EXERCICES – CHAPITRE 1

POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

Fonctions polynômes du second degré

EXERCICE 1 ⋆

Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer s'il s'agit ou non d'une fonction trinôme. Si oui, donner ses paramètres a, b et c.

1. $f(x) = x^2 - x + 2$
2. $f(x) = 3x^2 + 5 - 7x$
3. $f(x) = \sqrt{2}x - x^2 + \pi$
4. $f(x) = x(x^2 + 2x + 2)$
5. $f(x) = 3 + \dfrac{x^2}{3} - 2x$
6. $f(x) = 7x - x^2$
7. $f(x) = 5x(x - 1) + 2$
8. $f(x) = x(1 - x) + x^2$
9. $f(x) = 2x(x + 1) + 3(x - 5)$
10. $f(x) = x(x^2 + 4) - x(x^2 + x)$
11. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 1}{2}$
12. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 4x}{3x} - 2x$

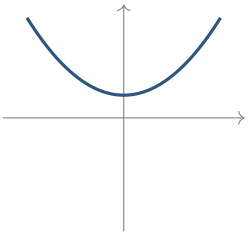
EXERCICE 2 ⋆

Calculer le discriminant de chacune des fonctions trinômes suivantes, puis en déduire le nombre de racines.

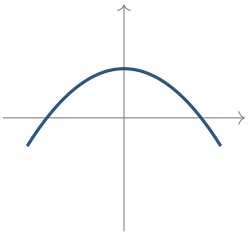
1. $f(x) = x^2 + 3x - 4$
2. $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$
3. $f(x) = -x^2 + x - 3$
4. $f(x) = 3x^2 - 5x$
5. $f(x) = x^2 - 9$
6. $f(x) = 5x^2 + 2x + 1$
7. $f(x) = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$
8. $f(x) = (2x - 1)^2 - 9$

EXERCICE 3 ⋆

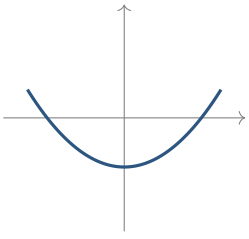
Les six paraboles ci-dessous sont les courbes représentatives de six fonctions trinômes. Pour chacune, donner le signe de a, le signe du discriminant Δ, et le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.



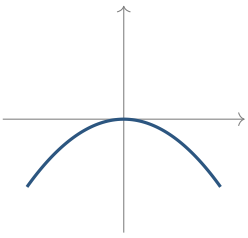
(a)



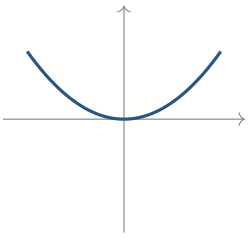
(b)



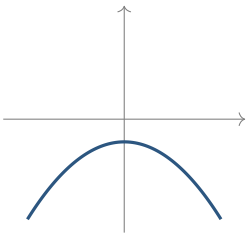
(c)



(d)



(e)



(f)

Forme canonique, sommet et variations

EXERCICE 4 ⋆

1. Développer et réduire les expressions suivantes.

   (a) $f(x) = 2(x-3)^2 + 1$ (b) $f(x) = -(x+2)^2 - 3$

2. Mettre les fonctions trinômes suivantes sous forme canonique.

   (a) $f(x) = x^2 - 6x + 11$ (c) $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$

   (b) $f(x) = x^2 + 5x$ (d) $f(x) = -3x^2 + 6x - 1$

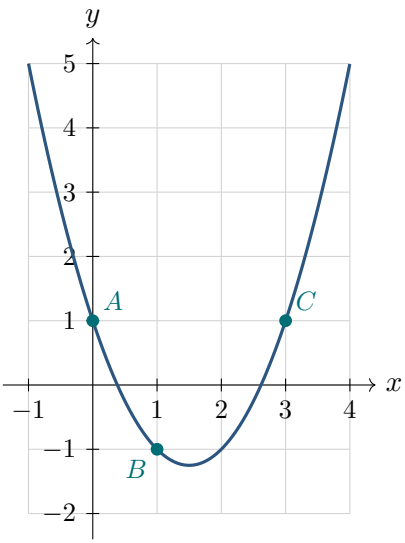
EXERCICE 5 ⋆

Pour chacune des fonctions trinômes suivantes, déterminer le discriminant, en déduire la forme canonique, puis dresser le tableau de variations.

1. $f(x) = x^2 + 4x + 5$
2. $f(x) = x^2 - 6x + 14$
3. $f(x) = x^2 + 2x - 6$
4. $f(x) = x^2 + 5x + 4$
5. $f(x) = 3x^2 + 9x + 5$
6. $f(x) = -2x^2 + 2x + 2$

EXERCICE 6 ⋆

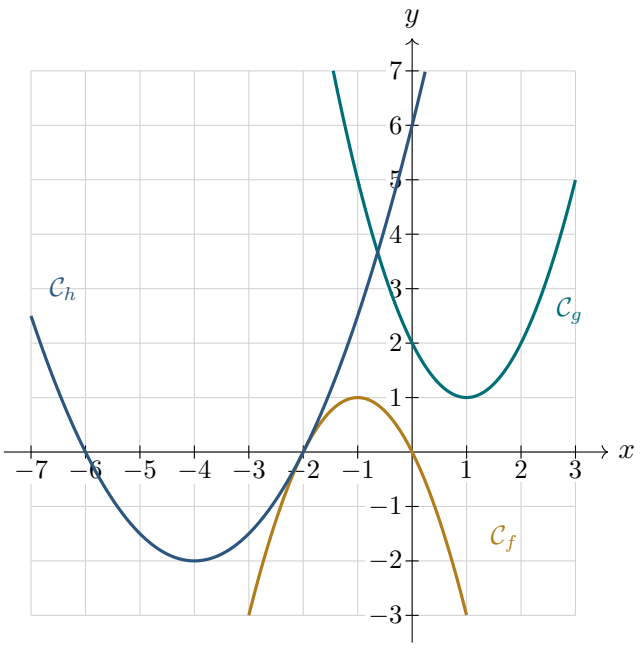
Soit f une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$, où $a \neq 0$. Sa courbe représentative est donnée ci-dessous, ainsi que trois de ses points A, B et C.



1. À l'aide des coordonnées du point A, déterminer la valeur de c.
2. À l'aide des coordonnées des points B et C, déterminer les valeurs de a et b.
3. En déduire l'expression de $f(x)$.
4. Vérifier le résultat obtenu en calculant les coordonnées du sommet de la parabole.

EXERCICE 7 ⋆⋆

Les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ ci-dessous sont les représentations graphiques de trois fonctions trinômes f, g et h.



1. Pour chacune des trois fonctions, lire les coordonnées du sommet de sa parabole, puis celles d'un autre point à coordonnées entières.
2. En déduire la forme canonique de f, de g et de h.
3. En déduire l'expression développée de chacune de ces trois fonctions.
4. Retrouver, par le calcul, le discriminant de chacune d'elles, et vérifier la cohérence avec le nombre de points d'intersection lus sur le graphique.

Équations du second degré

EXERCICE 8 ⋆

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $x^2 + 2x - 3 = 0$
2. $3x^2 - 6x + 3 = 0$
3. $x^2 - x - 20 = 0$
4. $11x^2 - 4x + 2 = 0$
5. $2x^2 - 16x + 24 = 0$
6. $3x^2 - 3x - 6 = 0$
7. $x^2 - \sqrt{3}x + 4 = 0$
8. $x^2 + 4\sqrt{2}x + 6 = 0$
9. $3x^2 - 9x - 12 = 0$
10. $2x^2 - 2x + \dfrac{1}{2} = 0$
11. $x(x-1) = 2(2x+7)$
12. $3x(x-1) = 9(x-1)$

EXERCICE 9 ⋆

Pour chacune des fonctions trinômes suivantes, déterminer les racines si elles existent, puis les coordonnées du sommet de la parabole. Tracer enfin la courbe représentative de f dans un repère orthogonal d'unité 1 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - \dfrac{3}{2}$
2. $f(x) = -x^2 + 2x - 5$
3. $f(x) = 2x^2 + 12x + 18$

EXERCICE 10 ⋆⋆

Dans cet exercice, on s'intéresse aux équations dites **bicarrées**, qui sont de la forme :

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \qquad \text{où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels tels que } a \neq 0$$

1. On veut résoudre l'équation (E) : $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$.
   (a) Poser $X = x^2$ dans l'équation, et en déduire une nouvelle équation d'inconnue X.
   (b) Résoudre l'équation $X^2 - 6X + 8 = 0$.
   (c) En déduire les solutions de (E).
2. Avec la même méthode, résoudre les équations suivantes.
   (a) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$
   (b) $x^4 + x^2 + 1 = 0$

EXERCICE 11 ⋆

Soit m un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - (m+1)x + 4$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m la fonction f admet-elle une unique racine ? Calculer alors cette racine.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de m la fonction f n'admet-elle aucune racine ?

EXERCICE 12 ⋆⋆

On considère l'équation d'inconnue x :

$$(m+8)x^2 + mx + 1 = 0$$

Pour quelles valeurs du réel m cette équation admet-elle une unique solution ?

EXERCICE 13 ⋆⋆

Soit m un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx^2 + 4x + 2(m-1)$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m la fonction f admet-elle une unique racine ? Calculer alors cette racine.
2. Quel est l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles f admet deux racines distinctes ?
3. Quel est l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles $f(x) < 0$ pour tout réel x ?

EXERCICE 14 ⋆⋆⋆

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

On veut résoudre l'équation $f(x) = 0$.

(a) Vérifier que 1 est solution de l'équation $f(x) = 0$.

(b) Montrer que l'on peut écrire $f(x)$ sous la forme $(x-1)(ax^2+bx+c)$, en développant et en identifiant les coefficients. On donnera les valeurs de a, b et c.

(c) Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

(d) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

2. Utiliser une méthode analogue pour résoudre l'équation suivante, après avoir vérifié que 3 en est solution :

$$2x^3 - 20x^2 - 618x + 1980 = 0$$

Somme, produit et factorisation

EXERCICE 15 ⋆

Trouver une racine évidente de chacune des équations suivantes, puis en déduire l'autre solution sans calculer le discriminant.

1. $x^2 - 7x + 6 = 0$
2. $-3x^2 + 2x + 5 = 0$
3. $x^2 + 3x - 10 = 0$
4. $x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0$
5. $x^2 + x - 6 = 0$
6. $x^2 + 5x + 4 = 0$
7. $2x^2 + \sqrt{5}x - 15 = 0$
8. $x^2 - 8x + 15 = 0$

EXERCICE 16 ⋆

Écrire sous la forme d'un produit de facteurs les fonctions trinômes f définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = x^2 - 7x + 10$
2. $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$
3. $f(x) = -3x^2 + 4x + 4$
4. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$

EXERCICE 17 ⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 16$.

1. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = 2(x+4)(x-2)$.
2. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = 2(x+1)^2 - 18$.
3. Choisir à chaque fois la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes.

(a) Dresser le tableau de variations de f.

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

(c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -16$.

EXERCICE 18 ⋆⋆

Soit $m \neq 1$ un réel quelconque. On considère l'équation (E) :

$$(E) \ : \ (m-1)x^2 - 2x + 1 - m = 0$$

Démontrer que cette équation possède deux racines x_1 et x_2 de signes opposés.

Signe d'un trinôme et inéquations

EXERCICE 19 ⋆

Dresser le tableau de signes de chacune des fonctions f suivantes, définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = 2(x+2)(x-3)$
2. $f(x) = -2\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2$
3. $f(x) = x^2 + 5$
4. $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$
5. $f(x) = 9x^2 + 24x + 16$
6. $f(x) = 2x^2 - 5x + 6$

EXERCICE 20 ⋆

Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $x^2 - 3x + 2 > 0$
2. $x^2 + 4 \geqslant 0$
3. $x^2 + x - 20 \leqslant 0$
4. $x^2 - x + 1 < 0$
5. $3x^2 + 18x + 27 > 0$
6. $-x^2 - 9 \geqslant 0$
7. $x(x-2) < 0$
8. $x^2 + 7x + 12 \geqslant 0$
9. $-2x^2 - x + 4 > 0$
10. $2x^2 - 24x + 72 \leqslant 0$
11. $x^2 + 4x - 12 < 0$
12. $x^2 - 5x + 7 > 0$

EXERCICE 21 ⋆

On reprend le graphique de l'exercice 7, sur lequel sont tracées les courbes des fonctions f, g et h.

1. Résoudre graphiquement chacune des inéquations suivantes.
   (a) $f(x) > 0$ (b) $h(x) \leqslant 0$ (c) $g(x) < 0$
2. Retrouver ces trois résultats par le calcul, à l'aide d'un tableau de signes.
3. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $h(x) = -2$, puis de $h(x) = -3$.

EXERCICE 22 ⋆⋆

Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $\dfrac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 + x - 2} > 0$
2. $(2x-1)^2 > (x+1)^2$
3. $(x+3)(x-1) < 2x + 6$
4. $\dfrac{x+3}{1-x} \geqslant -5x + 3$

Problèmes du second degré

EXERCICE 23 ⋆

n joueurs participent à un jeu. La règle prévoit que le joueur gagnant reçoit n € de la part de chacun des autres joueurs. Au cours d'une partie, le gagnant a reçu 20 €.

Combien y a-t-il de joueurs ?

EXERCICE 24 ⋆

Trouver deux entiers consécutifs dont le produit est égal à 4 970.

EXERCICE 25 ⋆⋆

Armand décide d'aménager sa piscine, qui a une forme carrée et qui mesure x mètres de côté.

- Il achète une bâche de sécurité, qui recouvre exactement la piscine et coûte 20 € par mètre carré.
- Il installe une clôture faisant le tour complet de la piscine, placée à 2 mètres du bord, et coûtant 100 € par mètre de clôture.
- Il ajoute enfin une échelle de piscine coûtant 150 €.

Il se retrouve à payer un total de 8 155 €. Quelle est la largeur de la piscine ?

Exercices de synthèse

EXERCICE 26 : QCM

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. La recopier sur la copie et la justifier.

Énoncé	**a**	**b**	**c**
1. Le discriminant de $f(x) = 2x^2-3x+1$ vaut :	1	17	-1
2. L'équation $x^2+x+1=0$ admet :	aucune solution	une solution	deux solutions
3. Le sommet de la parabole de $f(x) = (x-2)^2+3$ est le point :	$(2\,;3)$	$(-2\,;3)$	$(2\,;-3)$
4. Si $\Delta = 0$, alors $f(x)$ se factorise sous la forme :	$a(x-x_1)(x-x_2)$	$a(x-x_0)^2$	f n'est pas factorisable
5. Si x_1 et x_2 sont les racines de ax^2+bx+c, alors x_1x_2 vaut :	$-\dfrac{b}{a}$	$\dfrac{c}{a}$	$\dfrac{b}{a}$
6. La fonction $f(x) = -x^2+4$ est positive sur :	$[-2\,;2]$	$]-\infty\,;-2]\cup[2\,;+\infty[$	$\mathbb{R}$
7. La forme canonique de x^2-4x+7 est :	$(x-2)^2+3$	$(x-2)^2+7$	$(x+2)^2+3$
8. Si $a>0$ et $\Delta<0$, alors pour tout réel x, $f(x)$ est :	négatif	positif	de signe variable
9. La somme des racines de $2x^2-10x+3$ vaut :	-5	5	$\dfrac{3}{2}$
10. L'axe de symétrie de la parabole de $f(x) = 3x^2+6x-1$ a pour équation :	$x=-1$	$x=1$	$x=-3$

EXERCICE 27 : VRAI OU FAUX

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Dans tout l'exercice, f désigne une fonction trinôme de paramètres a, b et c, et Δ son discriminant.

1. Une fonction trinôme est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
2. Si $\Delta < 0$, la parabole de f ne coupe pas l'axe des abscisses.
3. Si $a < 0$, la fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.
4. Le sommet de la parabole de f a pour abscisse $-\dfrac{b}{2a}$.
5. Une équation du second degré admet toujours au moins une solution réelle.
6. Si $\Delta > 0$, alors $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines.
7. La forme canonique permet de lire directement les racines de f.
8. Si le produit des racines de f est négatif, alors ces racines sont de signes opposés.
9. Toute fonction trinôme peut s'écrire sous forme factorisée.
10. Pour toute fonction trinôme, on a $f(0) = c$.

EXERCICE 28 ⋆⋆⋆

Soit $ABCD$ un carré de côté 5 cm. Soit E un point appartenant à $[AB]$ et F un point appartenant à $[BC]$ tels que $AE = CF = x$. On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du triangle AEF.

1. À quel intervalle le réel x appartient-il ?
2. Déterminer l'expression de $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x.
3. Pour quelle valeur de x cette aire est-elle maximale ? Quelle est alors cette aire ?
4. Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on $\mathcal{A}(x) = 2{,}75$ cm^2 ?

EXERCICE 29 ⋆⋆⋆

Pour se rendre d'une ville A à une ville B distantes de 195 km, deux cyclistes partent en même temps. L'un d'eux, dont la vitesse moyenne sur le parcours est supérieure de 4 km/h à celle de l'autre, arrive une heure plus tôt.

Quelles sont les vitesses moyennes des deux cyclistes ?