EXERCICES – CHAPITRE 21

DÉNOMBREMENT, PROBABILITÉS ET VARIABLES ALÉATOIRES

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Dans toute la feuille, on reprend les notations du cours. Pour un ensemble fini E, on note $|E|$ ou $\text{card}(E)$ son cardinal, et $[\![a\,,b]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre a et b. Sauf mention contraire, (Ω, P) est un espace probabilisé fini. La probabilité de A sachant un événement B de probabilité non nulle est notée $\mathrm{P}_B(A)$, y compris lorsque B est un événement de la forme $(X = x)$; on écrit $\mathrm{P}(A \mid B_1 \cap B_2)$ lorsque l'événement conditionnant est une intersection. Les lois uniforme, de Bernoulli et binomiale sont notées $\mathcal{U}(E)$, $\mathcal{B}(p)$ et $\mathcal{B}(n,p)$, et $X \perp\!\!\!\perp Y$ signifie que X et Y sont indépendantes. Les programmes demandés sont écrits en Python.

Dénombrement

EXERCICE 1 ⋆

On note E l'ensemble des entiers naturels qui s'écrivent en base 10 avec exactement sept chiffres, dont aucun n'est égal à 0. Déterminer le cardinal de E, puis celui de chacune des parties suivantes de E.

(a) La partie E_1 formée des nombres dont les sept chiffres sont deux à deux distincts.

(b) La partie E_2 formée des nombres pairs.

(c) La partie E_3 formée des nombres dont la suite des chiffres, lue de gauche à droite, est strictement croissante.

EXERCICE 2 ⋆

1. Les quatre boulangeries d'un village ferment chacune un jour par semaine. Combien y a-t-il de façons de choisir leurs jours de fermeture ? Même question lorsque deux boulangeries ne ferment jamais le même jour, puis lorsqu'il doit y avoir, chaque jour, au moins une boulangerie ouverte.
2. Chaque matin, on choisit entre du thé et du café. Soit $n \geqslant 1$. Combien y a-t-il de façons de choisir les boissons de n petits déjeuners consécutifs dans chacun des cas suivants ?
   (a) Sans aucune contrainte.
   (b) En buvant au moins une fois chacune des deux boissons.
   (c) En buvant aussi souvent du thé que du café.
   (d) Sans jamais prendre la même boisson deux jours de suite.

EXERCICE 3 ⋆

Une *anagramme* d'un mot est un mot formé des mêmes lettres, chacune figurant le même nombre de fois, dans un ordre quelconque ; le mot lui-même est l'une de ses anagrammes, et un mot n'a pas besoin d'avoir un sens.

1. Dénombrer les anagrammes des mots MATHS, RIRE et ANANAS.
2. Plus généralement, un mot de longueur n est formé de r lettres distinctes, la i-ième figurant k_i fois, avec $k_1 + \cdots + k_r = n$. Montrer qu'il possède $\dfrac{n!}{k_1! \cdots k_r!}$ anagrammes, et comparer avec l'exercice 37 de la feuille du chapitre 3.

EXERCICE 4 ⋆

Chaque étudiant d'un groupe étudie exactement une langue, l'anglais ou l'allemand, et suit exactement une option, parmi l'informatique, la chimie et l'astronomie. On sait que 12 étudiants suivent l'astronomie, 15 la chimie, et que 16 étudient l'allemand ; parmi eux, 8 suivent l'astronomie et étudient l'anglais, 3 suivent l'informatique et étudient l'anglais, et 6 suivent la chimie et étudient l'allemand. Dresser le tableau de la répartition des étudiants selon leur langue et leur option, puis déterminer l'effectif du groupe.

EXERCICE 5 ⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le *diamètre* d'une partie non vide A de $[\![1\,,n]\!]$ est l'entier $\max A - \min A$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer le nombre de parties de $[\![1\,,n]\!]$ de diamètre k. On vérifiera que la somme de ces nombres vaut $2^n - 1$.

EXERCICE 6 ⋆

Un jeu de 32 cartes comporte quatre couleurs, cœur, carreau, trèfle et pique, et huit hauteurs, 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi et as. Une *main* est un ensemble de cinq cartes de ce jeu. Combien y a-t-il de mains

(a) formées de cinq cœurs ou de cinq trèfles ?

(b) formées de deux cœurs et de trois trèfles ?

(c) contenant au plus un as ?

(d) contenant exactement deux as et exactement trois cœurs ?

(e) contenant exactement un as et au moins trois carreaux ?

(f) contenant au plus un cœur et au moins deux rois ?

Pour les questions (d), (e) et (f), on prendra garde aux cartes qui satisfont à deux conditions à la fois.

EXERCICE 7 ⋆⋆

1. On reprend le jeu de 32 cartes de l'exercice 6. Combien de mains contiennent au moins deux cartes de même hauteur ? Combien contiennent au moins deux paires de hauteurs différentes, c'est-à-dire deux cartes d'une hauteur et deux cartes d'une autre hauteur, les fulls étant comptés ?

2. Un jeu de 52 cartes comporte les quatre mêmes couleurs et treize hauteurs, as, 2, 3, …, 10, valet, dame et roi. Une *quinte* est une main formée de cinq cartes de hauteurs consécutives, l'as pouvant compter avant le 2 ou après le roi : as-2-3-4-5 et 10-valet-dame-roi-as sont deux quintes. Une *quinte flush* est une quinte dont les cinq cartes ont la même couleur. Dénombrer les mains de cinq cartes de ce jeu qui sont

   (a) des quintes flush ;

   (b) des *carrés*, formés de quatre cartes de même hauteur ;

   (c) des *fulls*, formés de trois cartes d'une hauteur et de deux cartes d'une autre ;

   (d) des quintes qui ne sont pas des quintes flush ;

   (e) des *brelans*, formés de trois cartes d'une hauteur et de deux cartes de deux autres hauteurs différentes.

EXERCICE 8 ⋆⋆

Au bridge, les 52 cartes du jeu de l'exercice 7 sont distribuées entre quatre joueurs appelés Nord, Sud, Est et Ouest, qui en reçoivent treize chacun ; Nord et Sud sont partenaires, ainsi qu'Est et Ouest. Une *donne* est une telle distribution. On donnera les résultats à l'aide de factorielles et de coefficients binomiaux.

1. Combien y a-t-il de donnes ?
2. Combien y en a-t-il dans lesquelles chaque joueur n'a que des cartes d'une seule couleur ?
3. Combien y en a-t-il dans lesquelles exactement deux joueurs n'ont que des cartes d'une seule couleur ?
4. Combien y en a-t-il dans lesquelles deux partenaires, Nord et Sud ou bien Est et Ouest, n'ont chacun que des cartes d'une seule couleur, les deux autres joueurs ayant des cartes quelconques ?

EXERCICE 9 ⋆⋆

Un *mot* de longueur n est un élément de $\{a,b\}^n$, que l'on écrit sans parenthèses ni virgules : *aaaabba* est le 7-uplet (a,a,a,a,b,b,a). Un *facteur* d'un mot est un mot formé de lettres consécutives de celui-ci : tous les mots de longueur 2 sont des facteurs de *aaaabba*, mais *aba* n'en est pas un. On note $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci, définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Soit u_n le nombre de mots de longueur n dont *aa* n'est pas un facteur. Calculer u_1 et u_2, montrer que $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \geqslant 1$, et en déduire u_n en fonction des termes de la suite de Fibonacci.
2. Dénombrer les mots de longueur n dont *ab* n'est pas un facteur, puis ceux dont *aab* n'est pas un facteur.
3. En déduire le nombre de parties de $[\![1\,,n]\!]$ qui ne contiennent pas deux entiers consécutifs.
4. Un concours comporte 20 questions, et l'on code les résultats d'un candidat par une liste de 20 termes égaux à 1 pour une bonne réponse et à 0 sinon. Écrire une fonction Python qui calcule u_n. Parmi 17 712 candidats, aucun n'a donné de bonnes réponses à deux questions consécutives. Peut-on affirmer que deux candidats ont obtenu exactement les mêmes résultats ?

EXERCICE 10 ⋆⋆

Soit E un ensemble fini à n éléments. L'exercice 39 de la feuille du chapitre 1 a dénombré les couples (X,Y) de parties de E tels que $X \subset Y$, puis ceux tels que $X \cap Y = \varnothing$, puis ceux tels que $X \cup Y = E$.

1. Soit C une partie de E. Combien y a-t-il de couples (A,B) de parties de E tels que $A \cap B = C$?
2. Combien y a-t-il de triplets (X,Y,Z) de parties de E tels que $X \subset Y \subset Z$?
3. Combien y a-t-il de couples (X,Y) de parties de E tels que $X \cap Y$ soit un singleton ?

EXERCICE 11 ⋆⋆

Soit E un ensemble fini à n éléments. Calculer les sommes suivantes, où A, B, X, Y décrivent $\mathcal{P}(E)$.

$$\sum_{A} |A|, \qquad \sum_{(A,B)} |A \cap B|, \qquad \sum_{(A,B)} |A \cup B|, \qquad \sum_{\substack{(X,Y)\\ X\cap Y=\varnothing}} (|X| + |Y|).$$

On pourra compter de deux façons les couples (x,A) tels que $x \in A$, et procéder de même pour les autres sommes.

EXERCICE 12 ⋆⋆

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

1. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1\,,p]\!]$ dans $[\![1\,,n]\!]$.
2. À une application croissante $f : [\![1\,,p]\!] \to [\![1\,,n]\!]$, on associe l'application $\varphi(f)$ définie sur $[\![1\,,p]\!]$ par $\varphi(f)(k) = f(k) + k - 1$. Montrer que φ est une bijection de l'ensemble des applications croissantes de $[\![1\,,p]\!]$ dans $[\![1\,,n]\!]$ sur l'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1\,,p]\!]$ dans $[\![1\,,n+p-1]\!]$. En déduire le nombre d'applications croissantes de $[\![1\,,p]\!]$ dans $[\![1\,,n]\!]$, et le comparer au résultat de l'exercice 46 de la feuille du chapitre 3.

EXERCICE 13 ⋆⋆

Soit S un ensemble à $n \geqslant 1$ éléments et A_1, …, A_m des parties de S qui *séparent* les points de S : pour tous $x \neq y$ dans S, il existe $i \in [\![1\,,m]\!]$ tel que A_i contienne l'un des deux éléments x et y, mais pas l'autre. Montrer que $m \geqslant \dfrac{\ln n}{\ln 2}$. On pourra considérer l'application $x \mapsto (\mathbf{1}_{A_1}(x), \ldots, \mathbf{1}_{A_m}(x))$. Donner un exemple où l'égalité a lieu.

EXERCICE 14 ⋆⋆

Grilles de Fleissner. Une grille carrée de côté n est partagée en n^2 cases, dans certaines desquelles on découpe un trou. On dit que c'est une *grille de Fleissner* si, lorsqu'on la pose sur un carré de n^2 cases puis qu'on la fait tourner d'un quart de tour, d'un demi-tour et de trois quarts de tour autour de son centre, chaque case du carré apparaît à travers un trou dans exactement une des quatre positions. On s'en sert pour chiffrer un message, en écrivant ses lettres dans les trous successifs.

1. Combien une grille de Fleissner de côté 6 comporte-t-elle de trous ? Combien y a-t-il de telles grilles ?
2. Pour quelles valeurs de n existe-t-il une grille de Fleissner de côté n, et combien y en a-t-il ?

EXERCICE 15 ⋆⋆

Pour n, $p \in \mathbb{N}^*$, on note $S(n,p)$ le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à p éléments ; il ne dépend que de n et p, par la proposition 1 du cours.

1. Calculer $S(n,p)$ pour $p > n$, puis $S(n,n)$, $S(n,1)$ et $S(n,2)$.
2. Calculer $S(n+1,n)$.
3. Montrer que $S(n,p) = p(S(n-1,p) + S(n-1,p-1))$ pour tous $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 2$. On pourra distinguer les surjections de $[\![1\,,n]\!]$ sur $[\![1\,,p]\!]$ selon que leur restriction à $[\![1\,,n-1]\!]$ est surjective ou non.
4. En déduire un programme Python récursif qui calcule $S(n,p)$, et justifier qu'il se termine.
5. Retrouver, par récurrence sur n, la formule de la proposition 6 du cours, qui s'écrit ici

$$S(n,p) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$$

EXERCICE 16 ⋆⋆

Pour n, $k \in \mathbb{N}$, on note $T(n,k)$ le nombre de partitions de $[\![1\,,n]\!]$ en k parties non vides, avec les conventions $T(0,0)=1$ et $T(n,0)=T(0,k)=0$ pour n, $k \geqslant 1$. On note B_n le nombre de partitions de $[\![1\,,n]\!]$, avec $B_0=1$: c'est le n-ième *nombre de Bell*.

1. Que vaut $T(n,k)$ pour $k>n$? Calculer $T(n,1)$ et $T(n,n)$ pour $n \geqslant 1$.
2. Montrer que $T(n,k)=T(n-1,k-1)+kT(n-1,k)$ pour tous n, $k \geqslant 1$, en distinguant les partitions selon que $\{n\}$ en est une partie ou non. Écrire une fonction Python récursive qui calcule $T(n,k)$.
3. Montrer que le nombre $S(n,k)$ de surjections de l'exercice 15 vaut $k!\,T(n,k)$ pour n, $k \geqslant 1$.
4. Calculer B_1, B_2, B_3, puis montrer que $B_{n+1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en considérant la partie qui contient $n+1$. En déduire B_4 et B_5, et comparer avec l'exercice 28 de la feuille du chapitre 2.

EXERCICE 17 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 1$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On note $\omega(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ, points fixes compris, comme dans l'exercice 63 de la feuille du chapitre 17. Déterminer le nombre de parties A de $[\![1\,,n]\!]$ telles que $\sigma(A)=A$.

EXERCICE 18 ⋆⋆

Dérangements. Soit $n \in \mathbb{N}$. Un *dérangement* d'un ensemble E est une permutation de E sans point fixe ; on note D_n le nombre de dérangements d'un ensemble à n éléments, avec $D_0=1$. Le cours a obtenu $\frac{D_n}{n!}$ par la formule du crible ; on procède ici autrement.

1. Calculer D_1, D_2 et D_3.
2. Soit $k \in [\![0\,,n]\!]$. Déterminer le nombre de permutations de $[\![1\,,n]\!]$ qui ont exactement k points fixes.
3. En déduire que $n!=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k$, puis calculer D_4 et D_5.
4. Montrer par récurrence que $D_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pourra utiliser l'égalité $\binom{n}{k}\binom{k}{j}=\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$ et la valeur de $\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}$.
5. Lors d'un bal masqué, cinq couples se reforment au hasard : chacun des cinq hommes danse avec l'une des cinq femmes, toutes les associations étant également probables. Calculer la probabilité qu'aucun couple légitime ne soit reconstitué, puis qu'un seul le soit, puis qu'il y ait plus de couples illégitimes que de couples légitimes.

EXERCICE 19 ⋆⋆

Soit p un nombre premier. Combien le groupe $\mathfrak{S}_{2p}$ contient-il d'éléments d'ordre p ? On utilisera l'exercice 7 de la feuille du chapitre 17, qui exprime l'ordre d'une permutation à l'aide des longueurs de ses cycles, et l'on vérifiera le résultat pour $p=2$.

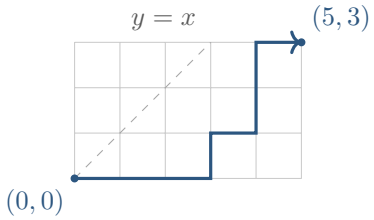
EXERCICE 20 ⋆⋆⋆

Théorème de Sperner. Soit $n \geqslant 1$. Une *antichaîne* est un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de $[\![1\,,n]\!]$ dont aucune n'est incluse dans une autre. Une *chaîne complète* est une suite $(C_0, C_1, \ldots, C_n)$ de parties de $[\![1\,,n]\!]$ telle que $C_0 \subsetneq C_1 \subsetneq \cdots \subsetneq C_n$.

1. Donner des exemples d'antichaînes, en précisant leur cardinal.
2. (a) Montrer que $|C_k| = k$ pour tout k, et dénombrer les chaînes complètes.
   (b) Soit X une partie de $[\![1\,,n]\!]$. Combien y a-t-il de chaînes complètes dont l'un des termes est X ?
3. En déduire que toute antichaîne $\mathcal{A}$ vérifie l'*inégalité de Lubell-Yamamoto-Meshalkin*
$$\sum_{A\in\mathcal{A}} |A|!\,(n-|A|)! \leqslant n!.$$
4. Déterminer le cardinal maximal d'une antichaîne. Ce résultat a été publié par E. Sperner en 1928.

EXERCICE 21 ⋆⋆⋆

Nombres de Catalan. Un *chemin N/E* est un chemin entre deux points de $\mathbb{Z}^2$ formé de pas $E = (1,0)$ et $N = (0,1)$; il est codé par le mot formé de ses pas. La figure représente le chemin $EEENENNE$, qui relie $(0,0)$ à $(5,3)$.



On y lit que ce chemin reste dans le secteur $S = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \geqslant y\}$, situé sous la diagonale en pointillés. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note C_n le nombre de chemins N/E reliant $(0,0)$ à (n,n) et restant dans S.

1. Dénombrer les chemins N/E reliant $(0,0)$ à (a,b), pour a, $b \in \mathbb{N}$.
2. Vérifier que $\dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \dfrac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des mots $w = (w_0, w_1, \ldots, w_{2n})$ formés de $n+1$ lettres E et de n lettres N. Pour $i \in [\![0\,,2n]\!]$, on note $\rho_i(w) = (w_i, w_{i+1}, \ldots, w_{i+2n})$ le mot obtenu par rotation, les indices étant lus modulo $2n+1$, et l'on dit que deux mots w et w' sont équivalents s'il existe i tel que $w' = \rho_i(w)$; on admet que c'est une relation d'équivalence.
   (a) Montrer que chaque classe d'équivalence possède exactement $2n+1$ éléments.
   (b) Montrer que chaque classe contient un unique mot w tel que, pour tout $k \in [\![0\,,2n]\!]$, le préfixe $(w_0, \ldots, w_k)$ contienne strictement plus de lettres E que de lettres N. On pourra considérer le chemin infini obtenu en répétant indéfiniment le mot w.
   (c) En déduire que $C_n = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

EXERCICE 22 ⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 1$. On note a_n le nombre de permutations de $[\![1\,,2n]\!]$ dont toutes les orbites ont au plus n éléments.

1. Soit $k \in [\![n+1\,,2n]\!]$. Montrer qu'une permutation de $[\![1\,,2n]\!]$ a au plus une orbite à k éléments, et dénombrer les permutations qui en ont une.
2. En déduire une expression de a_n, puis la limite de la suite $\left(\dfrac{a_n}{(2n)!}\right)_{n\geqslant 1}$, à l'aide du chapitre 20.
3. Interpréter ce résultat en termes de probabilité, pour une permutation choisie au hasard.

Espaces probabilisés finis

EXERCICE 23 ⋆

Soit A et B deux événements.

1. On suppose que $\mathrm{P}(A) = \frac{7}{10}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$ et $\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{9}{10}$. Calculer la probabilité que l'un exactement des deux événements soit réalisé.
2. Montrer que, dans le cas général,
$$\mathrm{P}(A \cup B) + \mathrm{P}(A \cup \overline{B}) + \mathrm{P}(\overline{A} \cup B) + \mathrm{P}(\overline{A} \cup \overline{B}) = 3.$$
3. On suppose que $\mathrm{P}(A) = p$ et $\mathrm{P}(B) = q$. Montrer que $\max(0, p+q-1) \leqslant \mathrm{P}(A \cap B) \leqslant \min(p, q)$, et que toute valeur de cet intervalle est la probabilité de $A \cap B$ pour un espace probabilisé et des événements A et B convenables.

EXERCICE 24 ⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer la probabilité sur $[\![1\,,n]\!]$ pour laquelle la probabilité de chaque singleton $\{k\}$ est proportionnelle à k.
2. Déterminer la probabilité sur $[\![1\,,n]\!]$ pour laquelle $\mathrm{P}([\![1\,,k]\!])$ est proportionnelle à k^2 pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$.
3. À quelles conditions sur les réels x et y existe-t-il une probabilité P sur $\{1,2,3\}$ telle que $\mathrm{P}(\{1,2\}) = x$ et $\mathrm{P}(\{2,3\}) = y$?

EXERCICE 25 ⋆

On lance trois fois de suite un dé équilibré à six faces. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins un six, puis exactement un six, puis au moins deux résultats égaux, puis au moins deux résultats égaux et une somme des résultats paire.

EXERCICE 26 ⋆

On tire quatre cartes d'un jeu de 52 cartes, qui comporte treize cartes de chacune des quatre couleurs. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux trèfles et deux piques, lorsque les quatre cartes sont tirées simultanément, puis successivement sans remise, puis successivement avec remise. Pourquoi les deux premiers résultats sont-ils égaux ?

EXERCICE 27 ⋆

Soit $n \geqslant 2$. Une urne contient trois boules rouges, deux boules noires et n boules blanches. On tire simultanément deux boules, tous les tirages étant également probables.

1. Calculer la probabilité P_n que les deux boules soient de la même couleur, puis la probabilité Q_n qu'elles soient de couleurs différentes.
2. Déterminer n pour que la probabilité de tirer deux boules blanches vaille $\frac{1}{6}$, et calculer alors P_n.

EXERCICE 28 ⋆⋆

On retire au hasard dix cartes d'un jeu de 52 cartes, sans les regarder, puis on tire simultanément cinq cartes parmi les 42 cartes restantes.

1. Calculer la probabilité que l'as de trèfle figure parmi les cinq cartes tirées. Pouvait-on prévoir le résultat ?
2. Montrer que la main des cinq cartes tirées suit la loi uniforme sur l'ensemble des parties à cinq éléments du jeu de 52 cartes. On pourra dénombrer, pour une main H fixée, les couples formés de dix cartes retirées et de cinq cartes tirées qui conduisent à H.
3. En déduire la probabilité que les cinq cartes tirées n'aient que deux hauteurs différentes, puis qu'elles aient cinq hauteurs différentes.

EXERCICE 29 ⋆⋆

On mélange un jeu de 52 cartes, comportant 26 cartes rouges et 26 cartes noires, dont quatre rois ; tous les ordres sont également probables.

1. Quelle est la probabilité que deux cartes de même couleur, deux rouges ou deux noires, se retrouvent côte à côte ?
2. Quelle est la probabilité que deux rois se retrouvent côte à côte ? On pourra dénombrer les ensembles de positions des quatre rois.

EXERCICE 30 ⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On joue $2n+1$ fois à pile ou face avec une pièce équilibrée.

1. Calculer la probabilité d'obtenir au total strictement plus de piles que de faces.
2. Soit $k \in [\![1\,, 2n+1]\!]$. Calculer la probabilité que le $(n+1)$-ième pile apparaisse au k-ième lancer.
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{2^k}\binom{k-1}{n} = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 31 ⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On organise un tirage au sort entre n équipes de première division et n équipes de deuxième division : les $2n$ équipes sont réparties en n matchs de deux équipes, toutes les répartitions étant également probables.

1. Dénombrer les répartitions des $2n$ équipes en n matchs.
2. Calculer la probabilité p_n que tous les matchs opposent une équipe de première division à une équipe de deuxième division.
3. Calculer la probabilité q_n que tous les matchs opposent deux équipes de la même division.
4. Montrer que $\dfrac{2^{2n-1}}{n} \leqslant \dbinom{2n}{n} \leqslant 2^{2n}$ pour tout $n \geqslant 1$, puis déterminer les limites de (p_n) et de (q_n).

EXERCICE 32 ⋆⋆

Soit A_1, …, A_n des événements, avec $n \geqslant 2$.

1. Montrer par récurrence que $\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \geqslant \mathrm{P}(A_1) + \cdots + \mathrm{P}(A_n) - (n-1)$.
2. *Inégalité de Bonferroni.*
   (a) Soit $\omega \in \Omega$. Montrer que
   $$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}(\omega) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbf{1}_{A_i \cap A_j}(\omega) \leqslant \mathbf{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n}(\omega).$$
   On pourra exprimer le premier membre à l'aide du nombre m d'indices i tels que $\omega \in A_i$.
   (b) En déduire que $\mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j)$.
3. *Inégalité de Kounias.* En imitant la méthode précédente, montrer que, pour tout $j \in [\![1\,,n]\!]$,
   $$\mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j).$$

EXERCICE 33 ⋆⋆⋆

Soit k et n deux entiers naturels non nuls. On range k objets dans n tiroirs, chaque objet étant placé dans un tiroir choisi au hasard, et toutes les répartitions étant également probables.

1. Quelle est la probabilité $q_{k,n}$ que les k objets se trouvent dans des tiroirs deux à deux distincts ?
2. Le cours a calculé la probabilité que deux personnes au moins, parmi k, aient la même date d'anniversaire. À l'aide d'un programme Python, déterminer le plus petit k pour lequel elle dépasse 0,5, puis 0,9.
3. Soit $t > 0$. Pour $n \geqslant 1$, on pose $k_n = \lfloor t\sqrt{n} \rfloor$, et l'on suppose $k_n \geqslant 1$.
   (a) Montrer que $-x - x^2 \leqslant \ln(1-x) \leqslant -x$ pour tout $x \in [0\,, \frac{1}{2}]$.
   (b) En déduire la limite de $q_{k_n,n}$ quand n tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat pour $n = 365$.

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = [\![1\,,n]\!]$. On choisit une application $f : E \to E$ au hasard, toutes les applications étant également probables, et l'on note p_n la probabilité que $f \circ f = f$.

1. Montrer que $f \circ f = f$ si et seulement si $f(y) = y$ pour tout $y \in f(E)$, comme dans l'exercice 18 de la feuille du chapitre 2.
2. En déduire que $p_n = \dfrac{1}{n^n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}$.
3. Montrer que p_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On pourra utiliser la majoration $\binom{n}{k} \leqslant \frac{n^k}{k!}$, et séparer les indices $k \leqslant \frac{n}{2}$ des autres.

Probabilités conditionnelles et indépendance

EXERCICE 35 ⋆

Les clients d'une compagnie d'assurance se répartissent en trois catégories : R_1, les bons risques, qui forment 20 % de la clientèle, R_2, les risques moyens, qui en forment 50 %, et R_3, les mauvais risques. La probabilité qu'un client ait un accident dans l'année vaut 0,05 dans la catégorie R_1, 0,15 dans la catégorie R_2 et 0,30 dans la catégorie R_3.

1. Quelle est la probabilité qu'un client choisi au hasard ait un accident dans l'année ?
2. Un client n'a pas eu d'accident cette année. Quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

EXERCICE 36 ⋆

Dans un questionnaire à choix multiples, chaque question propose $m \geqslant 2$ réponses, dont une seule est exacte. Un candidat connaît la réponse à une question avec la probabilité $p \in]0\,,1]$; s'il ne la connaît pas, il choisit une réponse au hasard. Sachant qu'il a donné la bonne réponse, quelle est la probabilité qu'il la connaisse vraiment ? Calculer cette probabilité pour $m = 4$ et $p = \frac{1}{2}$, et commenter son évolution lorsque m augmente.

EXERCICE 37 ⋆

On dispose de 100 dés, dont 25 sont pipés : pour un dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 vaut $\frac{1}{2}$, et les autres dés sont équilibrés.

1. On choisit un dé au hasard, on le lance, et l'on obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
2. On lance n fois le dé choisi, les lancers étant indépendants sachant le dé choisi, et l'on obtient n fois le 6. Calculer la probabilité p_n que le dé soit pipé, puis la limite de (p_n), et interpréter.

EXERCICE 38 ⋆

1. Montrer que deux événements A et B sont indépendants si et seulement si
$$\mathrm{P}(A \cap B)\,\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(A \cap \overline{B})\,\mathrm{P}(\overline{A} \cap B).$$
2. Soit $A \subset B$ deux événements indépendants. Montrer que $\mathrm{P}(A) = 0$ ou $\mathrm{P}(B) = 1$. Quels sont les événements indépendants d'eux-mêmes ?
3. Montrer qu'il n'existe pas d'événements A_1, …, A_n mutuellement indépendants, de même probabilité $p < 1$, dont la réunion soit Ω.

EXERCICE 39 ⋆

Un livre contient quatre erreurs. À chaque relecture, chacune des erreurs qui subsistent est corrigée avec la probabilité $\frac{1}{3}$. On modélise n relectures par des événements $C_{i,j}$, pour $i \in [\![1\,,4]\!]$ et $j \in [\![1\,,n]\!]$, mutuellement indépendants et de probabilité $\frac{1}{3}$, où $C_{i,j}$ signifie que la j-ième relecture corrigerait l'erreur i si elle subsistait encore.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la n-ième relecture ?
2. Quelle est la probabilité que le livre ne contienne plus aucune erreur à l'issue de la n-ième relecture ? Combien de relectures faut-il pour que cette probabilité dépasse 0,9 ?

EXERCICE 40 ⋆⋆

Soit A et B deux événements tels que $\mathrm{P}(A) > 0$. Montrer que

$$\mathrm{P}_{A\cup B}(A \cap B) \leqslant \mathrm{P}_A(A \cap B),$$

et interpréter cette inégalité : quelle est l'information la plus favorable à la réalisation simultanée de A et de B ?

EXERCICE 41 ⋆⋆

1. Soit A_1, …, A_n des événements mutuellement indépendants, de probabilités p_1, …, p_n. Exprimer $\mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ en fonction des p_i. Application : une personne effectue n expériences indépendantes, et chacune provoque un accident avec la probabilité p ; quelle est la probabilité qu'il se produise au moins un accident ?
2. Un circuit comporte trois composants C_1, C_2, C_3, qui fonctionnent avec les probabilités p_1, p_2, p_3, indépendamment les uns des autres. Calculer la probabilité que le circuit fonctionne lorsque les composants sont montés en série, puis en parallèle, puis lorsque C_1 est monté en série avec le bloc formé de C_2 et C_3 montés en parallèle.
3. Un avion A a quatre moteurs et un avion B en a deux. Chaque moteur tombe en panne avec la probabilité $p \in]0\,,1[$, indépendamment des autres, et un avion arrive à destination si strictement moins de la moitié de ses moteurs tombent en panne. Selon la valeur de p, quel avion choisir ?

EXERCICE 42 ⋆⋆

1. Un paquet contient quatre cartes : les rois de cœur et de carreau, et les dames de cœur et de carreau. On tire successivement, sans remise, deux cartes de ce paquet.
   (a) Proposer un espace probabilisé fini qui modélise cette expérience.
   (b) Sachant que l'une au moins des deux cartes tirées est une dame, quelle est la probabilité que les deux le soient ?
   (c) Sachant que l'une des deux cartes tirées est la dame de cœur, quelle est la probabilité que l'autre soit une dame ?
2. Une de vos connaissances a deux enfants, dont vous ignorez le sexe. Vous la croisez accompagnée de l'un de ses deux enfants, un garçon. Quelle est la probabilité que son autre enfant soit une fille ? On construira un espace probabilisé fini en explicitant les hypothèses de modélisation, et l'on comparera avec l'exemple du cours qui suit la proposition 8.

EXERCICE 43 ⋆⋆

On dispose d'un dé équilibré A, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de sept dés équilibrés D_1, …, D_7 : pour tout $i \in [\![1\,,7]\!]$, le dé D_i a $i-1$ faces blanches et $7-i$ faces noires. On lance le dé A. Si le résultat i vaut 2, 3, 4, 5 ou 6, on choisit le dé D_i ; s'il vaut 1, on relance le dé A, et l'on choisit le dé D_1 si le second résultat vaut 1, 2 ou 3, et le dé D_7 sinon. On lance ensuite plusieurs fois le dé choisi ; sachant ce dé, les lancers sont mutuellement indépendants. On note N_k l'événement « le k-ième lancer donne une face noire ».

1. Calculer $\mathrm{P}(N_1)$.
2. Calculer $\mathrm{P}(N_3 \mid N_1 \cap N_2)$.
3. Calculer $P_2 = \mathrm{P}_{N_1}(N_2)$ puis, pour $n \geqslant 3$, $P_n = \mathrm{P}(N_n \mid N_1 \cap \cdots \cap N_{n-1})$.
4. Déterminer la limite de (P_n) et interpréter le résultat.

EXERCICE 44 ⋆⋆

Deux joueurs A et B jouent au plus $2n$ parties, alternativement, A jouant la première. Lorsque c'est son tour, A gagne la partie avec la probabilité $a \in]0\,,1[$, et B gagne la sienne avec la probabilité $b \in]0\,,1[$, les parties étant indépendantes. Le premier qui gagne une partie remporte le jeu ; si aucune des $2n$ parties n'est gagnée, le jeu est nul.

1. Quelle est la probabilité que le jeu soit nul ?
2. Quelles sont les probabilités que A remporte le jeu, que B le remporte ?
3. À quelle condition le jeu est-il équitable, c'est-à-dire les deux joueurs ont-ils la même probabilité de gagner ? Interpréter cette condition.

EXERCICE 45 ⋆⋆

Le paradoxe de Simpson. On dit que deux événements A et B sont *positivement corrélés* si $\mathrm{P}(A \cap B) > \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$, et *négativement corrélés* si $\mathrm{P}(A \cap B) < \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$.

1. Soit C un événement tel que $\mathrm{P}(C) > 0$. Traduire, sans probabilité conditionnelle, le fait que A et B soient positivement corrélés pour la probabilité P_C ; on dit alors qu'ils sont positivement corrélés sachant C.
2. Construire un espace probabilisé fini et trois événements A, B, C, avec $0 < \mathrm{P}(C) < 1$, tels que A et B soient positivement corrélés, mais négativement corrélés sachant C et négativement corrélés sachant $\overline{C}$.
3. Imaginer une situation concrète où ce paradoxe peut induire en erreur.

EXERCICE 46 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$. On lance n fois une pièce équilibrée. On note A_0 l'événement « le nombre total de piles est pair » et, pour $k \in [\![1\,,n]\!]$, A_k l'événement « le k-ième lancer donne pile ». Montrer que les événements A_0, A_1, …, A_n ne sont pas mutuellement indépendants, mais que toute sous-famille de n d'entre eux est formée d'événements mutuellement indépendants. Comparer avec le second exemple du cours qui suit la proposition 10.

EXERCICE 47 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$ et $\Omega_n = [\![1\,,n]\!]$, muni de la probabilité uniforme. Un événement est dit *non trivial* si sa probabilité appartient à $]0\,,1[$.

1. On suppose n premier. Montrer que deux événements non triviaux ne sont jamais indépendants.
2. On suppose que n n'est pas premier. Construire deux événements non triviaux indépendants.

EXERCICE 48 ⋆⋆

Soit A_1, …, A_n des événements mutuellement indépendants, dont les probabilités appartiennent à $]0\,,1[$.

1. Pour tout k, on choisit B_k égal à A_k ou à $\overline{A_k}$. Montrer que $B_1 \cap \cdots \cap B_n \neq \varnothing$.
2. Montrer que deux choix différents de $(B_1, \ldots, B_n)$ conduisent à des intersections disjointes.
3. En déduire que $|\Omega| \geqslant 2^n$. Donner un exemple où l'égalité a lieu.

EXERCICE 49 ⋆⋆

Les singes dactylographes. On lance n fois un dé équilibré dont les dix faces sont numérotées de 0 à 9.

1. Montrer que la probabilité qu'un 6 apparaisse au moins une fois tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.
2. Montrer que la probabilité que deux 6 apparaissent au moins une fois lors de deux lancers consécutifs tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. On pourra considérer les lancers de rangs $2k-1$ et $2k$.
3. Expliquer le titre de l'exercice.

EXERCICE 50 ⋆⋆⋆

Un joueur dispose de deux machines à sous : la machine A fait gagner avec la probabilité $\frac{1}{5}$, la machine B avec la probabilité $\frac{1}{10}$. Il choisit la première machine au hasard, chacune avec la probabilité $\frac{1}{2}$; ensuite, s'il gagne une partie, il rejoue sur la même machine, et s'il perd, il change de machine. Pour $k \geqslant 1$, on note G_k l'événement « le joueur gagne la k-ième partie » et A_k l'événement « la k-ième partie a lieu sur la machine A » ; sachant la machine utilisée pour une partie, le résultat de celle-ci est indépendant des parties précédentes.

1. Écrire une fonction Python `jouer(n)` qui simule n parties et renvoie la proportion de parties gagnées.
2. Calculer $\mathrm{P}(G_1)$, puis $\mathrm{P}(G_2)$.
3. Sachant que le joueur a gagné la deuxième partie, quelle est la probabilité que la première ait eu lieu sur la machine A ?
4. Soit $k \geqslant 1$.
   (a) Exprimer $\mathrm{P}(G_k)$ en fonction de $\mathrm{P}(A_k)$.
   (b) Montrer que $\mathrm{P}(A_{k+1}) = -\frac{7}{10}\mathrm{P}(A_k) + \frac{9}{10}$.
   (c) En déduire $\mathrm{P}(A_k)$, puis $\mathrm{P}(G_k)$, en fonction de k.
5. On pose $S_n = \mathrm{P}(G_1) + \cdots + \mathrm{P}(G_n)$. Calculer S_n et la limite de $\frac{S_n}{n}$, et comparer avec les valeurs renvoyées par `jouer(n)` pour de grandes valeurs de n.

EXERCICE 51 ⋆⋆⋆

Un chat partage son temps entre trois activités, qu'il pratique par tranches de cinq minutes : manger (M), jouer (J) et dormir (D). Après une tranche de repas, il continue à manger avec la probabilité $\frac{1}{2}$, et se met à jouer sinon. Après une tranche de jeu, il mange avec la probabilité $\frac{1}{4}$, et va dormir sinon. Après une tranche de sommeil, il continue à dormir avec la probabilité $\frac{3}{4}$, et va manger sinon ; ces probabilités ne dépendent pas des tranches antérieures. Un matin, le chat passe les cinq premières minutes à manger. On note m_n, j_n et d_n les probabilités qu'il mange, qu'il joue et qu'il dorme dans la tranche $[5n\,,5n+5]$, exprimée en minutes, et $\mu_n = (m_n, j_n, d_n)$.

1. Déterminer une matrice $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mu_{n+1} = \mu_n T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en justifiant la relation par la formule des probabilités totales.
2. Calculer m_n, j_n et d_n en fonction de n. On pourra chercher une matrice inversible P telle que $P^{-1}TP$ soit diagonale.
3. Déterminer les limites de ces trois suites et interpréter le résultat.

EXERCICE 52 ⋆⋆⋆

Génotypes. Un gène existe sous deux formes, ou *allèles*, A et B ; chaque individu porte deux allèles, et l'on distingue trois *génotypes* : 1 pour AA, 2 pour AB et 3 pour BB. Seuls les individus de génotype 3 sont malades. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_1(n)$, $u_2(n)$ et $u_3(n)$ les proportions des trois génotypes à la génération n. On modélise la naissance d'un enfant de la génération $n+1$ ainsi : les génotypes P du père et M de la mère sont deux variables indépendantes de loi $\big(u_1(n), u_2(n), u_3(n)\big)$, et, sachant les génotypes des parents, l'enfant reçoit un allèle de chacun d'eux, choisi au hasard parmi les deux allèles de ce parent, les deux choix étant indépendants. On note E le génotype de l'enfant, et l'on admet que $u_i(n+1) = \mathrm{P}(E = i)$.

1. Calculer les probabilités $\mathrm{P}_{((P,M)=(i,j))}(E = 1)$ pour i, $j \in \{1, 2, 3\}$.
2. En déduire la loi de E en fonction des $u_i(n)$.
3. On pose $\theta(n) = u_1(n) + \frac{1}{2}u_2(n)$, proportion de l'allèle A à la génération n. Exprimer $u_1(n+1)$, $u_2(n+1)$ et $u_3(n+1)$ en fonction de $\theta(n)$.
4. Montrer que $\theta(n+1) = \theta(n)$, puis que les proportions des trois génotypes, et en particulier la proportion de malades, sont les mêmes à toutes les générations $n \geqslant 1$.

EXERCICE 53 ⋆⋆⋆

La loi de succession de Laplace. Soit $r \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ deux entiers. On dispose de $r+1$ urnes numérotées de 0 à r ; l'urne numéro k contient k boules rouges et $r-k$ boules blanches. On choisit une urne au hasard, puis on effectue $n+1$ tirages avec remise dans cette urne ; sachant l'urne choisie, les tirages sont mutuellement indépendants. On note R_j l'événement « la j-ième boule tirée est rouge ».

1. Calculer $\mathrm{P}_{R_1}(R_2)$ puis, pour $n \geqslant 2$, $p_{n,r} = \mathrm{P}(R_{n+1} \mid R_1 \cap \cdots \cap R_n)$.
2. Déterminer la limite de $p_{n,r}$ quand r tend vers $+\infty$, à l'aide du chapitre 18. Comparer avec $\mathrm{P}(R_1)$.

EXERCICE 54 ⋆⋆⋆

Un *tournoi* de taille $n \geqslant 2$ est formé de n équipes numérotées de 1 à n qui se rencontrent deux à deux, chaque match désignant un vainqueur. On considère un tournoi aléatoire, dans lequel l'issue de chacun des $\binom{n}{2}$ matchs est choisie au hasard, chaque équipe gagnant avec la probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment des autres matchs.

1. (a) Quelle est la probabilité qu'une équipe ait battu toutes les autres ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'on puisse classer les n équipes de sorte que chacune ait battu toutes celles qui sont classées après elle ?
   (c) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ et K un ensemble de k équipes. Quelle est la probabilité qu'une équipe n'appartenant pas à K ait battu toutes les équipes de K ?
2. Soit $k \geqslant 1$. Un tournoi est dit *k-indécis* si, pour tout ensemble de k équipes, il existe une autre équipe qui les a toutes battues. Montrer que la probabilité qu'un tournoi aléatoire de taille n soit k-indécis tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Ce résultat est dû à P. Erdős (1963).
3. En déduire que, pour tout $k \geqslant 1$, il existe des tournois k-indécis. Déterminer à l'aide d'un programme Python une taille n pour laquelle la majoration obtenue à la question précédente garantit l'existence d'un tournoi 2-indécis à n équipes.

EXERCICE 55 ⋆

1. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes, de lois $\mathcal{B}(p_1)$ et $\mathcal{B}(p_2)$. Montrer que X_1^2, $1-X_1$ et X_1X_2 suivent des lois de Bernoulli, dont on précisera les paramètres.
2. Soit p, $q \in [0\,,1]$. Déterminer toutes les lois conjointes possibles d'un couple (X,Y) tel que $X \sim \mathcal{B}(p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(q)$. On les paramétrera par $t = \mathrm{P}(X=1, Y=1)$, dont on précisera l'ensemble des valeurs possibles à l'aide de l'exercice 23. Pour quelle valeur de t les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

EXERCICE 56 ⋆⋆

1. On lance deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité d'obtenir deux résultats égaux ?
2. On lance deux dés pipés de la même façon : chacun donne la face i avec la probabilité p_i, pour $i \in [\![1\,,6]\!]$, et les deux lancers sont indépendants. Montrer que la probabilité d'obtenir deux résultats égaux est au moins égale à celle de la question précédente, et étudier le cas d'égalité.

EXERCICE 57 ⋆⋆

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que X et $-X$ aient la même loi.

1. Montrer qu'il existe un espace probabilisé fini (Ω', P') et deux variables aléatoires $Y : \Omega' \to \mathbb{R}_+$ et $\varepsilon : \Omega' \to \{-1, 1\}$, indépendantes, telles que X et εY aient la même loi.
2. Peut-on toujours choisir $(\Omega', \mathrm{P}') = (\Omega, \mathrm{P})$? On pourra examiner le cas où Ω a trois issues équiprobables.

EXERCICE 58 ⋆⋆

Une urne contient b boules blanches et $r \geqslant 1$ boules rouges. On tire successivement toutes les boules, sans remise, tous les ordres de sortie étant également probables, et l'on note N le numéro du tirage au cours duquel la première boule rouge sort. Déterminer la loi de N. Quelle identité entre coefficients binomiaux obtient-on en écrivant que la somme des probabilités vaut 1 ?

EXERCICE 59 ⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0\,,1[$ et $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Quelles sont les valeurs les plus probables de X ? On étudiera le quotient $\frac{\mathrm{P}(X=k+1)}{\mathrm{P}(X=k)}$, et l'on comparera avec l'exercice 28 de la feuille du chapitre 3.

EXERCICE 60 ⋆⋆

Soit $p \in]0\,,1[$ et $k \in \mathbb{N}$. Pour $n \geqslant 1$, on considère une variable aléatoire X_n de loi $\mathcal{B}(n,p)$. Montrer que la suite $\big(\mathrm{P}(X_n \geqslant k)\big)_{n \geqslant 1}$ est croissante. On pourra réaliser simultanément X_n et X_{n+1} à l'aide de variables de Bernoulli indépendantes, grâce à la proposition 17 et au théorème 8 du cours.

EXERCICE 61 ⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \geqslant 2$. On choisit des parties X_1, …, X_r de $[\![1\,,n]\!]$ indépendantes et de loi uniforme sur $\mathcal{P}([\![1\,,n]\!])$.

1. Calculer $\mathrm{P}(X_1 \subset X_2)$, $\mathrm{P}(X_1 \cap X_2 = \varnothing)$ et $\mathrm{P}\big(|X_1 \cap X_2| = 1\big)$, en utilisant l'exercice 10 et l'exercice 39 de la feuille du chapitre 1.
2. Déterminer la loi de $|X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_r|$.
3. On choisit maintenant le couple (A,B) selon la loi uniforme sur l'ensemble des couples de parties *distinctes* de $[\![1\,,n]\!]$, ce qui revient à un tirage sans remise. Calculer $\mathrm{P}(A \subset B)$ et comparer avec la question 1.

EXERCICE 62 ⋆⋆

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![1\,,n]\!]$. On note $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de coefficients $m_{i,j} = \mathrm{P}(X = i, Y = j)$. Montrer que M est de rang 1 si et seulement si X et Y sont indépendantes. On utilisera la caractérisation des matrices de rang 1 établie dans l'exercice 43 de la feuille du chapitre 16 : une matrice est de rang 1 si et seulement si elle s'écrit UV^T, où U et V sont deux colonnes non nulles.

EXERCICE 63 ⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit quatre entiers a, b, c, d dans $[\![-n\,,n]\!]$, indépendamment et selon la loi uniforme, et l'on note $p(n)$ la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit inversible. Montrer que $1 - p(n) \leqslant \frac{2}{2n+1}$, et en déduire la limite de $p(n)$. On pourra distinguer selon que a est nul ou non.

EXERCICE 64 ⋆⋆

1. Soit a, b, c, d et λ cinq réels strictement positifs. Montrer qu'on ne peut pas avoir simultanément $ab = \lambda$, $cd = \lambda$ et $ac + bd \leqslant \lambda$.
2. Soit $n \geqslant 1$. Existe-t-il deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $[\![0\,,n]\!]$, dont la somme suive la loi uniforme sur $[\![0\,,2n]\!]$? On pourra examiner les probabilités que la somme vaille 0, n et $2n$.
3. En déduire qu'on ne peut pas piper deux dés à six faces de sorte que la somme des deux résultats suive la loi uniforme sur $[\![2\,,12]\!]$.

EXERCICE 65 ⋆⋆

L'urne de Pólya. Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On répète l'expérience suivante : on tire une boule au hasard dans l'urne, puis on la remet en ajoutant une boule de la même couleur. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note N_k le nombre de boules blanches dans l'urne après k tirages. Montrer par récurrence, à l'aide de la formule des probabilités totales, que N_k suit la loi uniforme sur $[\![1\,,k+1]\!]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 66 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$ et Σ une variable aléatoire de loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$.

1. (a) Calculer $\mathrm{P}\big(\Sigma(1) < \Sigma(2)\big)$.
   (b) Donner les lois de $\Sigma(1)$ et de $\Sigma(2)$, ainsi que leur loi conjointe. Ces variables sont-elles indépendantes ?
   (c) Calculer la probabilité que $\Sigma(1)$ et $\Sigma(2)$ soient des entiers consécutifs.
2. On s'intéresse aux orbites de Σ, au sens du chapitre 17.
   (a) Soit C une partie non vide de $[\![1\,,n]\!]$, à k éléments. Calculer la probabilité que C soit une orbite de Σ.
   (b) Calculer la probabilité que 1 et 2 appartiennent à la même orbite de Σ.
   (c) Déterminer la loi du nombre d'éléments de l'orbite de Σ qui contient 1.

EXERCICE 67 ⋆⋆⋆

Soit $p \in]0\,,1[$ et X_1, …, X_n des variables mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1,1\}$, telles que $\mathrm{P}(X_k = 1) = p$ pour tout k. Pour $k \in [\![1\,,n]\!]$, on pose $\Pi_k = X_1 X_2 \cdots X_k$, $u_k = \mathrm{P}(\Pi_k = 1)$ et $v_k = \mathrm{P}(\Pi_k = -1)$.

1. Montrer que $u_{k+1} = p\,u_k + (1-p)\,v_k$ et $v_{k+1} = (1-p)\,u_k + p\,v_k$ pour tout $k \in [\![1\,,n-1]\!]$.
2. Expliciter u_k et v_k en fonction de k. Que se passe-t-il lorsque k devient grand ?
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur p pour que les variables Π_1 et Π_2 soient indépendantes.
4. On suppose cette condition remplie. Montrer que les variables Π_1, …, Π_n sont mutuellement indépendantes.

EXERCICE 68 ⋆⋆⋆

Les boîtes d'allumettes de Banach. Un fumeur porte dans chacune de ses deux poches une boîte contenant initialement n allumettes. Chaque fois qu'il veut une allumette, il choisit une poche au hasard, chacune avec la probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment des choix précédents, et prend une allumette dans la boîte correspondante. Il constate qu'une boîte est vide au moment où il cherche à y prendre une allumette, et non au moment où il prend la dernière. On note X le nombre d'allumettes qui restent alors dans l'autre boîte.

1. Justifier que la constatation a lieu au plus tard lors du $(2n+1)$-ième choix de poche, et proposer un espace probabilisé fini qui modélise l'expérience.
2. Soit $k \in [\![0\,,n]\!]$. Montrer que $\mathrm{P}(X = k) = \binom{2n-k}{n} \dfrac{1}{2^{2n-k}}$.
3. On suppose $n = 6$. Calculer le nombre moyen d'allumettes restantes, c'est-à-dire la somme des produits $k\,\mathrm{P}(X = k)$ pour k allant de 0 à n ; la section suivante l'appellera l'espérance de X.

EXERCICE 69 ⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$. Un sous-groupe H de $\mathfrak{S}_n$ est dit *transitif* si, pour tous x, $y \in [\![1\,,n]\!]$, il existe $\sigma \in H$ telle que $\sigma(x) = y$.

1. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. À quelle condition le sous-groupe engendré par σ est-il transitif ?
2. Soit X_n une variable aléatoire de loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$. Calculer la probabilité p_n que le sous-groupe engendré par X_n soit transitif.
3. Soit X_n et Y_n deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$, et q_n la probabilité que le sous-groupe engendré par X_n et Y_n soit transitif.
   (a) Montrer que ce sous-groupe n'est pas transitif si et seulement s'il existe une partie A de $[\![1\,,n]\!]$, avec $1 \leqslant |A| \leqslant \frac{n}{2}$, telle que $X_n(A) = A$ et $Y_n(A) = A$.
   (b) Pour une partie A à k éléments, calculer $\mathrm{P}\big(X_n(A) = A\big)$.
   (c) En déduire que $1 - q_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k}^{-1}$, puis que q_n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Espérance

EXERCICE 70 ⋆

1. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}(\llbracket 1\,,n\rrbracket)$. Calculer $\mathrm{E}((X-1)^2)$ et $\mathrm{E}(\mathrm{e}^X)$.
2. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n,p)$, avec $p\in\,]0\,,1]$. Calculer l'espérance de $Y=\dfrac{1}{X+1}$. On pourra utiliser l'égalité $\dfrac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\dfrac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$. A-t-on $\mathrm{E}(Y)=\dfrac{1}{\mathrm{E}(X)+1}$?

EXERCICE 71 ⋆

On considère un dé pipé à six faces, tel que la probabilité d'obtenir la face numérotée k soit proportionnelle à k. On note X le résultat d'un lancer.

1. Déterminer la loi de X et son espérance. Comparer avec un dé équilibré.
2. On pose $Y=\frac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y et son espérance. Comparer $\mathrm{E}(Y)$ et $\frac{1}{\mathrm{E}(X)}$.

EXERCICE 72 ⋆⋆

Soit $p\in\,]0\,,1[$, $n\in\mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(2n,p)$. On pose $Y=\lfloor\frac{X}{2}\rfloor$.

1. Calculer $\mathrm{E}((-1)^X)$.
2. Exprimer Y à l'aide de X et de $(-1)^X$, puis en déduire $\mathrm{E}(Y)$ par linéarité.

EXERCICE 73 ⋆⋆

Soit $n\geqslant 2$ et $r\in\llbracket 2\,,2n\rrbracket$. Sur l'arche d'Utnapishtim se trouvent $2n$ animaux, deux pour chacune des n espèces représentées. Pour visiter une île, il choisit r animaux parmi les $2n$, tous les choix étant également probables. On note N le nombre d'espèces dont les deux représentants font partie des animaux choisis. Calculer $\mathrm{E}(N)$, sans déterminer la loi de N.

EXERCICE 74 ⋆⋆

Soit $p\in[0\,,1]$, $n\in\mathbb{N}^*$, X_1, …, X_n des variables de loi $\mathcal{B}(p)$ et N une variable à valeurs dans $\llbracket 1\,,n\rrbracket$, les variables X_1, …, X_n, N étant mutuellement indépendantes. On pose $S=\sum_{i=1}^{N}X_i$, c'est-à-dire $S(\omega)=\sum_{i=1}^{N(\omega)}X_i(\omega)$ pour toute issue ω. Calculer $\mathrm{E}(S)$ en fonction de p et de $\mathrm{E}(N)$. On pourra écrire $S=\sum_{i=1}^{n}X_i\,\mathbf{1}_{(N\geqslant i)}$.

EXERCICE 75 ⋆⋆

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 1\,,n\rrbracket$. Montrer que la loi de X est déterminée par les nombres $\mathrm{E}(X^k)$, pour $k\in\llbracket 0\,,n-1\rrbracket$. On pourra utiliser le déterminant de Vandermonde du chapitre 17.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles telles que $\mathrm{E}(X^k)=\mathrm{E}(Y^k)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Montrer que X et Y ont la même loi. On pourra utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange du chapitre 13.

EXERCICE 76 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$ et Σ une variable aléatoire de loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$, comme dans l'exercice 66.

1. Une *inversion* d'une permutation σ est un couple (i,j) tel que $i<j$ et $\sigma(i)>\sigma(j)$. Calculer l'espérance du nombre d'inversions de Σ, à l'aide de l'exercice 66.
2. La *première montée* d'une permutation σ est le plus grand intervalle d'entiers de la forme $[\![1\,,k]\!]$ sur lequel σ est croissante ; on note L la longueur k de la première montée de Σ. Calculer $\mathrm{P}(L \geqslant k)$ pour $k \in [\![1\,,n]\!]$, puis la loi de L.
3. Montrer que $\mathrm{E}(L) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(L \geqslant k)$, puis calculer $\mathrm{E}(L)$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 77 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$ et $p \in]0\,,1[$, et $q = 1-p$. On lance n fois une pièce qui donne pile avec la probabilité p, les lancers étant indépendants. Pour $k \in [\![1\,,n]\!]$, on appelle *k-chaîne de piles* une suite de k lancers consécutifs ayant tous donné pile, précédée d'un face ou placée au début, et suivie d'un face ou placée à la fin. On note Y_k le nombre de k-chaînes de piles obtenues ; par exemple, pour $n=11$ et la suite de résultats $PPFFPPPFPFP$, on a $Y_1=2$, $Y_2=1$ et $Y_3=1$.

1. Déterminer la loi de Y_n et son espérance.
2. Montrer que $\mathrm{P}(Y_{n-1}=1) = 2qp^{n-1}$, et en déduire $\mathrm{E}(Y_{n-1})$.
3. Soit $k \in [\![1\,,n-2]\!]$. Pour $i \in [\![1\,,n-k+1]\!]$, on note $X_{i,k}$ la variable qui vaut 1 si une k-chaîne de piles commence au i-ième lancer, et 0 sinon.
   (a) Calculer $\mathrm{P}(X_{1,k}=1)$ et $\mathrm{P}(X_{n-k+1,k}=1)$, puis montrer que $\mathrm{P}(X_{i,k}=1) = q^2p^k$ pour $i \in [\![2\,,n-k]\!]$.
   (b) Exprimer Y_k à l'aide des variables $X_{i,k}$, puis calculer $\mathrm{E}(Y_k)$.

EXERCICE 78 ⋆⋆

Dans un troupeau, chaque vache est atteinte d'une maladie avec la probabilité $p = 0{,}15$, indépendamment des autres. Pour dépister la maladie chez $n \geqslant 2$ vaches, on dispose de deux méthodes. Dans la première, on analyse le lait de chaque vache, ce qui demande n analyses. Dans la seconde, on analyse le mélange des laits des n vaches : si le résultat est négatif, aucune vache n'est malade et l'on s'arrête ; sinon, on analyse le lait de chaque vache. On note X_n le nombre d'analyses effectuées avec la seconde méthode, et $Y_n = \frac{X_n}{n}$ le nombre moyen d'analyses par vache.

1. Déterminer la loi de Y_n, et montrer que $\mathrm{E}(Y_n) = 1 + \frac{1}{n} - (0{,}85)^n$.
2. On pose $a = \ln(0{,}85)$ et $f(x) = ax + \ln x$ pour $x>0$. Étudier les variations de f, et déterminer les entiers $n \geqslant 2$ tels que $f(n)>0$.
3. Montrer que $f(n)>0$ si et seulement si $\mathrm{E}(Y_n)<1$. Pour quels effectifs la seconde méthode est-elle avantageuse en moyenne ? Quel effectif minimise le nombre moyen d'analyses par vache ?

EXERCICE 79 ⋆⋆

Entropie. Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs distinctes x_1, …, x_n avec les probabilités p_1, …, p_n. Son *entropie* est le réel $H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$, avec la convention $0\ln 0 = 0$. Lorsque tous les p_i sont non nuls, c'est l'espérance de la variable $-\ln f(X)$, où f est définie par $f(x_i) = p_i$.

1. Montrer que $H(X) \geqslant 0$, avec égalité si et seulement s'il existe i tel que $p_i = 1$.
2. Montrer que $-x\ln x \leqslant 1-x$ pour tout $x \geqslant 0$, avec la même convention, et avec égalité si et seulement si $x=1$. En déduire que $-np_k \ln(np_k) \leqslant 1 - np_k$ pour tout k.
3. En déduire que $H(X) \leqslant \ln n$, avec égalité si et seulement si X suit la loi uniforme sur l'ensemble de ses valeurs.

EXERCICE 80 ⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$ et $r \geqslant 1$ deux entiers. On place r boules numérotées de 1 à r dans n tiroirs numérotés de 1 à n, chaque boule étant placée dans un tiroir choisi au hasard, toutes les répartitions étant également probables. Pour $k \in [\![1\,,n]\!]$, on note X_k le nombre de boules placées dans le tiroir k, et l'on note V le nombre de tiroirs restés vides.

1. Déterminer la loi de X_k et son espérance.
2. Les variables X_1, …, X_n sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathrm{E}(V)$ par la méthode des indicatrices. Lorsque $r = n$, déterminer la limite de la proportion moyenne $\frac{\mathrm{E}(V)}{n}$ de tiroirs vides quand n tend vers $+\infty$.
4. Déterminer la loi de V à l'aide de l'exercice 15.

Variance et covariance

EXERCICE 81 ⋆

Soit X et Y deux variables indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$, avec $p \in]0\,,1[$. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Déterminer la loi du couple (U, V), la covariance de U et V, et dire si U et V sont indépendantes.

EXERCICE 82 ⋆

Soit X une variable aléatoire réelle et a, b deux réels tels que X et $aX + b$ aient la même loi.

1. On suppose $a \notin \{-1, 1\}$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $\mathrm{P}(X = c) = 1$.
2. Montrer que le cas $a = 1$ et $b \neq 0$ est impossible.
3. Dans le cas $a = -1$, donner un exemple où X n'est pas constante.

EXERCICE 83 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$, et X, Y deux variables indépendantes de loi $\mathcal{U}([\![1\,,n]\!])$. On pose $N = \min(X, Y)$ et $M = \max(X, Y)$.

1. Calculer $\mathrm{P}(M \leqslant k)$ pour $k \in [\![0\,,n]\!]$, puis en déduire la loi de M et son espérance.
2. Calculer $\mathrm{E}(N)$ par linéarité de l'espérance.
3. Montrer que $\mathrm{E}(N) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(N \geqslant k)$, et retrouver ainsi la valeur de $\mathrm{E}(N)$.
4. Calculer $\mathrm{V}(M)$.

EXERCICE 84 ⋆⋆

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles, avec $\mathrm{V}(X) > 0$. Déterminer les réels a et b qui minimisent la quantité $\mathrm{E}\Big(\big(Y - (aX + b)\big)^2\Big)$, et comparer avec la droite des moindres carrés évoquée dans le cours après le théorème 12.

EXERCICE 85 ⋆⋆

Soit A et B deux événements. Montrer que $\left|\mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)\right| \leqslant \frac{1}{4}$, et caractériser les cas d'égalité. On pourra appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz du cours aux indicatrices de A et de B.

EXERCICE 86 ⋆⋆

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$, et $Z = X - Y$.

1. Calculer l'espérance et la variance de Z.
2. Déterminer la loi de Z. On pourra remarquer que $n - Y$ suit la même loi que Y.
3. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Z)$. Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?

EXERCICE 87 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$, $q \in]0\,,1[$ et $p = 1 - q$. On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires, à valeurs dans $[\![0\,,n]\!] \times [\![1\,,n]\!]$, de loi conjointe donnée, pour $j \in [\![0\,,n]\!]$ et $k \in [\![1\,,n]\!]$, par

$$\mathrm{P}(X = j, Y = k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } k = j \text{ et } j \neq 0, \\ \dfrac{q^n}{n} & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi conjointe, puis déterminer les lois marginales et les espérances de X et de Y.
2. Soit $j \in [\![0\,,n]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = j)$, c'est-à-dire les probabilités $\mathrm{P}_{(X=j)}(Y = k)$, ainsi que la moyenne de cette loi.
3. (a) Montrer que $\mathrm{P}(X = 1, Y = 1) \neq \mathrm{P}(X = 1)\,\mathrm{P}(Y = 1)$.
   (b) Calculer la covariance de X et Y, et montrer qu'elle s'annule pour une unique valeur de $q \in]0\,,1[$.
   (c) Qu'en déduire ?

EXERCICE 88 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$ et E une partie aléatoire de $[\![1\,,n]\!]$, de loi uniforme sur $\mathcal{P}([\![1\,,n]\!])$. Pour $i \in [\![1\,,n]\!]$, on note A_i l'événement $(i \in E)$.

1. Déterminer la loi des indicatrices $\mathbf{1}_{A_i}$, et montrer qu'elles sont mutuellement indépendantes.
2. Exprimer $N = |E|$ à l'aide de ces indicatrices, et en déduire sa loi, son espérance et sa variance.
3. On pose $T = \sum_{i \in E} i$, avec $T = 0$ si E est vide. Exprimer T à l'aide des indicatrices, puis calculer son espérance et sa variance.

EXERCICE 89 ⋆⋆

La loi hypergéométrique. Une urne contient n boules, dont p sont blanches, avec $1 \leqslant p \leqslant n - 1$. On tire simultanément $s \in [\![1\,,n]\!]$ boules, et l'on note X le nombre de boules blanches tirées.

1. Déterminer la loi de X.
2. On numérote les boules blanches de 1 à p et l'on note A_k l'événement « la boule blanche numéro k est tirée ». Exprimer X à l'aide des indicatrices $\mathbf{1}_{A_k}$, et en déduire $\mathrm{E}(X)$ puis $\mathrm{V}(X)$.
3. Comparer avec l'espérance et la variance de la loi $\mathcal{B}(s, \frac{p}{n})$, et interpréter lorsque n et p sont grands, avec $\frac{p}{n}$ fixé.

EXERCICE 90 ⋆⋆

Soit $1 \leqslant r \leqslant n$ deux entiers. On choisit une partie Y de $[\![1\,,n]\!]$ à r éléments, toutes les parties à r éléments étant également probables, et l'on pose $X = \max Y$. On peut aussi voir X comme la plus grande valeur obtenue en découvrant les r premières cartes d'un paquet de n cartes numérotées de 1 à n, mélangé au hasard.

1. Déterminer la loi de X. Quelle identité entre coefficients binomiaux obtient-on ? La comparer à la formule de l'exercice 35 de la feuille du chapitre 3.
2. Calculer $\mathrm{E}(X)$. On pourra utiliser l'égalité $k\binom{k-1}{r-1} = r\binom{k}{r}$.
3. Calculer $\mathrm{V}(X)$.

EXERCICE 91 ⋆⋆

On tire successivement et sans remise les boules d'une urne qui contient n boules rouges et n boules noires, tous les ordres de sortie étant également probables, jusqu'à ce que toutes les boules rouges soient sorties. On note X le nombre de boules noires qui restent alors dans l'urne.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance de X. On pourra introduire, pour chaque boule noire, l'événement « elle sort après toutes les boules rouges ».
3. Calculer la variance de X.

EXERCICE 92 ⋆⋆⋆

On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Soit $N \geqslant 2$. Une urne contient $N-2$ boules blanches et 2 boules noires. On tire successivement et sans remise les N boules de l'urne. On note X_1 le numéro du tirage qui donne la première boule noire, et X_2 le numéro de celui qui donne la seconde.

1. Proposer un espace probabilisé fini qui modélise cette expérience.
2. Montrer que, pour i, $j \in [\![1\,,N]\!]$, on a $\mathrm{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \dfrac{2}{N(N-1)}$ si $i < j$, et 0 sinon. En déduire les lois de X_1 et de X_2. Ces variables sont-elles indépendantes ?
3. (a) Montrer que $N + 1 - X_2$ a la même loi que X_1.
   (b) Déterminer la loi de $X_2 - X_1$ et la comparer à celle de X_1.
   (c) Calculer $\mathrm{E}(X_1)$ et $\mathrm{E}(X_2)$.
   (d) Montrer que $\mathrm{V}(X_1) = \mathrm{V}(X_2)$, puis que $2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathrm{V}(X_1)$.
4. Calculer $\mathrm{V}(X_1)$, puis $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.
5. Soit X et Y deux variables indépendantes de loi uniforme sur $[\![1\,,N]\!]$. On note D l'événement $(X \neq Y)$, et $Z_1 = \min(X, Y)$, $Z_2 = \max(X, Y)$. Calculer $\mathrm{P}(D)$, puis $\mathrm{P}_D(Z_1 = i, Z_2 = j)$ pour i, $j \in [\![1\,,N]\!]$, et comparer avec la question 2.

EXERCICE 93 ⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 1$ et $(X_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On considère la matrice aléatoire $M = (X_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, c'est-à-dire la variable aléatoire qui à ω associe la matrice $(X_{i,j}(\omega))$.

1. Déterminer la loi de la trace $\mathrm{tr}(M)$, puis calculer son espérance et sa variance.
2. Calculer la probabilité que M soit de rang 1.
3. Déterminer l'espérance et la variance de $\det(M)$. On utilisera l'expression du déterminant comme somme sur $\mathfrak{S}_n$ du chapitre 17.

EXERCICE 94 ⋆⋆⋆

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles et $C = \big(\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ leur *matrice de covariance*.

1. Montrer que, pour toute colonne $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ de $\mathbb{R}^n$, on a $\Lambda^T C \Lambda = \mathrm{V}(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n)$.
2. Montrer que C est inversible si et seulement s'il n'existe pas de réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls et de réel c tels que $\mathrm{P}(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n = c) = 1$. Comparer avec les matrices de Gram du chapitre 19.

Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres

EXERCICE 95 ⋆

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire X_n de loi $\mathcal{B}(4n, \frac{1}{2})$.

1. Calculer la variance de X_n.
2. Montrer que $\mathrm{P}\big(|X_n - 2n| \geqslant n\big)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
3. En déduire que $\mathrm{P}\big(|X_n - 2n| \leqslant n\big)$ tend vers 1, puis que $x_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{3n} \binom{4n}{k}$ est équivalent à 16^n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 96 ⋆⋆

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit un vecteur X_n de $\{0,1\}^n \subset \mathbb{R}^n$ selon la loi uniforme, et l'on note $\|X_n\|$ sa norme euclidienne. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathrm{P}\Big(\Big|\frac{\|X_n\|}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Interpréter géométriquement : où se trouvent, pour la plupart, les sommets du cube $[0\,,1]^n$?

EXERCICE 97 ⋆⋆

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, de même loi, et m leur espérance commune. On pose $Y_i = X_i - m$, $\sigma^2 = \mathrm{E}(Y_1^2)$, $\mu_4 = \mathrm{E}(Y_1^4)$, et $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathrm{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n}\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \dfrac{\mathrm{E}(S_n^4)}{\varepsilon^4 n^4}$.
2. En développant S_n^4, montrer que $\mathrm{E}(S_n^4) = n\mu_4 + 3n(n-1)\sigma^4$. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{E}(S_n^4)}{n^4}$ converge, la loi commune des X_i étant fixée.
3. Comparer, pour n grand, la majoration de la question 1 avec celle de la loi faible des grands nombres du cours.

EXERCICE 98 ⋆⋆

Surréservation. Un avion compte 150 places. Chaque personne qui a acheté un billet se présente à l'embarquement avec la probabilité $p = 0{,}75$, indépendamment des autres. La compagnie vend n billets, avec $150 < n$ et $np < 150$, et note S_n le nombre de personnes qui se présentent.

1. Quelle est la loi de S_n ?
2. Montrer que $\mathrm{P}(S_n \geqslant 150) \leqslant \dfrac{np(1-p)}{(150-np)^2}$, en remarquant que l'événement $(S_n \geqslant 150)$ est inclus dans $(|S_n - np| \geqslant 150 - np)$.
3. Résoudre sur $]0\,,150[$ l'inéquation $\dfrac{x(1-p)}{(150-x)^2} \leqslant 0{,}05$.

4. Combien de billets la compagnie peut-elle vendre en étant sûre, par cette majoration, que la probabilité que plus de 150 personnes se présentent soit au plus 0,05 ? Calculer, à l'aide d'un programme Python, la probabilité exacte correspondante, et commenter.

EXERCICE 99 ⋆⋆

L'inégalité de Cantelli. Soit X une variable aléatoire réelle et $a > 0$.

1. Montrer que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $\mathrm{P}\big(X - \mathrm{E}(X) \geqslant a\big) \leqslant \dfrac{t^2 + \mathrm{V}(X)}{(a+t)^2}$. On pourra appliquer l'inégalité de Markov à la variable $\big(X - \mathrm{E}(X) + t\big)^2$.
2. En choisissant bien t, en déduire que $\mathrm{P}\big(X - \mathrm{E}(X) \geqslant a\big) \leqslant \dfrac{\mathrm{V}(X)}{\mathrm{V}(X) + a^2}$.
3. En déduire que $\mathrm{P}\big(|X - \mathrm{E}(X)| \geqslant a\big) \leqslant \dfrac{2\mathrm{V}(X)}{\mathrm{V}(X) + a^2}$, et comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev selon les valeurs de a.

EXERCICE 100 ⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$ et Σ une variable aléatoire de loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$. Comme dans le cours, on dit que $i \in [\![1\,,n]\!]$ est un *record* de Σ si $\Sigma(i) > \Sigma(j)$ pour tout $j < i$; on note I_i l'indicatrice de l'événement « i est un record », et $R_n = I_1 + \cdots + I_n$. Le cours a montré que $\mathrm{P}(I_i = 1) = \frac{1}{i}$ et $\mathrm{E}(R_n) = H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

1. Soit $i < j$. Montrer que $\mathrm{P}(I_i = 1, I_j = 1) = \frac{1}{ij}$. On pourra dénombrer les permutations dont i et j sont des records, en choisissant d'abord les valeurs prises sur $[\![1\,,j]\!]$.
2. En déduire la variance de R_n, et montrer que $\mathrm{V}(R_n) \leqslant H_n$.
3. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathrm{P}\Big(\Big|\dfrac{R_n}{\ln n} - 1\Big| > \varepsilon\Big)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 101 ⋆⋆⋆

L'inégalité de Hoeffding pour la loi binomiale. La proposition 24 du cours traite le cas d'une pièce équilibrée ; on étend ici le résultat à une pièce quelconque. Soit $p \in]0\,,1[$ et S_n une variable de loi $\mathcal{B}(n,p)$.

1. Soit $a \in]p\,,1]$. Montrer que, pour tout réel $s \geqslant 0$,
$$\mathrm{P}\Big(\frac{S_n}{n} \geqslant a\Big) \leqslant \mathrm{e}^{-nsa}\big(1 - p + p\,\mathrm{e}^{s}\big)^n.$$
2. Pour $a \in]p\,,1[$, déterminer la meilleure de ces majorations, et l'exprimer à l'aide de
$$D(a,p) = (1-a)\ln\Big(\frac{1-a}{1-p}\Big) + a\ln\Big(\frac{a}{p}\Big).$$
3. Pour $0 < q < r < 1$, exprimer $D(r,q)$ comme l'intégrale sur $[q\,,r]$ de la fonction $t \mapsto \frac{r-t}{t(1-t)}$, et en déduire que $D(r,q) \geqslant 2(r-q)^2$.
4. En déduire que $\mathrm{P}\Big(\Big|\dfrac{S_n}{n} - p\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-2n\varepsilon^2}$ pour tout $\varepsilon > 0$, et comparer avec la proposition 24.

Exercices de synthèse

EXERCICE 102 ⋆⋆

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Les variables aléatoires sont réelles et définies sur un espace probabilisé fini.

1. Deux événements incompatibles, de probabilités strictement positives, ne sont jamais indépendants.
2. Si trois événements sont deux à deux indépendants, ils sont mutuellement indépendants.
3. Si X et Y ont la même loi, alors X^2 et Y^2 ont la même loi, et $\mathrm{E}(X^3) = \mathrm{E}(Y^3)$.
4. Si X et Y ont la même loi, alors $X+Y$ et $2X$ ont la même loi.
5. Si $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$, alors X et Y sont indépendantes.
6. Pour toutes variables aléatoires X et Y, on a $\mathrm{V}(X+Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y)$.
7. Si X et Y sont indépendantes, de lois $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$, alors $X+Y$ suit la loi $\mathcal{B}(n+m,p)$.
8. Si A et B sont deux événements tels que $\mathrm{P}(A\cap B) > 0$, alors $\mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}_A(B)$ si et seulement si $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B)$.
9. Il existe une variable aléatoire X, d'espérance nulle et de variance 1, telle que $\mathrm{P}(|X| \geqslant 2) = \frac{1}{4}$; l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ne peut donc pas être améliorée sans autre hypothèse.
10. Il y a plus de surjections de $[\![1\,,5]\!]$ sur $[\![1\,,3]\!]$ que d'injections de $[\![1\,,3]\!]$ dans $[\![1\,,5]\!]$.

EXERCICE 103 ⋆⋆

L'indicatrice d'Euler par les probabilités. Pour $n \geqslant 1$, on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers de $[\![1\,,n]\!]$ premiers avec n. Soit $n \geqslant 2$, de diviseurs premiers p_1, …, p_r. On choisit un entier x au hasard dans $[\![1\,,n]\!]$, selon la loi uniforme ; pour $m \in [\![1\,,n]\!]$, on note A_m l'événement « m divise x », et B l'événement « x est premier avec n ».

1. Exprimer B à l'aide des événements A_{p_1}, …, A_{p_r}.
2. Calculer $\mathrm{P}(A_m)$ lorsque m divise n.
3. Montrer que les événements A_{p_1}, …, A_{p_r} sont mutuellement indépendants. Le premier exemple du cours qui suit la proposition 10 traitait le cas $n = 60$.
4. En déduire $\mathrm{P}(B)$, puis la formule
$$\varphi(n) = n \prod_{k=1}^{r} \Big(1 - \frac{1}{p_k}\Big).$$
5. Que vaut $\varphi(n)$ lorsque n est un nombre premier, ou une puissance d'un nombre premier ? Retrouver directement ces valeurs.

EXERCICE 104 ⋆⋆

Faut-il changer d'avis ? Dans un jeu, g numéros parmi n sont gagnants ; ils sont choisis à l'avance par le meneur de jeu, qui est seul à les connaître, et l'on suppose $1 \leqslant g \leqslant \frac{n}{3}$. Dans une première phase, le joueur tire g numéros au hasard ; le meneur dévoile alors g numéros perdants, choisis au hasard parmi les numéros perdants que le joueur n'a pas tirés. Dans une seconde phase, le joueur a le choix entre deux stratégies : garder les g numéros qu'il a tirés, ou les échanger contre g numéros tirés au hasard parmi les $n-2g$ numéros qui n'ont été ni tirés ni dévoilés.

1. On note G_1 le nombre de numéros gagnants obtenus à l'issue de la première phase. Déterminer la loi de G_1 et son espérance, à l'aide de l'exercice 89.

2. On suppose que le joueur adopte la seconde stratégie, et l'on note G_2 le nombre de numéros gagnants qu'il obtient à la fin du jeu.

   (a) Soit $k \in [\![0\,,g]\!]$. Justifier que le meneur peut toujours dévoiler g numéros perdants, et déterminer la loi conditionnelle de G_2 sachant $(G_1 = k)$.

   (b) On note E_k la moyenne de cette loi conditionnelle, c'est-à-dire $E_k = \sum_j j\,\mathrm{P}_{(G_1=k)}(G_2 = j)$. Calculer E_k, puis montrer que $\mathrm{E}(G_2) = \sum_{k=0}^{g} E_k\,\mathrm{P}(G_1 = k)$.

   (c) En déduire que $\mathrm{E}(G_2) = \dfrac{g^2(n-g)}{n(n-2g)}$.

3. Comparer les deux stratégies. Que donne le cas $n = 3$ et $g = 1$, connu sous le nom de problème de Monty Hall ?

EXERCICE 105 ⋆⋆⋆

Une méthode probabiliste. Un *graphe* Γ est la donnée d'un ensemble fini S de *sommets* et d'un ensemble $\mathcal{E}$ de paires de sommets distincts, appelées *arêtes*. Une partie de S est dite *indépendante* si elle ne contient aucune arête, et l'on note $\alpha(\Gamma)$ le plus grand cardinal d'une partie indépendante. On suppose que Γ a n sommets et $\frac{nd}{2}$ arêtes, où $d \geqslant 1$ est un réel.

Soit $p \in [0\,,1]$. On construit une partie aléatoire X de S en décidant que chaque sommet appartient à X avec la probabilité p, indépendamment des autres ; on se donne pour cela des variables $(B_s)_{s\in S}$ mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, et l'on pose $X = \{s \in S \mid B_s = 1\}$. On numérote les sommets, puis, pour chaque arête dont les deux extrémités appartiennent à X, on retire de X celle de ses deux extrémités qui a le plus grand numéro. On obtient ainsi une partie U de X.

1. Montrer que U est indépendante, et que $|U| \geqslant |X| - Y$, où Y est le nombre d'arêtes dont les deux extrémités appartiennent à X.

2. En déduire que $\mathrm{E}(|U|) \geqslant np - \dfrac{p^2nd}{2}$.

3. Choisir p pour optimiser cette minoration, et en déduire que $\alpha(\Gamma) \geqslant \dfrac{n}{2d}$. On utilisera le principe de la moyenne du cours (théorème 9).

EXERCICE 106 ⋆⋆⋆

Le principe de réflexion. Pour des entiers s_0, s_ℓ et $\ell \geqslant 1$, on appelle *chemin* de $(0, s_0)$ à (ℓ, s_ℓ) toute suite d'entiers $(s_0, s_1, \ldots, s_\ell)$ telle que $|s_{i+1} - s_i| = 1$ pour tout $i \in [\![0\,,\ell - 1]\!]$; on le représente par la ligne brisée qui joint les points (i, s_i).

1. (a) Déterminer le nombre de chemins de $(0, s_0)$ à (ℓ, s_ℓ).

   (b) On suppose $s_0 > 0$ et $s_\ell > 0$. Montrer qu'il y a autant de chemins de $(0, s_0)$ à (ℓ, s_ℓ) qui touchent l'axe des abscisses, c'est-à-dire tels que $s_i = 0$ pour au moins un indice i, que de chemins de $(0, s_0)$ à $(\ell, -s_\ell)$.

2. Un sac contient n boules blanches et n boules noires, que l'on tire une à une, sans remise, tous les ordres étant également probables. Quelle est la probabilité qu'à chaque instant, le nombre de boules blanches déjà sorties soit supérieur ou égal au nombre de boules noires déjà sorties ? On pourra décaler les chemins d'une unité vers le haut.

3. Lors d'un scrutin entre deux candidats A et B, le candidat A obtient 600 voix et le candidat B en obtient 400 ; tous les ordres de dépouillement sont également probables. Quelle est la probabilité que A ait eu, tout au long du dépouillement, au moins autant de voix que B ? Ce problème porte le nom de J. Bertrand, qui l'a publié en 1887 dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences*.

4. Une place de cinéma coûte 5 euros. Dans une file d'attente de 100 personnes, 55 paient avec un billet de 5 euros et 45 avec un billet de 10 euros, tous les ordres d'arrivée étant également

probables. Le guichet dispose au départ de r billets de 5 euros pour rendre la monnaie. Exprimer, en fonction de r, la probabilité de pouvoir servir toutes les personnes dans l'ordre de la file, puis déterminer à l'aide d'un programme Python la plus petite valeur de r pour laquelle elle est au moins égale à 0,95.

Les quatre derniers exercices sont des problèmes à traiter en autonomie : l'énoncé fixe le but, et c'est à vous de trouver le chemin.

EXERCICE 107 ⋆⋆⋆⋆

Les $n \geqslant 2$ passagers d'un avion de n places, numérotés de 1 à n, embarquent dans l'ordre de leurs numéros, et le passager k devrait s'asseoir à la place k. Le premier passager ignore la consigne et s'assied sur une place choisie au hasard. Chacun des passagers suivants s'assied à sa place si elle est libre, et sinon sur une place libre choisie au hasard. Quelle est la probabilité que le dernier passager s'asseye à sa place ?

EXERCICE 108 ⋆⋆⋆⋆

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire X_n de loi $\mathcal{U}(\llbracket 1\,,n\rrbracket)$, et l'on note p_n la probabilité que le premier chiffre après la virgule, dans l'écriture décimale de $\sqrt{X_n}$, soit égal à 1. Déterminer la nature et l'éventuelle limite de la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$.

EXERCICE 109 ⋆⋆⋆⋆

L'inégalité de Harris. Soit $T_1, \ldots, T_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, de lois de Bernoulli de paramètres quelconques. On munit $\{0,1\}^n$ de l'ordre produit : $(x_1, \ldots, x_n) \leqslant (y_1, \ldots, y_n)$ si $x_i \leqslant y_i$ pour tout i. On appelle *variable croissante* toute variable de la forme $f(T_1, \ldots, T_n)$, où $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ est croissante pour cet ordre. Montrer que deux variables croissantes ont une covariance positive.

EXERCICE 110 ⋆⋆⋆⋆

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Démontrer, par un argument de dénombrement, que

$$\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_p)\in\mathbb{N}^p \\ i_1+\cdots+i_p=n}} i_1 i_2 \cdots i_p = \binom{n+p-1}{2p-1}.$$