CORRIGÉ – CHAPITRE 2

SUITES

Généralités

EXERCICE 1 ⋆

On applique à chaque fois la relation de récurrence en remplaçant u_n par le terme qui vient d'être calculé.

a) $u_1 = \dfrac{2\times 5}{5+1} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$, puis :

$$\boxed{u_1 = \frac{5}{3} \quad ; \quad u_2 = \frac{5}{4} \quad ; \quad u_3 = \frac{10}{9} \quad ; \quad u_4 = \frac{20}{19}}$$

b) $u_1 = (-1+1)^2 = 0$, puis :

$$\boxed{u_1 = 0 \quad ; \quad u_2 = 1 \quad ; \quad u_3 = 4 \quad ; \quad u_4 = 25}$$

c) $u_1 = \dfrac{2-1}{2} = \dfrac{1}{2}$, puis :

$$\boxed{u_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_2 = -1 \quad ; \quad u_3 = 2 \quad ; \quad u_4 = \frac{1}{2}}$$

On remarque que les termes se répètent de trois en trois.

d) $u_1 = 1 - \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$, puis :

$$\boxed{u_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_2 = \frac{1}{3} \quad ; \quad u_3 = \frac{1}{4} \quad ; \quad u_4 = \frac{1}{5}}$$

e) Attention, la relation dépend aussi de n : $u_1 = 0\times 3 + 4 = 4$, puis $u_2 = 1\times 4 + 4 = 8$:

$$\boxed{u_1 = 4 \quad ; \quad u_2 = 8 \quad ; \quad u_3 = 20 \quad ; \quad u_4 = 64}$$

f) De même, $u_1 = (-1)^2 - 2 = -1$:

$$\boxed{u_1 = -1 \quad ; \quad u_2 = -2 \quad ; \quad u_3 = 0 \quad ; \quad u_4 = -5}$$

EXERCICE 2 ⋆

1. Une suite est définie **par récurrence** lorsque chaque terme se calcule à partir du *terme précédent*, et **de façon explicite** lorsqu'il se calcule directement à partir du *rang*.

   a) Explicite : $u_2 = 3\times 2 - 7 = \boxed{-1}$ et $u_5 = 3\times 5 - 7 = \boxed{8}$

   b) Récurrence : $u_1 = 5$, $u_2 = \boxed{8}$, puis $u_3 = 11$, $u_4 = 14$ et $u_5 = \boxed{17}$

   c) Explicite : $u_2 = \dfrac{4}{3}$ et $u_5 = \dfrac{25}{6}$, soit $\boxed{u_2 = \dfrac{4}{3} \; ; \; u_5 = \dfrac{25}{6}}$

   d) Explicite : $u_2 = (-1)^2 \times 5 = \boxed{5}$ et $u_5 = (-1)^5 \times 11 = \boxed{-11}$

   e) Explicite : $u_2 = \sqrt{6}$ et $u_5 = \sqrt{9} = 3$, soit $\boxed{u_2 = \sqrt{6} \; ; \; u_5 = 3}$

   f) Récurrence : $u_1 = 2$, $u_2 = \boxed{4}$, puis $u_3 = 8$, $u_4 = 16$ et $u_5 = \boxed{32}$

2. Pour les suites définies de façon explicite, il suffit de remplacer n par 100 :

$$\boxed{\text{les suites a), c), d) et e) permettent de calculer directement } u_{100}}$$

Pour les suites b) et f), définies par récurrence, il faudrait calculer les 100 termes précédents : c'est tout l'intérêt d'une formule explicite.

EXERCICE 3 ⋆⋆

a) $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{1}{4}$, $u_3 = \dfrac{1}{8}$, $u_4 = \dfrac{1}{16}$. Les dénominateurs sont les puissances de 2 :

$$\boxed{u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}}$$

Vérification : pour $n = 0$, $\dfrac{1}{2^0} = 1 = u_0$, et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2}u_n$.

b) $u_1 = 6$, $u_2 = 11$, $u_3 = 16$, $u_4 = 21$. On ajoute 5 à chaque étape :

$$\boxed{u_n = 5n + 1}$$

Vérification : $u_0 = 1$, et $u_{n+1} = 5(n+1) + 1 = 5n + 1 + 5 = u_n + 5$.

c) $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{1}{3}$, $u_3 = \dfrac{1}{4}$, $u_4 = \dfrac{1}{5}$:

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n+1}}$$

Vérification : $u_0 = 1$, et :

$$1 - \frac{1}{1+u_n} = 1 - \frac{1}{1+\frac{1}{n+1}} = 1 - \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2} = u_{n+1}$$

EXERCICE 4 ⋆⋆

Pour obtenir u_n en fonction de u_{n-1}, on remplace n par $n-1$ dans la relation ; pour obtenir u_{n+2} en fonction de u_{n+1}, on remplace n par $n+1$. On reporte ensuite l'expression de u_{n+1}.

a) $u_n = 5u_{n-1} - 3$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 3$, d'où :

$$u_{n+2} = 5(5u_n - 3) - 3 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{u_{n+2} = 25u_n - 18}$$

b) $u_n = 4u_{n-1} - (n-4)$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - (n-2)$, d'où :

$$u_{n+2} = 4\big(4u_n - (n-3)\big) - (n-2) = 16u_n - 4n + 12 - n + 2$$

$$\boxed{u_{n+2} = 16u_n - 5n + 14}$$

c) $u_n = nu_{n-1} + 2$ et $u_{n+2} = (n+2)u_{n+1} + 2$, d'où :

$$u_{n+2} = (n+2)\big[(n+1)u_n + 2\big] + 2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{u_{n+2} = (n+1)(n+2)u_n + 2n + 6}$$

d) $u_n = \dfrac{u_{n-1}^2}{2n+1}$ et $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2}{2n+5}$, d'où :

$$u_{n+2} = \frac{1}{2n+5}\left(\frac{u_n^2}{2n+3}\right)^2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{u_{n+2} = \frac{u_n^4}{(2n+3)^2(2n+5)}}$$

EXERCICE 5 ⋆

On étudie le signe de $u_{n+1}-u_n$, ou le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ lorsque les termes sont de signe constant.

a) $u_{n+1}-u_n=(n+1)^2+2(n+1)-n^2-2n=2n+3>0$: croissante

b) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{4}{n+2}-\dfrac{4}{n+1}=\dfrac{4(n+1)-4(n+2)}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{-4}{(n+1)(n+2)}<0$: décroissante

c) $u_{n+1}-u_n=-5^{n+1}+5^n=5^n(1-5)=-4\times 5^n<0$: décroissante

d) Tous les termes sont strictement positifs, et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{2^{n+1}}{n+1}\times\dfrac{n}{2^n}=\dfrac{2n}{n+1}\geqslant 1$ car $2n\geqslant n+1$ pour $n\geqslant 1$: croissante (les deux premiers termes sont égaux, puis la croissance est stricte).

e) On a :

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=\frac{n-2}{2n+3}-\frac{n-3}{2n+1}\\&=\frac{(n-2)(2n+1)-(n-3)(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)}\\&=\frac{7}{(2n+1)(2n+3)}>0\end{aligned}$$

croissante

f) $u_{n+1}-u_n=2(n+1)^2-3(n+1)+1-2n^2+3n-1=4n-1>0$ pour $n\geqslant 1$: croissante

g) $u_n=\dfrac{3^n}{2^{n-1}}=2\left(\dfrac{3}{2}\right)^n>0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{3}{2}>1$: croissante

h) $u_n=\dfrac{n^2+1}{2n^2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n^2}$, donc $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}-\dfrac{1}{n^2}\right)<0$: décroissante

i) Tous les termes sont strictement positifs, et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}\times\frac{2^n}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+1}{n}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}<1$$

décroissante

EXERCICE 6 ⋆⋆

La relation de récurrence donne directement la différence entre deux termes consécutifs.

a) $u_{n+1}-u_n=n^2+1>0$ pour tout n : la suite est croissante

b) $u_{n+1}-u_n=-3n-2<0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$: la suite est décroissante

c) $u_{n+1}-u_n=n-5$, dont le signe change :

$$n-5<0 \text{ si } n\leqslant 4 \quad ; \quad n-5=0 \text{ si } n=5 \quad ; \quad n-5>0 \text{ si } n\geqslant 6$$

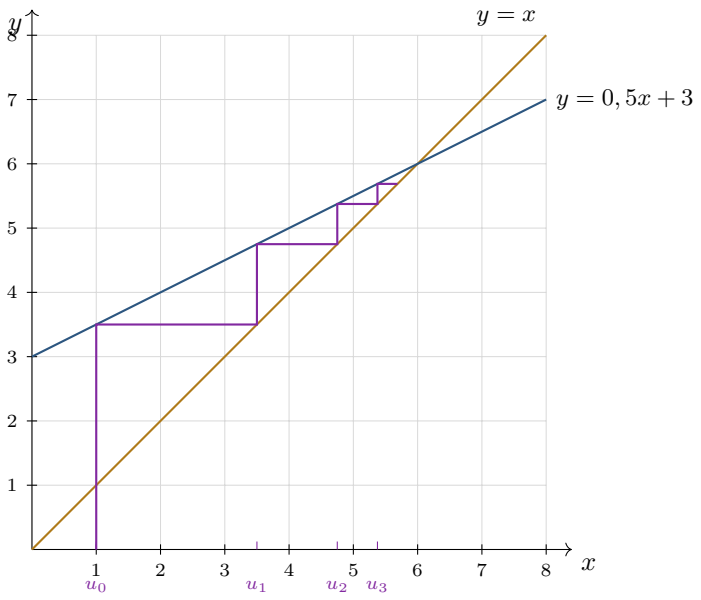
la suite décroît jusqu'au rang 5, puis est croissante à partir du rang 5

d) Tous les termes sont strictement positifs : $v_0=3>0$, et si $v_n>0$ alors $v_{n+1}=0,8\,v_n>0$. On peut donc former le quotient :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=0,8<1 \qquad \text{d'où} \qquad \text{la suite est décroissante}$$

EXERCICE 7 ⋆

1. On part de $u_0 = 1$ sur l'axe des abscisses : on monte verticalement jusqu'à la courbe pour obtenir $u_1 = f(u_0)$, puis on se déplace horizontalement jusqu'à la droite d'équation $y = x$ pour reporter cette valeur sur l'axe des abscisses, et on recommence.



Numériquement : $u_0 = 1$, $u_1 = 3,5$, $u_2 = 4,75$, $u_3 = 5,375$ et $u_4 = 5,6875$.

2. Les termes semblent augmenter : on conjecture que la suite est **croissante**. Pour le démontrer, on introduit la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 6$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = 0,5u_n + 3 - 6 = 0,5(u_n - 6) = 0,5\,v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $0,5$ et de premier terme $v_0 = 1 - 6 = -5$, d'où $v_n = -5 \times 0,5^n$ et $u_n = 6 - 5 \times 0,5^n$. Alors :

$$u_{n+1} - u_n = -5\left(0,5^{n+1} - 0,5^n\right) = -5 \times 0,5^n(0,5 - 1) = 2,5 \times 0,5^n > 0$$

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$$

3. Les termes se rapprochent de l'abscisse du point d'intersection des deux droites, que l'on obtient en résolvant $f(x) = x$:

$$0,5x + 3 = x \iff 3 = 0,5x \iff x = 6$$

$$\boxed{\text{on conjecture que la limite de la suite est } 6}$$

Ce que confirme l'expression $u_n = 6 - 5 \times 0,5^n$, puisque $0,5^n$ devient très petit.

EXERCICE 8 ⋆

1. La variable u contient d'abord $u_0 = 5$, puis la boucle applique 25 fois la relation de récurrence :

$$\boxed{\text{l'algorithme affiche } u_{25}}$$

2. Les premiers termes sont $u_0 = 5$, $u_1 = -1$, $u_2 = 5$, $u_3 = -1$, ... : la suite est périodique, les termes de rang pair valant 5 et ceux de rang impair -1. Comme 25 est impair :

$$\boxed{\text{l'algorithme affiche } -1}$$

3. Il suffit de remplacer 25 par 40 dans la boucle :

```
u ← 5
Pour i allant de 1 à 40
u ← -u + 4
Fin pour
Afficher u
```

L'algorithme affichera alors $u_{40} = 5$, puisque 40 est pair.

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. $u_1 = 2 \times 5 + 1 = \boxed{11}$ et $u_2 = 2 \times 11 + 1 = \boxed{23}$
2. On reprend le principe de l'algorithme précédent, avec 20 répétitions :

```
u ← 5
Pour i allant de 1 à 20
u ← 2*u + 1
Fin pour
Afficher u
```

En Python :

```python
u = 5
for i in range(20):
    u = 2*u + 1
print(u)
```

3. La calculatrice (ou le programme) donne :

$$\boxed{u_{20} = 6\,291\,455}$$

On peut le retrouver en remarquant que la suite $(u_n + 1)$ est géométrique de raison 2 et de premier terme 6, d'où $u_n = 6 \times 2^n - 1$ et $u_{20} = 6 \times 2^{20} - 1$.

EXERCICE 10 ⋆⋆

1. On remplace n par 0, 1, 2, 3 puis 4 :

$$\boxed{u_0 = 8\ ;\ u_1 = 6\ ;\ u_2 = 5,6\ ;\ u_3 = 5 + \frac{3}{7} \approx 5,43\ ;\ u_4 = 5 + \frac{1}{3} \approx 5,33}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{2n+3} - \frac{3}{2n+1} = \frac{3(2n+1) - 3(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{-6}{(2n+1)(2n+3)} < 0$$

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$$

3. Comme $u_n - 5 = \dfrac{3}{2n+1} > 0$, on a $|u_n - 5| = \dfrac{3}{2n+1}$, d'où :

$$\frac{3}{2n+1} \leqslant 0,001 \iff 2n+1 \geqslant 3\,000 \iff n \geqslant 1\,499,5$$

$$\boxed{n_0 = 1\,500}$$

4. Les termes se rapprochent de 5 d'aussi près que l'on veut :

$$\boxed{\text{on conjecture que la limite vaut } 5}$$

5. On augmente le rang tant que l'écart reste supérieur à ε :

```
Saisir eps
n ← 0
Tant que 3/(2n+1) > eps
n ← n + 1
Fin tant que
Afficher n
```

6. Le programme correspondant est :

```
def rang(eps):
    n = 0
    while 3/(2*n+1) > eps:
        n = n + 1
    return n
```

$$\boxed{\texttt{rang(0.001)} \text{ renvoie } 1\,500 \qquad \text{et} \qquad \texttt{rang(10**(-5))} \text{ renvoie } 150\,000}$$

EXERCICE 11 : MÉTHODE DE HÉRON ⋆⋆

1. On applique la relation de récurrence :

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} \quad ; \quad u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{17}{6} = \frac{17}{12}$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12}+\frac{24}{17}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{289+288}{204} = \frac{577}{408}$$

$$\boxed{u_1 = \frac{3}{2} \quad ; \quad u_2 = \frac{17}{12} \quad ; \quad u_3 = \frac{577}{408}}$$

2. On compare les deux écritures décimales :

$$u_3 \approx 1,414216 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{2} \approx 1,414214$$

$$\boxed{\text{les 5 premières décimales sont exactes après trois étapes seulement}}$$

L'écart vaut environ 2×10^{-6} : la méthode double approximativement le nombre de décimales exactes à chaque étape.

3. Il suffit de traduire la relation de récurrence :

```
def heron(n):
    u = 1
    for i in range(n):
        u = (u + 2/u)/2
    return u
```

4. On remplace 2 par le paramètre `a` :

```
def heron(a, n):
    u = 1
    for i in range(n):
        u = (u + a/u)/2
    return u
```

Pour $a = 5$, on obtient `heron(5, 5)` $\approx 2,236068$, alors que $\sqrt{5} \approx 2,2360680$.

5. En comparant les termes successifs à $\sqrt{2}$:

$$|u_3 - \sqrt{2}| \approx 2,1\times10^{-6} \qquad \text{et} \qquad |u_4 - \sqrt{2}| \approx 1,6\times10^{-12}$$

$$\boxed{n = 4}$$

EXERCICE 12 ⋆

Une suite est arithmétique lorsque la différence $u_{n+1} - u_n$ est *constante*.

1. $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 5 - 3n + 5 = 3$: $\boxed{\text{arithmétique, } u_0 = -5 \text{ et } r = 3}$
2. La relation donne $u_{n+1} = \dfrac{3n+1}{2}$, donc $u_n = \dfrac{3n-2}{2}$ pour $n \geqslant 1$, et :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{3n+1}{2} - \frac{3n-2}{2} = \frac{3}{2}$$
$\boxed{\text{arithmétique, } u_1 = \dfrac{1}{2} \text{ et } r = \dfrac{3}{2}}$
3. $u_{n+1} - u_n = (n+1)n - n(n-1) = n\big[(n+1) - (n-1)\big] = 2n$, qui dépend de n : $\boxed{\text{pas arithmétique}}$
4. $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 3 - n^2 + 3 = 2n + 1$, qui dépend de n : $\boxed{\text{pas arithmétique}}$
5. En développant, $u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$, donc $u_{n+1} - u_n = 2$:
$\boxed{\text{arithmétique, } u_0 = 1 \text{ et } r = 2}$
6. En développant, $u_n = 4n^2 - 4n - n^2 - n = 3n^2 - 5n$, donc $u_{n+1} - u_n = 3(2n+1) - 5 = 6n - 2$:
$\boxed{\text{pas arithmétique}}$

EXERCICE 13 ⋆

On applique la formule explicite $u_n = u_0 + nr$, ou $u_n = u_p + (n-p)r$ lorsque le premier terme donné n'est pas u_0.

1. $u_n = 4 - 3n$ d'où $\boxed{u_{15} = 4 - 45 = -41}$
2. $u_n = -2 + 7n$ d'où $\boxed{u_{13} = -2 + 91 = 89}$
3. $u_n = -\sqrt{2} + n\sqrt{2} = (n-1)\sqrt{2}$ d'où $\boxed{u_7 = 6\sqrt{2}}$
4. $u_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{n}{3}$ d'où $\boxed{u_6 = \dfrac{1}{2} - 2 = -\dfrac{3}{2}}$
5. $u_n = u_1 + (n-1) \times 2 = 2n + 3$ d'où $\boxed{u_{20} = 43}$
6. $u_n = u_7 + (n-7) \times (-5) = 39 - 5n$ d'où $\boxed{u_{11} = 39 - 55 = -16}$

EXERCICE 14 ⋆

1. $u_{10} = u_0 + 10r$ donne $31 = 1 + 10r$, soit $\boxed{r = 3}$, puis :
$$u_{2025} = 1 + 3 \times 2025 \quad \text{d'où} \quad \boxed{u_{2025} = 6\,076}$$
2. $u_{100} = u_0 + 100r$ donne $-45 = 5 + 100r$, soit $\boxed{r = -0,5}$, puis :
$$u_{20} = 5 - 0,5 \times 20 \quad \text{d'où} \quad \boxed{u_{20} = -5}$$
3. $u_{40} = u_{17} + 23r$ donne $70 = 24 + 23r$, soit $\boxed{r = 2}$, puis :
$$u_0 = u_{17} - 17r = 24 - 34 \quad \text{d'où} \quad \boxed{u_0 = -10}$$

EXERCICE 15 ⋆

1. $\boxed{u_n = 7 + 4n}$
2. On résout $7 + 4n = 143$, soit $4n = 136$:

$$\boxed{143 = u_{34} \text{ : c'est bien un terme de la suite, de rang 34}}$$

3. On résout $7 + 4n = 200$, soit $4n = 193$. Or 193 n'est pas divisible par 4 :

$$\boxed{200 \text{ n'est pas un terme de la suite}}$$

4. De u_5 à u_{50}, il y a $50 - 5 + 1$ termes :

$$\boxed{46 \text{ termes}}$$

5. On résout $7 + 4n \geqslant 1\,000$, soit $n \geqslant \dfrac{993}{4} = 248,25$:

$$\boxed{n = 249}$$

EXERCICE 16 : SUITE AUXILIAIRE ⋆

1. $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3}$, puis :

$$\boxed{u_1 = \frac{1}{2} \ ; \ u_2 = \frac{1}{3} \ ; \ u_3 = \frac{1}{4} \ ; \ u_4 = \frac{1}{5}}$$

2. En prenant les inverses :

$$\boxed{v_0 = 1 \ ; \ v_1 = 2 \ ; \ v_2 = 3 \ ; \ v_3 = 4 \ ; \ v_4 = 5}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ (les termes u_n étant non nuls) :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_n + 1}{u_n} = 1 + \frac{1}{u_n} = v_n + 1$$

$$\boxed{(v_n) \text{ est arithmétique de raison 1}}$$

4. Comme $v_0 = 1$: $\boxed{v_n = 1 + n}$
5. Enfin $u_n = \dfrac{1}{v_n}$:

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n+1}}$$

EXERCICE 17 ⋆

Une suite est géométrique lorsque le quotient $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ est *constant*.

1. $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{5^{n+4}}{5^{n+3}} = 5$: $\boxed{\text{géométrique, } v_0 = 125 \text{ et } q = 5}$
2. $v_{n+1} - v_n = \dfrac{2}{3}$: la suite est arithmétique, mais le quotient $\dfrac{2n+5}{2n+3}$ n'est pas constant : $\boxed{\text{pas géométrique}}$
3. $v_0 = 1$, $v_1 = 6$ et $v_2 = 15$, or $\dfrac{6}{1} \neq \dfrac{15}{6}$: $\boxed{\text{pas géométrique}}$

4. La relation s'écrit $v_{n+1} = \dfrac{2v_n + 1}{5}$: la présence du $+1$ empêche le quotient d'être constant. En effet $v_1 = -\dfrac{1}{5}$ et $v_2 = \dfrac{3}{25}$, or $\dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{1}{5}$ et $\dfrac{v_2}{v_1} = -\dfrac{3}{5}$: $\boxed{\text{pas géométrique}}$

5. La relation s'écrit $v_{n+1} = \dfrac{2}{5}v_n$: $\boxed{\text{géométrique, } v_0 = -1 \text{ et } q = \dfrac{2}{5}}$

6. On factorise par $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$:

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right] = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\boxed{\text{géométrique, } v_0 = -\dfrac{3}{2} \text{ et } q = \dfrac{1}{2}}$

EXERCICE 18 ⋆

On applique la formule explicite $u_n = u_0 \times q^n$, ou $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

a) $u_n = 4 \times (-2)^n$ d'où $\boxed{u_8 = 4 \times 256 = 1\,024}$

b) $u_n = -2 \times 5^n$ d'où $\boxed{u_6 = -2 \times 15\,625 = -31\,250}$

c) $u_n = -\sqrt{2} \times \left(\sqrt{2}\right)^n = -\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}$ d'où $\boxed{u_7 = -\left(\sqrt{2}\right)^8 = -16}$

d) $u_n = \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ d'où $\boxed{u_6 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{729} = \dfrac{1}{1\,458}}$

e) $u_n = 5 \times 2^{n-1}$ d'où $\boxed{u_{20} = 5 \times 2^{19} = 2\,621\,440}$

f) $u_n = 4 \times (-5)^{n-7}$ d'où $\boxed{u_{11} = 4 \times (-5)^4 = 2\,500}$

EXERCICE 19 ⋆

1. De $v_7 = v_5 \times q^2$, on tire $q^2 = \dfrac{256}{64} = 4$, et comme $q > 0$: $\boxed{q = 2}$. Alors :

$$v_{10} = v_7 \times q^3 = 256 \times 8 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_{10} = 2\,048}$$

2. De même $q^2 = \dfrac{4\,374}{486} = 9$, et comme $q > 0$: $\boxed{q = 3}$. Alors :

$$v_0 = \frac{v_5}{q^5} = \frac{486}{243} = \boxed{2} \qquad \text{et} \qquad v_{10} = v_0 \times 3^{10} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_{10} = 118\,098}$$

EXERCICE 20 ⋆⋆

1. En écrivant $u_{n+1} = u_n q$ et $u_{n+2} = u_n q^2$, la relation devient :

$$u_n q^2 = u_n q + u_n$$

Les termes étant non nuls, on peut diviser par u_n :

$$q^2 = q + 1 \iff q^2 - q - 1 = 0$$

Le discriminant vaut $\Delta = 1 + 4 = 5$, d'où les solutions $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Comme $q > 0$:

$$\boxed{q = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

On reconnaît le *nombre d'or*.

2. (a) Les termes sont tous négatifs, donc le quotient de deux termes consécutifs est positif : la raison est positive. De plus la suite est croissante, donc les termes se rapprochent de 0 en valeur absolue :

$$\boxed{0 < q < 1}$$

(b) Comme $v_1 \times v_3 = v_1 \times v_1 q^2 = (v_1 q)^2 = v_2^2$, on a $v_2^2 = \dfrac{4}{9}$, et comme les termes sont négatifs : $v_2 = -\dfrac{2}{3}$. Alors :

$$v_1 + v_3 = -\frac{19}{9} + \frac{2}{3} = -\frac{13}{9} \qquad \text{et} \qquad v_1 \times v_3 = \frac{4}{9}$$

Les nombres v_1 et v_3 sont donc les solutions de $9X^2 + 13X + 4 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 169 - 144 = 25$: ce sont -1 et $-\dfrac{4}{9}$. La suite étant croissante :

$$\boxed{v_1 = -1 \quad ; \quad v_2 = -\frac{2}{3} \quad ; \quad v_3 = -\frac{4}{9}}$$

(c) La raison vaut $q = \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{2}{3}$, d'où :

$$\boxed{v_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$$

EXERCICE 21 : SUITE AUXILIAIRE ⋆

1. $\boxed{u_0 = 2 \; ; \; u_1 = 9 \; ; \; u_2 = 23 \; ; \; u_3 = 51}$
2. En ajoutant 5 à chaque terme : $\boxed{v_0 = 7 \; ; \; v_1 = 14 \; ; \; v_2 = 28 \; ; \; v_3 = 56}$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 5 = 2u_n + 5 + 5 = 2u_n + 10 = 2\,(u_n + 5) = 2v_n$$

$$\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison 2 et de premier terme } v_0 = 7}$$

4. On en déduit $v_n = 7 \times 2^n$, puis $u_n = v_n - 5$:

$$\boxed{v_n = 7 \times 2^n \qquad \text{et} \qquad u_n = 7 \times 2^n - 5}$$

EXERCICE 22 ⋆

1. Armand dépense le quart de 40 €, il lui reste donc 30 €, auxquels s'ajoutent les 25 € retirés le soir :

$$\boxed{55 \text{ € le 2 janvier au matin}}$$

2. En répétant le procédé :

$$\boxed{u_1 = 55 \; ; \; u_2 = 66,25 \; ; \; u_3 = 74,687\,5}$$

3. Les différences successives valent $15\,;\, 11,25\,;\, 8,437\,5$: elles ne sont pas constantes. Les quotients valent $1,375\,;\, 1,204\ldots$: ils ne le sont pas non plus.

$$\boxed{\text{la suite n'est ni arithmétique ni géométrique}}$$

4. Dépenser le quart de u_n revient à en conserver les trois quarts, puis Armand ajoute 25 € :

$$\boxed{u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 25}$$

5. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 100 = \frac{3}{4}u_n + 25 - 100 = \frac{3}{4}u_n - 75 = \frac{3}{4}(u_n - 100) = \frac{3}{4}v_n$$

$$\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{3}{4}}$$

(b) Son premier terme vaut $v_0 = 40 - 100 = -60$, d'où :

$$\boxed{v_n = -60\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

(c) Comme $u_n = v_n + 100$:

$$\boxed{u_n = 100 - 60\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

(d) Le 15 janvier au matin correspond à $n = 14$:

$$u_{14} = 100 - 60\left(\frac{3}{4}\right)^{14} \approx 100 - 1,07$$

$$\boxed{u_{14} \approx 98,93 \text{ €}}$$

On constate que la somme se rapproche de 100 € : c'est la valeur vers laquelle tend la suite.

EXERCICE 23 ⋆⋆

1. Augmenter de 3 % revient à multiplier par $1,03$:

$$\boxed{L_1 = 2\,060 \ ; \ L_2 = 2\,121,80 \ ; \ M_1 = 2\,070 \ ; \ M_2 = 2\,140}$$

2. Chaque année, la somme de Léa est multipliée par $1,03$, tandis que celle de Marc augmente de 70 € :

$$\boxed{L_{n+1} = 1,03\,L_n \ : \text{ géométrique de raison } 1,03}$$

$$\boxed{M_{n+1} = M_n + 70 \ : \text{ arithmétique de raison } 70}$$

3. Avec $L_0 = M_0 = 2\,000$:

$$\boxed{L_n = 2\,000 \times 1,03^n \qquad \text{et} \qquad M_n = 2\,000 + 70n}$$

4. Le 1er janvier 2035 correspond à $n = 10$:

$$L_{10} = 2\,000 \times 1,03^{10} \approx 2\,687,83 \qquad \text{et} \qquad M_{10} = 2\,700$$

$$\boxed{\text{Léa possédera } 2\,687,83 \text{ € et Marc } 2\,700 \text{ €}}$$

C'est encore Marc qui possède le plus d'argent.

5. À la calculatrice, on compare les deux suites :

$$L_{11} \approx 2\,768,47 < M_{11} = 2\,770 \qquad \text{et} \qquad L_{12} \approx 2\,851,52 > M_{12} = 2\,840$$

$$\boxed{\text{à partir du 1er janvier 2037, Léa possède davantage que Marc}}$$

Une évolution géométrique finit toujours par dépasser une évolution arithmétique, même si cela demande du temps.

EXERCICE 24 ⋆

Pour une somme arithmétique, on utilise :

$$\text{Somme des termes} = \text{Nombre de termes} \times \frac{\text{Somme des termes extrêmes}}{2}$$

et pour une somme géométrique :

$$\text{Somme des termes} = \text{Premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{Nombre de termes}}}{1 - q}$$

a) $S = \dfrac{15 \times 16}{2}$ d'où $\boxed{S = 120}$

b) Les termes vont de 7 à 29, il y en a $29 - 7 + 1 = 23$:

$$S = 23 \times \frac{7 + 29}{2} = 23 \times 18 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{S = 414}$$

c) Les termes vont de -14 à 5, il y en a $5 - (-14) + 1 = 20$:

$$S = 20 \times \frac{-14 + 5}{2} = 20 \times (-4,5) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{S = -90}$$

d) Suite arithmétique de raison 3, de 3 à 33 : il y a $\dfrac{33 - 3}{3} + 1 = 11$ termes.

$$S = 11 \times \frac{3 + 33}{2} = 11 \times 18 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{S = 198}$$

e) Suite arithmétique de raison 2, de -1 à 39 : il y a $\dfrac{39 - (-1)}{2} + 1 = 21$ termes.

$$S = 21 \times \frac{-1 + 39}{2} = 21 \times 19 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{S = 399}$$

f) Suite arithmétique de raison -3, de 4 à -86 : il y a $\dfrac{4 - (-86)}{3} + 1 = 31$ termes.

$$S = 31 \times \frac{4 - 86}{2} = 31 \times (-41) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{S = -1\,271}$$

g) Somme géométrique de raison 2 : $S = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^8$, soit 9 termes.

$$S = \frac{1 - 2^9}{1 - 2} = 2^9 - 1 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{S = 511}$$

h) Somme géométrique de raison -2, de 1 à $(-2)^{11} = -2\,048$, soit 12 termes.

$$S = \frac{1 - (-2)^{12}}{1 - (-2)} = \frac{1 - 4\,096}{3} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{S = -1\,365}$$

i) Somme géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$, de 1 à $\dfrac{1}{2\,187} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^7$, soit 8 termes.

$$S = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^8}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \times \frac{6\,560}{6\,561} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{S = \frac{3\,280}{2\,187} \approx 1,4998}$$

j) Somme géométrique de premier terme 10 et de raison -2, de 10 à $10 \times (-2)^9 = -5\,120$, soit 10 termes.

$$S = 10 \times \frac{1 - (-2)^{10}}{1 - (-2)} = 10 \times \frac{1 - 1\,024}{3} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{S = -3\,410}$$

k) Somme géométrique de premier terme 3 et de raison $\dfrac{1}{2}$, de 3 à $3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{3}{32}$, soit 6 termes.

$$S = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} = 6 \times \frac{63}{64} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{S = \frac{189}{32} = 5,906\,25}$$

l) Somme géométrique de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison 4, de $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{2} \times 4^6 = 2\,048$, soit 7 termes.

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{1-4^7}{1-4} = \frac{1}{2} \times \frac{16\,383}{3} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{S = 2\,730,5}$$

EXERCICE 25 ⋆⋆

1. (a) De $u_{17} = u_1 + 16r$, on tire $105 = u_1 + 32$, soit $\boxed{u_1 = 73}$. Alors :

$$S_{17} = 17 \times \frac{u_1 + u_{17}}{2} = 17 \times \frac{73 + 105}{2} = 17 \times 89 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{S_{17} = 1\,513}$$

(b) Comme $S_{33} = 33 \times \frac{u_1 + u_{33}}{2} = 0$, on a $u_1 + u_{33} = 0$. Or $u_{33} = u_1 + 32 \times (-7) = u_1 - 224$, donc :

$$u_1 + u_1 - 224 = 0 \iff u_1 = 112 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u_1 = 112 \quad \text{et} \quad u_{33} = -112}$$

(c) Le premier terme s'écrit $u_1 = u_n - (n-1)r = 14 - 7(n-1) = 21 - 7n$, d'où :

$$S_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2} = \frac{n(35-7n)}{2} = -1\,176$$

$$\iff 7n^2 - 35n - 2\,352 = 0 \iff n^2 - 5n - 336 = 0$$

Le discriminant vaut $\Delta = 25 + 1\,344 = 1\,369 = 37^2$, d'où $n = \frac{5+37}{2} = 21$ (la solution négative étant exclue) :

$$\boxed{n = 21 \quad \text{et} \quad u_1 = 21 - 147 = -126}$$

2. (a) De $v_{13} = v_{10} \times q^3$, on tire $q^3 = \frac{200}{25} = 8$, soit $\boxed{q = 2}$, puis :

$$v_0 = \frac{v_{10}}{2^{10}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_0 = \frac{25}{1\,024}}$$

(b) Les termes v_{10}, v_{12}, …, v_{20} forment une suite géométrique de raison $q^2 = 4$, de premier terme 25, et il y en a 6 :

$$S = 25 \times \frac{1-4^6}{1-4} = 25 \times \frac{4\,095}{3} = 25 \times 1\,365 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{S = 34\,125}$$

EXERCICE 26 ⋆⋆

1. Les premiers termes valent $w_0 = 3$, $w_1 = 2$, $w_2 = 2$ et $w_3 = 4$. Les différences successives valent -1 puis 0 : la suite n'est pas arithmétique. Les quotients valent $\frac{2}{3}$ puis 1 : elle n'est pas géométrique non plus.

$$\boxed{(w_n) \text{ n'est ni arithmétique ni géométrique}}$$

2. (a) $u_{n+1} - u_n = -2(n+1) + 2 - (-2n+2) = -2$:

$$\boxed{\text{arithmétique de raison } -2, \text{ avec } u_0 = 2}$$

(b) $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$: $\boxed{\text{géométrique de raison 2, avec } v_0 = 1}$

3. On remarque que $w_n = v_n + u_n$: on peut donc séparer la somme en deux.

$$S = \underbrace{\left(2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{10}\right)}_{\text{géométrique}} + \underbrace{\left(u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}\right)}_{\text{arithmétique}}$$

La première somme comporte 11 termes et vaut $\dfrac{1-2^{11}}{1-2} = 2\,047$. La seconde comporte également 11 termes, de $u_0 = 2$ à $u_{10} = -18$, et vaut $11 \times \dfrac{2-18}{2} = -88$.

$$\boxed{S = 2\,047 - 88 = 1\,959}$$

EXERCICE 27 ⋆⋆

Partie A.

1. Le nombre de places par rang forme une suite arithmétique de premier terme 18 et de raison 3. Le 25e rang correspond à 24 ajouts de la raison :

$$18 + 24 \times 3 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{90 \text{ places}}$$

2. La salle compte 25 rangs :

$$S = 25 \times \frac{18+90}{2} = 25 \times 54 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{1\,350 \text{ places}}$$

3. Avec n rangs, le dernier en compte $18 + 3(n-1)$, et le total vaut :

$$S_n = n \times \frac{18 + 18 + 3(n-1)}{2} = \frac{n(3n+33)}{2}$$

On cherche le plus petit entier n tel que $S_n > 1\,500$. On calcule :

$$S_{26} = \frac{26 \times 111}{2} = 1\,443 \qquad \text{et} \qquad S_{27} = \frac{27 \times 114}{2} = 1\,539$$

$$\boxed{\text{il faut au minimum 27 rangs}}$$

Partie B.

1. À chaque rebond, la hauteur est multipliée par $\dfrac{3}{4}$:

$$h_1 = 2 \times \frac{3}{4} = 1,5 \qquad \text{et} \qquad h_2 = 1,5 \times \frac{3}{4} = 1,125$$

$$\boxed{(h_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{3}{4}}$$

2. Comme la hauteur initiale est 2 mètres :

$$\boxed{h_n = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

3. Pour $n = 10$:

$$h_{10} = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \approx 0,112\,6 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{h_{10} \approx 11 \text{ cm}}$$

4. Il s'agit d'une somme géométrique de premier terme $h_1 = 1,5$, de raison $\dfrac{3}{4}$ et de 10 termes :

$$h_1 + \cdots + h_{10} = 1,5 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}}{1 - \frac{3}{4}} = 6 \times \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right)$$

$$\boxed{h_1 + \cdots + h_{10} \approx 5,66 \text{ mètres}}$$

Ce nombre représente la somme des hauteurs atteintes lors des dix premiers rebonds.

EXERCICE 28 : SOMME DES n PREMIERS ENTIERS CARRÉS ⋆⋆

1. $\boxed{u_1 = 1 \quad ; \quad u_2 = 1 + 4 = 5 \quad ; \quad u_3 = 5 + 9 = 14}$

2. Pour passer de u_n à u_{n+1}, on ajoute le carré suivant :

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + (n+1)^2}$$

3. (a) $v_1 = \dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1 = u_1$: $\boxed{u_1 = v_1}$

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)\big[(n+2)(2n+3) - n(2n+1)\big]}{6} \\ &= \frac{(n+1)\left[2n^2 + 7n + 6 - 2n^2 - n\right]}{6} = \frac{(n+1)(6n+6)}{6} = (n+1)^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{v_{n+1} = v_n + (n+1)^2}$$

   La suite (v_n) vérifie donc la même relation de récurrence que (u_n).

   (c) Les deux suites ont le même premier terme et la même relation de récurrence : elles calculent donc exactement les mêmes termes.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

EXERCICE 29 : VERS LA TERMINALE ⋆⋆⋆

1. $u_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{0+12} = \dfrac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$, puis :

$$u_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3+12} = \frac{\sqrt{15}}{2} \qquad ; \qquad u_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{4} + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{63}{4}} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$$

$$\boxed{u_1 = \sqrt{3} \approx 1,73\ ;\ u_2 = \frac{\sqrt{15}}{2} \approx 1,94\ ;\ u_3 = \frac{3\sqrt{7}}{4} \approx 1,98}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en élevant la relation de récurrence au carré :

$$\begin{aligned} v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 4 &= \frac{1}{4}\left(u_n^2 + 12\right) - 4 \\ &= \frac{1}{4}u_n^2 + 3 - 4 = \frac{1}{4}u_n^2 - 1 = \frac{1}{4}\left(u_n^2 - 4\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n \ :\ (v_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{4}}$$

3. Son premier terme vaut $v_0 = u_0^2 - 4 = -4$, d'où :

$$\boxed{v_n = -4\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

4. Comme $u_n^2 = v_n + 4$:

$$u_n^2 = 4 - 4\left(\frac{1}{4}\right)^n = 4\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

   La suite étant positive, on prend la racine carrée :

$$\boxed{u_n = 2\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}}$$

5. Lorsque n grandit, $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ devient très petit, et le contenu de la racine se rapproche de 1 :

$$\boxed{\text{on conjecture que } u_n \text{ se rapproche de } 2}$$

EXERCICE 30 : CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE ⋆⋆⋆

1. Le triangle OA_0A_1 est rectangle en A_1, et l'angle en O mesure $\frac{\pi}{3}$. La trigonométrie dans ce triangle rectangle donne :

$$OA_1 = OA_0 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{OA_0}{2} \qquad \text{et} \qquad A_0A_1 = OA_0 \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}OA_0$$

Le même raisonnement s'applique à chaque triangle $OA_{n-1}A_n$, rectangle en A_n :

$$OA_n = \frac{OA_{n-1}}{2} \qquad \text{et} \qquad v_n = A_{n-1}A_n = \frac{\sqrt{3}}{2}OA_{n-1}$$

Les longueurs OA_n étant divisées par 2 à chaque étape, il en va de même des v_n :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{OA_n}{OA_{n-1}} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{2}, \text{ avec } v_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}}$$

2. La suite (u_n) est la somme des n premiers termes de (v_n) :

$$u_n = v_1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2\sqrt{3} \times 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$\boxed{u_n = 4\sqrt{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}$$

3. Lorsque n grandit, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ devient très petit :

$$\boxed{\text{on conjecture que } u_n \text{ se rapproche de } 4\sqrt{3} \approx 6,93}$$

La ligne brisée rouge, bien qu'elle comporte une infinité de segments, a donc une longueur totale finie.