CORRIGÉ – CHAPITRE 1

POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

Fonctions polynômes du second degré

EXERCICE 1 ⋆

Une fonction est une fonction trinôme lorsqu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle peut s'écrire ax^2+bx+c avec $a \neq 0$. On développe donc systématiquement avant de conclure.

	Forme développée	Trinôme ?	a	b	c
1.	$x^2 - x + 2$	oui	1	-1	2
2.	$3x^2 - 7x + 5$	oui	3	-7	5
3.	$-x^2 + \sqrt{2}x + \pi$	oui	-1	$\sqrt{2}$	π
4.	$x^3 + 2x^2 + 2x$	non	degré 3		
5.	$\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$	oui	$\frac{1}{3}$	-2	3
6.	$-x^2 + 7x$	oui	-1	7	0
7.	$5x^2 - 5x + 2$	oui	5	-5	2
8.	x	non	$a = 0$: fonction affine		
9.	$2x^2 + 5x - 15$	oui	2	5	-15
10.	$-x^2 + 4x$	oui	-1	4	0
11.	$\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}$	oui	$\frac{1}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$
12.	$\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$	non	non définie en 0		

Piège de la question 8 : le terme en x^2 disparaît au développement, puisque $x(1-x)+x^2 = x-x^2+x^2 = x$. La condition $a \neq 0$ n'est donc pas vérifiée.

Piège de la question 12 : le quotient n'existe pas pour $x = 0$, à cause du dénominateur $3x$. La fonction n'est donc pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, même si elle coïncide avec un trinôme sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

EXERCICE 2 ⋆

On applique la formule $\Delta = b^2 - 4ac$, après avoir développé lorsque c'est nécessaire.

1. $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 =$ $\boxed{25 > 0 \text{ : deux racines}}$

2. $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 16 - 16 =$ $\boxed{0 \text{ : une racine}}$

3. $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 1 - 12 =$ $\boxed{-11 < 0 \text{ : aucune racine}}$

4. Ici $c = 0$, donc $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 0 =$ $\boxed{25 > 0 \text{ : deux racines}}$

5. Ici $b = 0$, donc $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times (-9) =$ $\boxed{36 > 0 \text{ : deux racines}}$

6. $\Delta = 2^2 - 4 \times 5 \times 1 = 4 - 20 =$ $\boxed{-16 < 0 \text{ : aucune racine}}$

7. $\Delta = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 12 - 12 =$ $\boxed{0 \text{ : une racine}}$

8. On développe d'abord : $(2x-1)^2-9 = 4x^2-4x+1-9 = 4x^2-4x-8$, d'où :

$$\Delta = (-4)^2 - 4\times 4\times(-8) = 16+128 = \boxed{144>0 \text{ : deux racines}}$$

Piège : aux questions 4 et 5, il ne faut pas oublier que le coefficient manquant vaut 0, et non 1.

EXERCICE 3 ⋆

Le signe de a se lit sur l'orientation de la parabole, et le signe de Δ sur le nombre de points d'intersection avec l'axe des abscisses.

	(a)	**(b)**	**(c)**	**(d)**	**(e)**	**(f)**
Signe de a	$a>0$	$a<0$	$a>0$	$a<0$	$a>0$	$a<0$
Signe de Δ	$\Delta<0$	$\Delta>0$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
Solutions de $f(x)=0$	0	2	2	1	1	0

On retrouve les six cas du tableau récapitulatif du cours : la parabole est tournée vers le haut si $a>0$, vers le bas si $a<0$, et elle coupe l'axe des abscisses en autant de points que l'équation $f(x)=0$ a de solutions.

Forme canonique, sommet et variations

EXERCICE 4 ⋆

1. On développe en utilisant les identités remarquables.

(a) $2(x-3)^2+1 = 2(x^2-6x+9)+1 = 2x^2-12x+18+1$, d'où :

$$\boxed{f(x) = 2x^2-12x+19}$$

(b) $-(x+2)^2-3 = -(x^2+4x+4)-3 = -x^2-4x-4-3$, d'où :

$$\boxed{f(x) = -x^2-4x-7}$$

2. On utilise $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$, la forme canonique étant $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$.

(a) $\alpha = \dfrac{6}{2} = 3$ et $\beta = f(3) = 9-18+11 = 2$, d'où :

$$\boxed{f(x) = (x-3)^2+2}$$

(b) $\alpha = -\dfrac{5}{2}$ et $\beta = f\left(-\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{25}{4}-\dfrac{25}{2} = -\dfrac{25}{4}$, d'où :

$$\boxed{f(x) = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}}$$

(c) $\alpha = -\dfrac{8}{4} = -2$ et $\beta = f(-2) = 8-16+5 = -3$, d'où :

$$\boxed{f(x) = 2(x+2)^2-3}$$

(d) $\alpha = -\dfrac{6}{-6} = 1$ et $\beta = f(1) = -3 + 6 - 1 = 2$, d'où :

$$\boxed{f(x) = -3(x-1)^2 + 2}$$

Piège : le coefficient a se retrouve tel quel devant le carré. Écrire $f(x) = (x+2)^2 - 3$ à la question **(c)** donnerait un trinôme dont le coefficient dominant vaut 1, et non 2.

EXERCICE 5 ⋆

Dans chaque cas, on calcule Δ, puis $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$, avant de dresser le tableau de variations.

1. $\Delta = 16 - 20 = -4$, $\alpha = -2$ et $\beta = \dfrac{4}{4} = 1$:

$$\boxed{f(x) = (x+2)^2 + 1}$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

2. $\Delta = 36 - 56 = -20$, $\alpha = 3$ et $\beta = \dfrac{20}{4} = 5$:

$$\boxed{f(x) = (x-3)^2 + 5}$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	5	$\nearrow$	

3. $\Delta = 4 + 24 = 28$, $\alpha = -1$ et $\beta = -\dfrac{28}{4} = -7$:

$$\boxed{f(x) = (x+1)^2 - 7}$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-7	$\nearrow$	

4. $\Delta = 25 - 16 = 9$, $\alpha = -\dfrac{5}{2}$ et $\beta = -\dfrac{9}{4}$:

$$\boxed{f(x) = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}$$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$		$-\frac{9}{4}$		$\nearrow$

5. $\Delta = 81 - 60 = 21$, $\alpha = -\dfrac{9}{6} = -\dfrac{3}{2}$ et $\beta = -\dfrac{21}{12} = -\dfrac{7}{4}$:

$$\boxed{f(x) = 3\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}}$$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$		$-\frac{7}{4}$		$\nearrow$

6. $\Delta = 4 + 16 = 20$, $\alpha = -\dfrac{2}{-4} = \dfrac{1}{2}$ et $\beta = -\dfrac{20}{-8} = \dfrac{5}{2}$:

$$\boxed{f(x) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$		$\frac{5}{2}$		$\searrow$

Piège : seul le dernier trinôme a $a < 0$; c'est le seul dont le tableau de variations commence par une croissance et dont β est un *maximum*.

EXERCICE 6 ⋆

1. Le point A a pour abscisse 0, et $f(0) = a \times 0 + b \times 0 + c = c$. On lit $A(0\,;1)$, donc :

$$\boxed{c = 1}$$

2. On lit $B(1\,;-1)$ et $C(3\,;1)$, ce qui donne $f(1) = -1$ et $f(3) = 1$:

$$\begin{cases} a + b + 1 = -1 \\ 9a + 3b + 1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = -2 \\ 9a + 3b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = -2 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$$

En soustrayant la première ligne à la seconde, il vient $2a = 2$, puis $b = -3a = -3$:

$$\boxed{a = 1 \qquad \text{et} \qquad b = -3}$$

3. On reporte les trois valeurs trouvées :

$$\boxed{f(x) = x^2 - 3x + 1}$$

4. On calcule les coordonnées du sommet :

$$\alpha = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad \beta = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 1 = -\frac{5}{4}$$

Le sommet est le point $\left(\frac{3}{2}\,;-\frac{5}{4}\right)$, ce que confirme la lecture du graphique.

EXERCICE 7 ⋆⋆

1. On lit sur le graphique :

	Sommet	**Autre point**
$\mathcal{C}_f$	$(-1\,;1)$	$(0\,;0)$
$\mathcal{C}_g$	$(1\,;1)$	$(0\,;2)$
$\mathcal{C}_h$	$(-4\,;-2)$	$(-2\,;0)$

2. La forme canonique s'écrit $a(x-\alpha)^2+\beta$ où $(\alpha\,;\beta)$ est le sommet. Le second point permet de trouver a.

Pour f : $f(x) = a(x+1)^2+1$ et $f(0)=0$ donne $a+1=0$, donc $a=-1$.
Pour g : $g(x) = a(x-1)^2+1$ et $g(0)=2$ donne $a+1=2$, donc $a=1$.
Pour h : $h(x) = a(x+4)^2-2$ et $h(-2)=0$ donne $4a-2=0$, donc $a=\frac{1}{2}$.

$$f(x) = -(x+1)^2+1 \quad ; \quad g(x) = (x-1)^2+1 \quad ; \quad h(x) = \frac{1}{2}(x+4)^2-2$$

3. On développe chacune de ces trois expressions :

$$f(x) = -x^2-2x \quad ; \quad g(x) = x^2-2x+2 \quad ; \quad h(x) = \frac{1}{2}x^2+4x+6$$

4. On calcule les trois discriminants :

$$\Delta_f = (-2)^2 - 4\times(-1)\times 0 = 4 \qquad \Delta_g = (-2)^2 - 4\times 1\times 2 = -4$$

$$\Delta_h = 4^2 - 4\times\frac{1}{2}\times 6 = 16-12 = 4$$

$\Delta_f > 0$ et $\Delta_h > 0$: deux points d'intersection avec l'axe des abscisses,
$\Delta_g < 0$: aucun point d'intersection.

C'est bien ce que montre le graphique : $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe en -2 et 0, $\mathcal{C}_h$ en -6 et -2, tandis que $\mathcal{C}_g$ reste entièrement au-dessus.

Équations du second degré

EXERCICE 8 ⋆

On calcule à chaque fois le discriminant. Lorsque $\Delta > 0$, on applique la proposition 3 du cours :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

1. $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$ et $\sqrt{16} = 4$, donc :

$$x_1 = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-3\ ;\ 1\}}$$

2. $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 36 - 36 = 0$, donc l'unique solution vaut :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{6} = 1 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\mathcal{S} = \{1\}}$$

3. $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-20) = 1 + 80 = 81 > 0$ et $\sqrt{81} = 9$, donc :

$$x_1 = \frac{1-9}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1+9}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-4\ ;\ 5\}}$$

4. $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 11 \times 2 = 16 - 88 = -72 < 0$: $\boxed{\mathcal{S} = \varnothing}$

5. $\Delta = (-16)^2 - 4 \times 2 \times 24 = 256 - 192 = 64 > 0$ et $\sqrt{64} = 8$, donc :

$$x_1 = \frac{16-8}{4} = \frac{8}{4} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{16+8}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{2\ ;\ 6\}}$$

6. $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 3 \times (-6) = 9 + 72 = 81 > 0$ et $\sqrt{81} = 9$, donc :

$$x_1 = \frac{3-9}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{3+9}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-1\ ;\ 2\}}$$

7. $\Delta = \left(-\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 3 - 16 = -13 < 0$: $\boxed{\mathcal{S} = \varnothing}$

8. $\Delta = \left(4\sqrt{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 32 - 24 = 8 > 0$ et $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, donc :

$$x_1 = \frac{-4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2} = \frac{-6\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-3\sqrt{2}\ ;\ -\sqrt{2}\}}$$

9. $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 81 + 144 = 225 > 0$ et $\sqrt{225} = 15$, donc :

$$x_1 = \frac{9-15}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{9+15}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-1\ ;\ 4\}}$$

10. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times \dfrac{1}{2} = 4 - 4 = 0$, donc l'unique solution vaut :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}}$$

11. On développe d'abord : $x^2 - x = 4x + 14$, soit $x^2 - 5x - 14 = 0$. Alors $\Delta = 25 + 56 = 81 > 0$ et $\sqrt{81} = 9$, donc :

$$x_1 = \frac{5-9}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{5+9}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-2\ ;\ 7\}}$$

12. On développe : $3x^2 - 3x = 9x - 9$, soit $3x^2 - 12x + 9 = 0$, ou encore $x^2 - 4x + 3 = 0$ après division par 3. Alors $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$ et $\sqrt{4} = 2$, donc :

$$x_1 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{1\ ;\ 3\}}$$

Piège de la question 12 : on pourrait être tenté de simplifier par $(x-1)$ des deux côtés, ce qui ferait perdre la solution $x = 1$. Il faut tout ramener dans le membre de gauche.

EXERCICE 9 ⋆

1. Pour $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - \dfrac{3}{2}$, on a $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1$ et $c = -\dfrac{3}{2}$, donc :

$$\Delta = 1 - 4 \times \frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = 1 + 3 = 4 > 0 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{4} = 2$$

Comme $2a = 1$, il vient :

$$x_1 = \frac{-1-2}{1} = -3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1+2}{1} = 1$$

$$\boxed{\text{Racines : } -3 \text{ et } 1 \qquad ; \qquad \text{Sommet : } (-1\,;-2)}$$

2. Pour $f(x) = -x^2 + 2x - 5$, on a $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$:

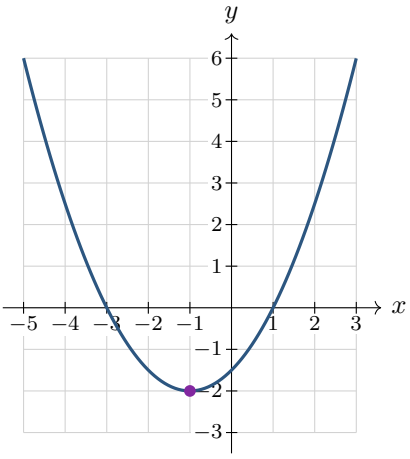
$$\boxed{\text{Aucune racine} \qquad ; \qquad \text{Sommet : } (1\,;-4)}$$

3. Pour $f(x) = 2x^2 + 12x + 18$, on a $\Delta = 144 - 144 = 0$, donc une racine double $x_0 = -\dfrac{12}{4} = -3$:

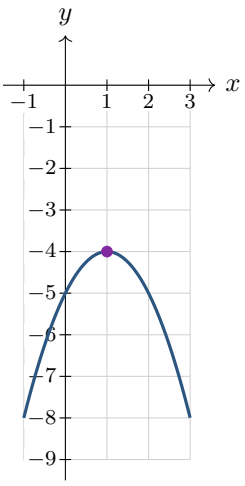
$$\boxed{\text{Racine double : } -3 \qquad ; \qquad \text{Sommet : } (-3\,;0)}$$

On remarque que $2x^2 + 12x + 18 = 2(x+3)^2$: le sommet appartient à l'axe des abscisses, ce qui est toujours le cas lorsque $\Delta = 0$.

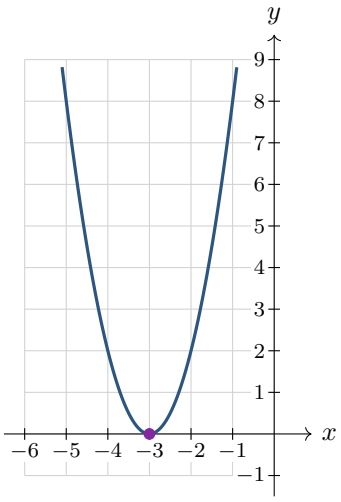
Les trois courbes sont représentées ci-dessous.



1.



2.



3.

Le sommet est repéré en violet sur chacune des trois paraboles.

EXERCICE 10 ⋆⋆

1. (a) En posant $X = x^2$, on a $x^4 = \left(x^2\right)^2 = X^2$, donc l'équation devient :

$$\boxed{X^2 - 6X + 8 = 0}$$

(b) Le discriminant vaut $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 36 - 32 = 4 > 0$ et $\sqrt{4} = 2$, donc :

$$X_1 = \frac{6-2}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{6+2}{2} = 4$$

$$\boxed{X = 2 \quad \text{ou} \quad X = 4}$$

(c) Il reste à revenir à x en résolvant $x^2 = X$ pour chacune des deux valeurs :

$$x^2 = 2 \iff x = -\sqrt{2} \ \text{ ou } \ x = \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad x^2 = 4 \iff x = -2 \ \text{ ou } \ x = 2$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-2\,;\,-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\,;\,2\}}$$

2. (a) On pose $X = x^2$, ce qui donne $X^2 - 2X - 8 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 4 + 32 = 36 > 0$ et $\sqrt{36} = 6$, donc :

$$X_1 = \frac{2-6}{2} = -2 \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{2+6}{2} = 4$$

Or $X = x^2$ est nécessairement positif : la valeur $X = -2$ est donc à rejeter. Il reste $x^2 = 4$:

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-2\,;\,2\}}$$

Piège : une équation bicarrée peut avoir deux solutions en X et seulement deux solutions en x. Il faut toujours vérifier le signe des valeurs de X obtenues.

(b) On pose $X = x^2$, ce qui donne $X^2 + X + 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$: cette équation n'a aucune solution, donc aucune valeur de X ne convient.

$$\boxed{\mathcal{S} = \varnothing}$$

EXERCICE 11 ⋆

Ici $a = 1$, $b = -(m+1)$ et $c = 4$, donc :

$$\Delta = (m+1)^2 - 16$$

1. La fonction f admet une unique racine si et seulement si $\Delta = 0$:

$$(m+1)^2 = 16 \iff m+1 = 4 \ \text{ ou } \ m+1 = -4 \iff \boxed{m = 3 \quad \text{ou} \quad m = -5}$$

La racine vaut alors $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{m+1}{2}$:

$$\boxed{\text{Pour } m = 3 \ :\ x_0 = 2 \qquad \text{et pour } m = -5 \ :\ x_0 = -2}$$

2. La fonction f n'admet aucune racine si et seulement si $\Delta < 0$:

$$(m+1)^2 < 16 \iff -4 < m+1 < 4 \iff \boxed{m \in \,]-5\,;3[}$$

EXERCICE 12 ⋆⋆

Attention : le coefficient de x^2 dépend de m. Il faut donc commencer par examiner le cas où il s'annule.

Premier cas : $m = -8$**.** L'équation devient $-8x + 1 = 0$, qui est du premier degré et admet l'unique solution $x = \dfrac{1}{8}$. La valeur $m = -8$ convient donc.

Second cas : $m \neq -8$**.** L'équation est alors du second degré, et elle admet une unique solution si et seulement si son discriminant est nul :

$$\Delta = m^2 - 4(m+8) = m^2 - 4m - 32$$

On résout $m^2 - 4m - 32 = 0$, dont le discriminant vaut $16 + 128 = 144 > 0$, avec $\sqrt{144} = 12$:

$$m_1 = \frac{4-12}{2} = -4 \qquad \text{et} \qquad m_2 = \frac{4+12}{2} = 8$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-8\ ;\ -4\ ;\ 8\}}$$

Piège : oublier le cas $m = -8$ fait perdre une valeur. Une équation « $ax^2 + bx + c = 0$ » n'est du second degré que si $a \neq 0$.

EXERCICE 13 ⋆⋆

Ici encore, le coefficient de x^2 vaut m : il faut commencer par le cas $m = 0$.

1. Si $m = 0$, l'équation $f(x) = 0$ devient $4x - 2 = 0$, du premier degré, d'unique solution $x = \dfrac{1}{2}$.

Si $m \neq 0$, on calcule le discriminant :

$$\Delta = 16 - 4 \times m \times 2(m-1) = 16 - 8m^2 + 8m$$

On cherche $\Delta = 0$, c'est-à-dire $-8m^2 + 8m + 16 = 0$, ou encore $m^2 - m - 2 = 0$ après division par -8. Le discriminant de cette dernière équation vaut $1 + 8 = 9 > 0$, avec $\sqrt{9} = 3$:

$$m_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \qquad \text{et} \qquad m_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

La racine vaut alors $x_0 = -\dfrac{4}{2m} = -\dfrac{2}{m}$.

$$\boxed{m = -1\ :\ x_0 = 2 \qquad m = 0\ :\ x_0 = \frac{1}{2} \qquad m = 2\ :\ x_0 = -1}$$

2. Il faut $m \neq 0$ et $\Delta > 0$, c'est-à-dire $m^2 - m - 2 < 0$. Le trinôme $m^2 - m - 2$ a pour racines -1 et 2, et son coefficient dominant est positif : il est donc négatif *entre* ses racines.

$$\boxed{m \in\ ]-1\,;0[\cup]0\,;2[}$$

3. Pour que $f(x) < 0$ pour tout réel x, il faut que f soit un trinôme ($m \neq 0$) de coefficient dominant négatif et sans racine, c'est-à-dire :

$$m < 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta < 0$$

Or $\Delta < 0$ équivaut à $m^2 - m - 2 > 0$, soit $m < -1$ ou $m > 2$. En croisant avec $m < 0$:

$$\boxed{m \in\ ]-\infty\,;-1[}$$

EXERCICE 14 ⋆⋆⋆

1. (a) On calcule $f(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$:

$$\boxed{1 \text{ est bien solution de } f(x) = 0.}$$

(b) On développe le membre de droite :

$$(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

En identifiant les coefficients avec $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -2 \\ c - b = -5 \\ -c = 6 \end{cases} \iff \boxed{a = 1 \quad ; \quad b = -1 \quad ; \quad c = -6}$$

On vérifie la cohérence des deux dernières lignes : $c - b = -6 - (-1) = -5$ ✓

(c) On résout $x^2 - x - 6 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$, avec $\sqrt{25} = 5$:

$$x_1 = \frac{1-5}{2} = -2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$$

$$\boxed{x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 3}$$

(d) Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-2\ ;\ 1\ ;\ 3\}}$$

2. On vérifie d'abord que 3 est solution :

$$2 \times 27 - 20 \times 9 - 618 \times 3 + 1980 = 54 - 180 - 1854 + 1980 = 0$$

On factorise ensuite par $(x-3)$ en posant $2x^3 - 20x^2 - 618x + 1980 = (x-3)(ax^2+bx+c)$. En développant, on obtient $ax^3 + (b-3a)x^2 + (c-3b)x - 3c$, d'où :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - 3a = -20 \\ c - 3b = -618 \\ -3c = 1980 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = -14 \\ c = -660 \end{cases}$$

Il reste à résoudre $2x^2 - 14x - 660 = 0$, soit $x^2 - 7x - 330 = 0$ après division par 2. Son discriminant vaut $\Delta = 49 + 1320 = 1369 > 0$, et $\sqrt{1369} = 37$, donc :

$$x_1 = \frac{7-37}{2} = \frac{-30}{2} = -15 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{7+37}{2} = \frac{44}{2} = 22$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-15\ ;\ 3\ ;\ 22\}}$$

EXERCICE 15 ⋆

On utilise la proposition 4 du cours : $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$, ce qui donne x_2 dès que x_1 est connue et non nulle.

	Racine évidente x_1	**Vérification**	$\boldsymbol{\frac{c}{a}}$	**Autre racine x_2**
1.	1	$1-7+6=0$	6	6
2.	-1	$-3-2+5=0$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$
3.	2	$4+6-10=0$	-10	-5
4.	$-\sqrt{2}$	$2+2-4=0$	-4	$2\sqrt{2}$
5.	2	$4+2-6=0$	-6	-3
6.	-1	$1-5+4=0$	4	-4
7.	$\sqrt{5}$	$10+5-15=0$	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{3\sqrt{5}}{2}$
8.	3	$9-24+15=0$	15	5

Détaillons la question **4.** : on a $x_1x_2 = -4$ avec $x_1 = -\sqrt{2}$, donc :

$$x_2 = \frac{-4}{-\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

et la question **7.** : $x_1x_2 = -\dfrac{15}{2}$ avec $x_1 = \sqrt{5}$, donc :

$$x_2 = \frac{-15}{2\sqrt{5}} = \frac{-15\sqrt{5}}{10} = -\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

EXERCICE 16 ⋆

On cherche les racines, puis on applique la proposition 5 : $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.

1. $\Delta = 49 - 40 = 9 > 0$ et $\sqrt{9} = 3$, donc :

$$x_1 = \frac{7-3}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{7+3}{2} = 5$$

$$\boxed{f(x) = (x-2)(x-5)}$$

2. $\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$ et $\sqrt{9} = 3$, donc, avec $2a = 4$:

$$x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{5+3}{4} = 2$$

$$f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f(x) = (2x-1)(x-2)}$$

3. $\Delta = 16 + 48 = 64 > 0$ et $\sqrt{64} = 8$, donc, avec $2a = -6$:

$$x_1 = \frac{-4-8}{-6} = \frac{-12}{-6} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-4+8}{-6} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$$

$$f(x) = -3(x-2)\left(x + \frac{2}{3}\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f(x) = -(x-2)(3x+2)}$$

4. $\Delta = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} > 0$ et $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$, donc, avec $2a = -1$:

$$x_1 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\boxed{f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x-1)}$$

Piège : le coefficient a ne doit jamais être oublié devant le produit. On peut toujours vérifier en développant, ou en comparant les termes constants : par exemple pour **1.**, $(-2) \times (-5) = 10$ ✓

EXERCICE 17 ⋆

1. On développe le membre de droite :

$$2(x+4)(x-2) = 2\big(x^2 - 2x + 4x - 8\big) = 2\big(x^2 + 2x - 8\big) = 2x^2 + 4x - 16$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f(x) = 2(x+4)(x-2).}$$

2. On développe de même :

$$2(x+1)^2 - 18 = 2\big(x^2 + 2x + 1\big) - 18 = 2x^2 + 4x + 2 - 18 = 2x^2 + 4x - 16$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f(x) = 2(x+1)^2 - 18.}$$

3. (a) La *forme canonique* donne directement le sommet $(-1\,;-18)$, et $a = 2 > 0$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↘	-18	↗

(b) La *forme factorisée* permet de résoudre par produit nul :

$$2(x+4)(x-2) = 0 \iff x+4 = 0 \ \text{ ou } \ x-2 = 0$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-4\ ;\ 2\}}$$

(c) La *forme canonique* est la plus adaptée, car elle isole le carré :

$$2(x+1)^2 - 18 = -16 \iff 2(x+1)^2 = 2 \iff (x+1)^2 = 1 \iff x+1 = 1 \ \text{ ou } \ x+1 = -1$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-2\ ;\ 0\}}$$

Remarque : on aurait aussi pu développer, ce qui donne $2x^2 + 4x = 0$, soit $2x(x+2) = 0$. C'est tout l'intérêt de disposer de trois formes : chacune répond à une question différente sans calcul supplémentaire.

EXERCICE 18 ⋆⋆

Comme $m \neq 1$, on a $a = m - 1 \neq 0$: l'équation (E) est bien du second degré. Son discriminant vaut :

$$\Delta = (-2)^2 - 4(m-1)(1-m) = 4 - 4(m-1)(1-m)$$

Or $(m-1)(1-m) = -(m-1)(m-1) = -(m-1)^2$, donc :

$$\Delta = 4 + 4(m-1)^2$$

Un carré étant positif, on obtient $\Delta \geqslant 4 > 0$:

L'équation (E) admet toujours deux racines distinctes x_1 et x_2.

D'après la proposition 4 du cours, leur produit vaut :

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1-m}{m-1} = \frac{-(m-1)}{m-1} = -1$$

$x_1 x_2 = -1 < 0$: les deux racines sont de signes opposés.

En effet, un produit de deux nombres non nuls est négatif si et seulement si ces deux nombres sont de signes contraires.

Signe d'un trinôme et inéquations

EXERCICE 19 ⋆

1. Les racines sont -2 et 3, et $a = 2 > 0$: $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. L'expression $-2\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$ est le produit de -2 par un carré, donc toujours négative, et nulle seulement en $\frac{1}{3}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

3. Ici $\Delta = 0 - 20 = -20 < 0$ et $a = 1 > 0$: $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

4. $\Delta = 16 + 128 = 144 > 0$ et $\sqrt{144} = 12$, donc :

$$x_1 = \frac{4-12}{4} = -2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{4+12}{4} = 4$$

Comme $a = 2 > 0$, le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5. $\Delta = 576 - 576 = 0$, avec la racine double $x_0 = -\dfrac{24}{18} = -\dfrac{4}{3}$. On reconnaît d'ailleurs $9x^2 + 24x + 16 = (3x+4)^2$, qui est positif et nul en $-\frac{4}{3}$.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

6. $\Delta = 25 - 48 = -23 < 0$ et $a = 2 > 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

Piège : aux questions **2.** et **5.**, le trinôme s'annule sans changer de signe. C'est le cas $\Delta = 0$: le signe reste celui de a de part et d'autre de la racine.

EXERCICE 20 ⋆

On étudie à chaque fois le signe du trinôme, en cherchant d'abord ses racines.

1. $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$ et $\sqrt{1} = 1$, donc $x_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{3+1}{2} = 2$. Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est positif à l'extérieur des racines.

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty\,;1[\cup]2\,;+\infty[}$$

2. $\Delta = -16 < 0$ et $a = 1 > 0$: le trinôme est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}}$$

3. $\Delta = 1 + 80 = 81 > 0$ et $\sqrt{81} = 9$, donc $x_1 = \dfrac{-1-9}{2} = -5$ et $x_2 = \dfrac{-1+9}{2} = 4$. Comme $a > 0$, le trinôme est négatif entre les racines.

$$\boxed{\mathcal{S} = [-5\,;4]}$$

4. $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ et $a > 0$: le trinôme est strictement positif, jamais négatif.

$$\boxed{\mathcal{S} = \varnothing}$$

5. $\Delta = 324 - 324 = 0$, racine double -3, et $a = 3 > 0$: le trinôme est positif, et nul uniquement en -3.

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty\,;-3[\cup]-3\,;+\infty[}$$

6. On a $-x^2 - 9 = -(x^2 + 9)$, qui est strictement négatif pour tout réel x.

$$\boxed{\mathcal{S} = \varnothing}$$

7. Le produit $x(x-2)$ a pour racines 0 et 2, avec $a = 1 > 0$: il est négatif entre les racines.

$$\boxed{\mathcal{S} =]0\,;2[}$$

8. $\Delta = 49 - 48 = 1 > 0$ et $\sqrt{1} = 1$, donc $x_1 = \dfrac{-7-1}{2} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-7+1}{2} = -3$. Comme $a > 0$:

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty\,;-4] \cup [-3\,;+\infty[}$$

9. $\Delta = 1 + 32 = 33 > 0$. Ici $a = -2$ et $b = -1$, donc $2a = -4$:

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{33}}{-4} = \frac{\sqrt{33}-1}{4} \approx 1{,}19 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{33}}{-4} = -\frac{1+\sqrt{33}}{4} \approx -1{,}69$$

Ici $x_2 < x_1$, car $a < 0$. Comme $a = -2 < 0$, le trinôme est positif entre les racines :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\frac{1+\sqrt{33}}{4}\,;\frac{\sqrt{33}-1}{4}\right[}$$

10. $\Delta = 576 - 576 = 0$, racine double 6, et $a = 2 > 0$: le trinôme est positif, nul seulement en 6. L'inégalité large n'est donc vérifiée qu'en ce point.

$$\boxed{\mathcal{S} = \{6\}}$$

11. $\Delta = 16 + 48 = 64 > 0$ et $\sqrt{64} = 8$, donc $x_1 = \dfrac{-4-8}{2} = -6$ et $x_2 = \dfrac{-4+8}{2} = 2$. Comme $a > 0$:

$$\boxed{\mathcal{S} =]-6\,;2[}$$

12. $\Delta = 25 - 28 = -3 < 0$ et $a > 0$: le trinôme est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}}$$

Piège des questions 5 et 10 : le cas $\Delta = 0$ demande de l'attention. En **5.** l'inégalité est stricte, donc la racine est *exclue* ; en **10.** elle est large, donc la racine est la *seule* solution.

EXERCICE 21 ⋆

1. On lit sur le graphique les portions de courbe situées au-dessus ou au-dessous de l'axe des abscisses.

(a) La courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de l'axe entre ses deux racines -2 et 0 :

$$\boxed{f(x) > 0 \iff x \in]-2\,;0[}$$

(b) La courbe $\mathcal{C}_h$ est au-dessous de l'axe entre ses deux racines -6 et -2, et le touche en ces deux points :

$$\boxed{h(x) \leqslant 0 \iff x \in [-6\,;-2]}$$

(c) La courbe $\mathcal{C}_g$ est entièrement au-dessus de l'axe :

$$\boxed{g(x) < 0 \iff \mathcal{S} = \varnothing}$$

2. On reprend les expressions obtenues à l'exercice 7.

Pour $f(x) = -x^2 - 2x = -x(x+2)$, les racines sont -2 et 0, et $a = -1 < 0$:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On retrouve bien $f(x) > 0$ sur $]-2\,;0[$.

Pour $h(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 4x + 6$, on a $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$ et $\sqrt{4} = 2$. Comme $2a = 1$:

$$x_1 = \frac{-4-2}{1} = -6 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-4+2}{1} = -2$$

Avec $a = \dfrac{1}{2} > 0$, on obtient :

x	$-\infty$		-6		-2		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On retrouve bien $h(x) \leqslant 0$ sur $[-6\,;-2]$.

Pour $g(x) = x^2 - 2x + 2$, on a $\Delta = -4 < 0$ et $a = 1 > 0$: g est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc l'inéquation $g(x) < 0$ n'a aucune solution.

3. La valeur -2 est l'ordonnée du sommet de $\mathcal{C}_h$, c'est-à-dire le minimum de h : la droite d'équation $y = -2$ touche la courbe en un seul point. La valeur -3 est strictement inférieure à ce minimum : la droite d'équation $y = -3$ ne rencontre pas la courbe.

$$\boxed{h(x) = -2 \text{ admet une unique solution ; } h(x) = -3 \text{ n'en admet aucune.}}$$

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. Le numérateur $2x^2 + 5x + 3$ a pour discriminant $25 - 24 = 1 > 0$, avec $\sqrt{1} = 1$ et $2a = 4$:

$$x_1 = \frac{-5-1}{4} = -\frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-5+1}{4} = -1$$

Le dénominateur $x^2 + x - 2$ a pour discriminant $1 + 8 = 9 > 0$, avec $\sqrt{9} = 3$ et $2a = 2$:

$$x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

Ces deux dernières valeurs annulent le dénominateur : le quotient n'y est pas défini.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{3}{2}$		-1		1		$+\infty$
$2x^2+5x+3$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2+x-2		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
quotient		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty\,;-2[\cup \left]-\frac{3}{2}\,;-1\right[\cup]1\,;+\infty[}$$

2. On ramène tout dans le membre de gauche et on reconnaît une différence de deux carrés :

$$\begin{aligned}(2x-1)^2 > (x+1)^2 &\iff (2x-1)^2-(x+1)^2 > 0\\ &\iff [(2x-1)-(x+1)][(2x-1)+(x+1)] > 0\\ &\iff (x-2)\times 3x > 0\end{aligned}$$

Le trinôme $3x(x-2)$ a pour racines 0 et 2, avec un coefficient dominant $3 > 0$: il est positif à l'extérieur des racines.

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty\,;0[\cup]2\,;+\infty[}$$

3. On développe et on regroupe :

$$(x+3)(x-1) < 2x+6 \iff x^2+2x-3 < 2x+6 \iff x^2 < 9 \iff x^2-9 < 0$$

Le trinôme x^2-9 a pour racines -3 et 3, avec $a > 0$: il est négatif entre les racines.

$$\boxed{\mathcal{S} =]-3\,;3[}$$

4. L'expression n'est définie que pour $x \neq 1$. On ramène tout dans le membre de gauche :

$$\frac{x+3}{1-x} \geqslant -5x+3 \iff \frac{x+3}{1-x}+5x-3 \geqslant 0 \iff \frac{(x+3)+(5x-3)(1-x)}{1-x} \geqslant 0$$

On développe le numérateur :

$$(x+3)+(5x-3)(1-x) = x+3+5x-5x^2-3+3x = -5x^2+9x = x(9-5x)$$

Le numérateur a pour racines 0 et $\frac{9}{5}$, avec un coefficient dominant $-5 < 0$: il est positif entre les racines. Le dénominateur $1-x$ est positif pour $x < 1$.

x	$-\infty$		0		1		$\frac{9}{5}$		$+\infty$
$x(9-5x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
quotient		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

$$\boxed{\mathcal{S} = [0\,;1[\cup \left[\frac{9}{5}\,;+\infty\right[}$$

Piège : on ne multiplie jamais les deux membres d'une inéquation par $1-x$, dont le signe est inconnu. On ramène tout d'un même côté, puis on étudie le signe du quotient.

Problèmes du second degré

EXERCICE 23 ⋆

Le gagnant reçoit n € de la part de chacun des $n-1$ autres joueurs, donc il reçoit $n(n-1)$ euros au total. On résout donc :

$$n(n-1) = 20 \iff n^2 - n - 20 = 0$$

Le discriminant vaut $\Delta = 1 + 80 = 81 > 0$ et $\sqrt{81} = 9$, donc :

$$n_1 = \frac{1-9}{2} = -4 \qquad \text{et} \qquad n_2 = \frac{1+9}{2} = 5$$

Un nombre de joueurs étant un entier positif, la valeur -4 est à rejeter.

$$\boxed{\text{Il y a 5 joueurs.}}$$

Vérification : le gagnant reçoit 5 € de chacun des 4 autres joueurs, soit 20 € ✓

EXERCICE 24 ⋆

Notons n le plus petit des deux entiers ; le suivant est $n+1$. On résout :

$$n(n+1) = 4\,970 \iff n^2 + n - 4\,970 = 0$$

Le discriminant vaut $\Delta = 1 + 19\,880 = 19\,881$, et $\sqrt{19\,881} = 141$, d'où :

$$n = \frac{-1-141}{2} = -71 \qquad \text{ou} \qquad n = \frac{-1+141}{2} = 70$$

$$\boxed{\text{Les deux entiers sont 70 et 71, ou bien } -71 \text{ et } -70.}$$

Vérification : $70 \times 71 = 4\,970$ et $(-71) \times (-70) = 4\,970$ ✓

EXERCICE 25 ⋆⋆

Notons x le côté de la piscine, en mètres, avec $x > 0$. On exprime chacune des trois dépenses.

- La bâche recouvre un carré d'aire x^2, donc elle coûte $20x^2$ euros.
- La clôture est placée à 2 mètres du bord : elle forme un carré de côté $x+2+2 = x+4$, donc de périmètre $4(x+4)$. Elle coûte $100 \times 4(x+4) = 400x + 1\,600$ euros.
- L'échelle coûte 150 euros.

Le total vaut 8 155 euros, ce qui donne :

$$20x^2 + 400x + 1\,600 + 150 = 8\,155 \iff 20x^2 + 400x - 6\,405 = 0 \iff 4x^2 + 80x - 1\,281 = 0$$

Le discriminant vaut :

$$\Delta = 80^2 - 4 \times 4 \times (-1\,281) = 6\,400 + 20\,496 = 26\,896$$

et $\sqrt{26\,896} = 164$, d'où :

$$x = \frac{-80-164}{8} = -30{,}5 \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{-80+164}{8} = 10{,}5$$

Une longueur étant positive, la première valeur est à rejeter.

La piscine mesure 10,5 mètres de côté.

Vérification : $20 \times 10{,}5^2 = 2\,205$, $400 \times 10{,}5 + 1\,600 = 5\,800$, et $2\,205 + 5\,800 + 150 = 8\,155$ ✓

Piège : la clôture entoure un carré de côté $x + 4$ et non $x + 2$, puisqu'on ajoute 2 mètres *de chaque côté*.

Exercices de synthèse

EXERCICE 26 : QCM

Question	Réponse	Justification
1.	**a**	$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1$.
2.	**a**	$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$: aucune solution réelle.
3.	**a**	La forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$ donne le sommet $(\alpha\,;\beta) = (2\,;3)$.
4.	**b**	C'est la proposition 5 du cours dans le cas $\Delta = 0$.
5.	**b**	C'est la proposition 4 : le produit des racines vaut $\frac{c}{a}$, la somme $-\frac{b}{a}$.
6.	**a**	Les racines sont -2 et 2, et $a = -1 < 0$: le trinôme est positif *entre* les racines.
7.	**a**	$\alpha = 2$ et $\beta = f(2) = 4 - 8 + 7 = 3$.
8.	**b**	Sans racine, le trinôme garde le signe de a sur $\mathbb{R}$ (proposition 6).
9.	**b**	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{10}{2} = 5$.
10.	**a**	L'axe de symétrie a pour équation $x = \alpha$, avec $\alpha = -\frac{6}{6} = -1$.

Piège de la question 9 : la réponse **c** est le produit des racines, $\frac{c}{a} = \frac{3}{2}$, et la réponse **a** oublie le signe moins de la formule.

EXERCICE 27 : VRAI OU FAUX

1. **Vraie** C'est la définition du cours : une fonction trinôme est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. C'est d'ailleurs ce qui disqualifie la question 12 de l'exercice 1.

2. **Vraie** Si $\Delta < 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution : la courbe n'a aucun point d'ordonnée nulle.

3. **Fausse** Si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas et β est un *maximum*. C'est le cas de la question 6 de l'exercice 5.

4. **Vraie** C'est la proposition 1 du cours : $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

5. **Fausse** L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ a un discriminant négatif et n'admet aucune solution réelle.

6. **Vraie** C'est exactement l'énoncé de la proposition 6.

7. **Fausse** C'est la forme *factorisée* qui donne les racines. La forme canonique donne le sommet, donc les variations et l'extremum.

8. **Vraie** Un produit de deux nombres non nuls est négatif si et seulement s'ils sont de signes contraires. C'est l'argument de l'exercice 18.

9. **Fausse** Lorsque $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racine et n'est pas factorisable (proposition 5). Par exemple $x^2 + 5$ de l'exercice 19.

10. **Vraie** On a $f(0) = a \times 0 + b \times 0 + c = c$, ce qui est utilisé à l'exercice 6 pour lire c sur l'axe des ordonnées.

EXERCICE 28 ⋆⋆⋆

1. Le point E appartient à $[AB]$, qui mesure 5 cm, donc $AE = x$ varie entre 0 et 5. Le point F appartient à $[BC]$ avec $CF = x$, ce qui donne la même contrainte.

$$\boxed{x \in [0\,;5]}$$

2. Le triangle AEF est rectangle en E, puisque E appartient au côté $[AB]$ et que l'angle en B du carré est droit. On prend $[AE]$ pour base : la hauteur associée est la distance de F à la droite (AB), c'est-à-dire BF. Or :

$$BF = BC - CF = 5 - x$$

L'aire du triangle vaut donc :

$$\boxed{\mathcal{A}(x) = \frac{AE \times BF}{2} = \frac{x(5-x)}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x}$$

3. La fonction $\mathcal{A}$ est un trinôme de coefficient dominant $-\dfrac{1}{2} < 0$: elle admet donc un maximum, atteint en :

$$\alpha = -\frac{\frac{5}{2}}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{5}{2}$$

Cette valeur appartient bien à $[0\,;5]$, et :

$$\mathcal{A}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\frac{5}{2} \times \frac{5}{2}}{2} = \frac{25}{8} = 3{,}125$$

$$\boxed{\text{L'aire est maximale pour } x = 2{,}5 \text{ cm, et vaut alors } 3{,}125 \text{ cm}^2.}$$

Le point E est alors le milieu de $[AB]$, ce que la symétrie de l'expression $x(5-x)$ laissait prévoir.

4. On résout :

$$\frac{x(5-x)}{2} = 2{,}75 \iff x(5-x) = 5{,}5 \iff -x^2 + 5x - 5{,}5 = 0 \iff 2x^2 - 10x + 11 = 0$$

Le discriminant vaut $\Delta = 100 - 88 = 12 > 0$, et $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, d'où :

$$x_1 = \frac{10 - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{5 - \sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{10 + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{5 + \sqrt{3}}{2}$$

Les deux valeurs $\dfrac{5-\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}63$ et $\dfrac{5+\sqrt{3}}{2} \approx 3{,}37$ appartiennent à $[0\,;5]$.

$$\boxed{x = \frac{5 - \sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5 + \sqrt{3}}{2}}$$

Ces deux valeurs sont symétriques par rapport à 2,5, ce qui est cohérent avec la question précédente : la parabole prend deux fois la même valeur de part et d'autre de son sommet.

EXERCICE 29 ⋆⋆⋆

Notons v la vitesse moyenne, en km/h, du cycliste le plus lent, avec $v > 0$. Celle de l'autre vaut $v+4$. Le temps de parcours étant le quotient de la distance par la vitesse, le plus lent met $\dfrac{195}{v}$ heures et le plus rapide $\dfrac{195}{v+4}$ heures. Le plus rapide arrive une heure plus tôt :

$$\frac{195}{v} - \frac{195}{v+4} = 1$$

On réduit au même dénominateur, sachant que $v > 0$ et donc $v + 4 > 0$:

$$\frac{195(v+4) - 195v}{v(v+4)} = 1 \iff \frac{780}{v(v+4)} = 1 \iff v^2 + 4v = 780 \iff v^2 + 4v - 780 = 0$$

Le discriminant vaut $\Delta = 16 + 3\,120 = 3\,136$, et $\sqrt{3\,136} = 56$, d'où :

$$v = \frac{-4-56}{2} = -30 \qquad \text{ou} \qquad v = \frac{-4+56}{2} = 26$$

Une vitesse étant positive, la valeur -30 est à rejeter.

Les deux cyclistes roulent à 26 km/h et 30 km/h.

Vérification : $\dfrac{195}{26} = 7{,}5$ heures et $\dfrac{195}{30} = 6{,}5$ heures : l'écart est bien d'une heure ✓