[0\,, +\infty]$,

$$\sum_{n\in E_r} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1 - p_k^{-s}}.$$

   On pourra utiliser l'unicité de la décomposition en facteurs premiers et la proposition 15 du cours.
2. En déduire que, pour tout réel $s > 1$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1 - p_k^{-s}}$ tend vers $\zeta(s)$ quand r tend vers $+\infty$.
3. En prenant $s = 1$, montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1 - 1/p_k} \geqslant H_{p_r}$, puis que la série $\sum_{k\geqslant 1} \ln\Big(\frac{1}{1 - 1/p_k}\Big)$ diverge.
4. En déduire que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{p_k}$ diverge. Comparer avec la série des inverses des carrés : en ce sens, les nombres premiers sont « plus nombreux » que les carrés.

EXERCICE 60 ⋆⋆⋆

La proportion des couples d'entiers premiers entre eux. On définit la fonction $\mu : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ par $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^r$ si n est le produit de r nombres premiers deux à deux distincts, et $\mu(n) = 0$ sinon, c'est-à-dire si n est divisible par le carré d'un nombre premier. Par exemple, $\mu(6) = 1$, $\mu(7) = -1$ et $\mu(12) = 0$.

1. (a) Pour $n \geqslant 1$, calculer $s_n = \displaystyle\sum_{d|n} \mu(d)$, la somme portant sur les diviseurs positifs d de n. On pourra écrire $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ et se ramener aux diviseurs de $p_1 \cdots p_r$.

   (b) Montrer que la famille $\Big(\frac{\mu(k)}{k^2 m^2}\Big)_{(k,m)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable, et en déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k^2} = \frac{6}{\pi^2}$.

2. Pour $n \geqslant 1$, on note q_n le nombre de couples $(u, v) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tels que $u \wedge v = 1$. Montrer que

$$q_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(k) \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^2,$$

la somme ne comportant qu'un nombre fini de termes non nuls. On pourra remarquer que $\sum_{d|u\wedge v} \mu(d)$ vaut 1 si $u \wedge v = 1$ et 0 sinon.

3. En déduire que $\dfrac{q_n}{n^2}$ tend vers $\dfrac{6}{\pi^2} \approx 0{,}608$ quand n tend vers $+\infty$, et interpréter ce résultat.

Les quatre derniers exercices sont des problèmes à traiter en autonomie : l'énoncé fixe le but, et c'est à vous de trouver le chemin.

EXERCICE 61 ⋆⋆⋆⋆

1. Déterminer toutes les fonctions continues $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$ pour tout $x \in [0\,,1]$.

2. Déterminer toutes les fonctions continues $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{3^n}$ pour tout $x \in [0\,,1]$.

EXERCICE 62 ⋆⋆⋆⋆

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers $k \in [\![1\,;n]\!]$ premiers avec n. Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{2^n - 1}.$$

EXERCICE 63 ⋆⋆⋆⋆

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de suites réelles positives : pour chaque k, $u_k = (u_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, et l'on suppose que la série $\sum_n u_k(n)$ converge. Montrer qu'il existe une suite réelle $v = (v(n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum_n v(n)$ converge et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait $u_k(n) \leqslant v(n)$ à partir d'un certain rang.

EXERCICE 64 ⋆⋆⋆⋆

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *préserve la convergence* si, pour toute série réelle convergente $\sum a_n$, la série $\sum f(a_n)$ converge. Montrer que les fonctions qui préservent la convergence sont exactement celles qui coïncident, sur un voisinage de 0, avec une fonction $x \mapsto \lambda x$, où λ est un réel.