EXERCICES – CHAPITRE 2

SUITES

Généralités

EXERCICE 1 ⋆

Pour les suites suivantes, calculer les termes de u_1 à u_4 :

a) $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n+1} \\ u_0 = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_{n+1} = (u_n+1)^2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n-1}{u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{1+u_n} \\ u_0 = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_{n+1} = nu_n + 4 \\ u_0 = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 - (n+2) \\ u_0 = -1 \end{cases}$

EXERCICE 2 ⋆

Les suites suivantes sont définies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Préciser dans chaque cas si la suite est définie **par récurrence** ou **de façon explicite**, puis calculer u_2 et u_5 :

   a) $u_n = 3n - 7$

   b) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3 \\ u_0 = 2 \end{cases}$

   c) $u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

   d) $u_n = (-1)^n(2n+1)$

   e) $u_n = \sqrt{n+4}$

   f) $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n \\ u_0 = 1 \end{cases}$

2. Pour lesquelles de ces suites peut-on calculer u_{100} sans calculer aucun autre terme ? Justifier.

EXERCICE 3 ⋆⋆

Pour chacune des suites suivantes, calculer les termes de u_1 à u_4, puis **conjecturer une formule explicite** pour u_n. On vérifiera ensuite avec la formule conjecturée la valeur de u_0, puis la relation entre u_{n+1} et u_n :

a) $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \\ u_0 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 5 \\ u_0 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{1+u_n} \\ u_0 = 1 \end{cases}$

EXERCICE 4 ⋆⋆

On considère les suites suivantes définies pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) $\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n - 3 \\ u_0 = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - (n-3) \\ u_0 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_{n+1} = (n+1)u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2n+3} \\ u_0 = -1 \end{cases}$

1. Pour chacune de ces suites, exprimer u_n en fonction de u_{n-1} pour tout $n \geqslant 1$, puis u_{n+2} en fonction de u_{n+1} pour tout entier n.
2. En déduire pour chacune de ces suites l'expression de u_{n+2} en fonction de u_n et de n.

EXERCICE 5 ⋆

Pour chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivantes, déterminer le sens de variation :

a) $u_n = n^2 + 2n$

b) $u_n = \dfrac{4}{n+1}$

c) $u_n = -5^n$

d) $u_n = \dfrac{2^n}{n}$

e) $u_n = \dfrac{n-3}{2n+1}$

f) $u_n = 2n^2 - 3n + 1$

g) $u_n = \dfrac{3^n}{2^{n-1}}$

h) $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2}$

i) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$

EXERCICE 6 ⋆⋆

Les suites suivantes sont définies pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le sens de variation de chacune d'elles en étudiant directement le signe de $u_{n+1} - u_n$, sans chercher de formule explicite :

a) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + n^2 + 1 \\ u_0 = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 3n - 2 \\ u_0 = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + n - 5 \\ u_0 = 4 \end{cases}$

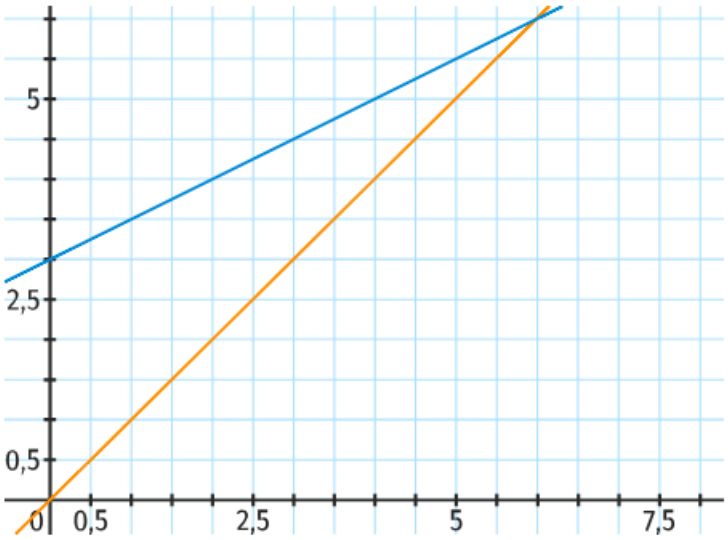
d) $\begin{cases} v_{n+1} = 0,8\, v_n \\ v_0 = 3 \end{cases}$

Pour la suite c), on précisera à partir de quel rang la suite est croissante. Pour la suite d), on pourra étudier le quotient $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ après avoir justifié que tous les termes sont strictement positifs.

EXERCICE 7 ⋆

Dans un repère orthonormé, on a représenté la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,5x + 3$ et la droite d'équation $y = x$. On définit par ailleurs pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 1 \end{cases}$$



1. Reproduire la figure et représenter les cinq premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.
2. Conjecturer le sens de variation de la suite, puis le démontrer.
3. Les termes de la suite semblent se rapprocher de plus en plus d'une certaine valeur, qu'on nommera **limite**. Quelle valeur peut-on conjecturer pour limite ?

EXERCICE 8 ⋆

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 4 \\ u_0 = 5 \end{cases}$$

On considère l'algorithme suivant :

```
u ← 5
Pour i allant de 1 à 25
  u ← -u + 4
Fin pour
Afficher u
```

1. Que permet d'afficher cet algorithme ?
2. Quelle valeur affiche l'algorithme ?
3. Modifier l'algorithme pour qu'il affiche la valeur de u_{40}.

EXERCICE 9 ⋆⋆

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 1 \\ u_0 = 5 \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Écrire un algorithme permettant de calculer u_{20}.
3. Utiliser la calculatrice pour calculer u_{20}.

EXERCICE 10 ⋆⋆

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite définie par :

$$u_n = 5 + \frac{3}{2n+1}$$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer par le calcul le plus petit entier n_0 tel que :
$$|u_n - 5| \leqslant 0,001$$
4. Conjecturer la limite de la suite.
5. Écrire un algorithme permettant de trouver le rang n_0 à partir duquel $|u_n - 5| \leqslant \varepsilon$ pour un ε donné par l'utilisateur.
6. Programmer cet algorithme en Python et le tester pour $\varepsilon = 0,001$ et $\varepsilon = 10^{-5}$.

EXERCICE 11 : MÉTHODE DE HÉRON ⋆⋆

On reprend la méthode présentée en introduction du cours : pour approcher $\sqrt{a}$, on remplace à chaque étape la longueur x par la moyenne de x et de $\frac{a}{x}$. Pour $a = 2$, cela conduit à la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 sous forme de fractions irréductibles.
2. Donner une valeur approchée de u_3 à 10^{-6} près, puis la comparer à celle de $\sqrt{2}$. Combien de décimales exactes obtient-on en trois étapes seulement ?
3. Recopier et compléter la fonction Python suivante, qui renvoie le terme u_n :

```
def heron(n):
    u = 1
    for i in range(n):
        u = ...
    return u
```

4. Modifier cette fonction pour qu'elle prenne le nombre a en argument et approche $\sqrt{a}$. La tester avec $a = 5$.
5. À l'aide de la calculatrice ou de Python, déterminer le plus petit rang n tel que :

$$|u_n - \sqrt{2}| \leqslant 10^{-9}$$

Suites particulières

EXERCICE 12 ⋆

Pour chacune des suites (u_n) suivantes, déterminer si elle est arithmétique, et si oui préciser son premier terme et sa raison :

1. $u_n = 3n - 5$
2. $u_{n+1} = \dfrac{3n+1}{2}$
3. $u_n = n^2 - n$
4. $u_n = n^2 - 3$
5. $u_n = (n+1)^2 - n^2$
6. $u_n = 4n(n-1) - n(n+1)$

EXERCICE 13 ⋆

Pour chacune des suites arithmétiques suivantes, donner la formule explicite et calculer le terme demandé :

1. $u_0 = 4$ et $r = -3$
   Calculer u_{15}
2. $u_0 = -2$ et $r = 7$
   Calculer u_{13}
3. $u_0 = -\sqrt{2}$ et $r = \sqrt{2}$
   Calculer u_7
4. $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $r = -\dfrac{1}{3}$
   Calculer u_6
5. $u_1 = 5$ et $r = 2$
   Calculer u_{20}
6. $u_7 = 4$ et $r = -5$
   Calculer u_{11}

EXERCICE 14 ⋆

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

1. $u_0 = 1$ et $u_{10} = 31$. Déterminer r puis calculer u_{2025}.
2. $u_0 = 5$ et $u_{100} = -45$. Déterminer r puis calculer u_{20}.
3. $u_{17} = 24$ et $u_{40} = 70 =$. Déterminer r puis calculer u_0.

EXERCICE 15 ⋆

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $r = 4$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Le nombre 143 est-il un terme de la suite ? Si oui, préciser son rang.

3. Le nombre 200 est-il un terme de la suite ? Justifier.
4. Combien la liste u_5, u_6, …, u_{50} comporte-t-elle de termes ?
5. Déterminer le plus petit rang n tel que $u_n \geqslant 1000$.

EXERCICE 16 : SUITE AUXILIAIRE ⋆

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3 et v_4.
3. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
4. Déterminer v_n en fonction de n.
5. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

EXERCICE 17 ⋆

Pour chacune des suites (v_n) suivantes, déterminer si elle est géométrique, et si oui préciser son premier terme et sa raison :

1. $v_n = 5^{n+3}$
2. $v_n = \dfrac{2n+3}{3}$
3. $v_n = 3^n + 3n$
4. $v_0 = -1 =$ et $5v_{n+1} - 2v_n = 1$
5. $v_0 = -1 =$ et $5v_{n+1} - 2v_n = 0$
6. $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

EXERCICE 18 ⋆

Pour chacune des suites géométriques suivantes, donner l'expression explicite et calculer le terme demandé :

a) $u_0 = 4$ et $r = -2$
Calculer u_8

b) $u_0 = -2$ et $r = 5$
Calculer u_6

c) $u_0 = -\sqrt{2}$ et $r = \sqrt{2}$
Calculer u_7

d) $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $r = -\dfrac{1}{3}$
Calculer u_6

e) $u_1 = 5$ et $r = 2$
Calculer u_{20}

f) $u_7 = 4$ et $r = -5$
Calculer u_{11}

EXERCICE 19 ⋆

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q.

1. $v_5 = 64$, $v_7 = 256$, $q > 0$. Déterminer q puis calculer v_{10}.
2. $v_5 = 486$, $v_7 = 4374$, $q > 0$. Déterminer q puis calculer v_0 et v_{10}.

EXERCICE 20 ⋆⋆

1. Soit (u_n) une suite géométrique de termes non nuls et de raison $q > 0$ telle que :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Déterminer q.

2. Soit (v_n) une suite géométrique croissante dont les termes sont négatifs. Son premier terme est v_1.
   (a) Que peut-on dire de sa raison ?

(b) On sait que $v_1 \times v_3 = \dfrac{4}{9}$ et $v_1 + v_2 + v_3 = -\dfrac{19}{9}$.
Calculer v_1, v_2 et v_3.

(c) Exprimer v_n en fonction de n.

EXERCICE 21 : SUITE AUXILIAIRE ⋆

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 5$.

1. Calculer les 4 premiers termes de la suite.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n + 5$.
Calculer les 4 premiers termes de la suuite v_n.
3. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
4. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n.

EXERCICE 22 ⋆

Armand a 40€ dans son porte-monnaie le 1er Janvier 2024 au matin. Tous les jours, il dépense un quart de ce qu'il a dans son porte-monnaie et retire 25€ le soir au distributeur pour le mettre dans son porte-monnaie. On note u_n la somme qu'il aura dans son porte monnaie n jours après le 1er Janvier, au matin. On a $u_0 = 40$.

1. Combien y aura-t-il dans son porte-monnaie le 2 Janvier au matin ?
2. Donner la valeur de u_1, u_2 et u_3.
3. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
4. Justifier que pour tout entier naturel n, on a :
$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 25$$
5. Soit v_n la suite définie pour tout n entier naturel par :
$$v_n = u_n - 100$$
(a) Démontrer que v_n est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$.
(b) En déduire une expression de v_n en fonction de n.
(c) En déduire une expression de u_n en fonction de n.
(d) Calculer la somme qu'aura Armand dans son porte-monnaie le 15 Janvier au matin.

EXERCICE 23 ⋆⋆

Le 1er janvier 2025, Léa et Marc disposent chacun de 2 000 €.

— Léa place la totalité de cette somme sur un compte rémunéré à 3 % par an.
— Marc conserve son argent chez lui, et y ajoute 70 € chaque 1er janvier.

On note L_n et M_n les sommes possédées par Léa et par Marc le 1er janvier de l'année $2025 + n$. On a donc $L_0 = M_0 = 2\,000$.

1. Calculer L_1, L_2, M_1 et M_2.
2. Exprimer L_{n+1} en fonction de L_n, puis M_{n+1} en fonction de M_n. Préciser la nature de chacune des deux suites, ainsi que leur raison.
3. En déduire l'expression de L_n et de M_n en fonction de n.
4. Quelle somme chacun possédera-t-il le 1er janvier 2035 ? Arrondir au centime.
5. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle année Léa possédera davantage d'argent que Marc.

EXERCICE 24 ⋆

Calculer à l'aide des formules de sommation chacune des sommes suivantes :

a) $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 15$

b) $S = 7 + 8 + 9 + \cdots + 29$

c) $S = -14 - 13 - 12 - \cdots + 5$

d) $S = 3 + 6 + 9 + \cdots + 33$

e) $S = -1 + 1 + 3 + 5 + \cdots + 39$

f) $S = 4 + 1 - 2 - 5 - \cdots - 86$

g) $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 256$

h) $S = 1 - 2 + 4 - 8 + \cdots + 1024 - 2048$

i) $S = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{27} + \cdots + \dfrac{1}{2187}$

j) $S = 10 - 20 + 40 - 80 + \cdots - 5120$

k) $S = 3 + \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{4} + \cdots + \dfrac{3}{32}$

l) $S = \dfrac{1}{2} + 2 + 8 + \cdots + 2048$

EXERCICE 25 ⋆⋆

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, de premier terme u_1 et de n-ième terme u_n. On note $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Les question sont indépendantes les unes des autres :
   (a) Calculer u_1 et S_{17} lorsque : $u_{17} = 105$ et $r = 2$.
   (b) Calculer u_1 et u_{33} lorsque : $r = -7$ et $S_{33} = 0$.
   (c) Calculer n et u_1 lorsque : $u_n = 14$, $r = 7$ et $S_n = -1176$.
2. Soit (v_n) une suite géométrique telle que $v_{10} = 25$ et $v_{13} = 200$.
   (a) Déterminer v_0 et la raison q.
   (b) Calculer $S = v_{10} + v_{12} + v_{14} + \cdots + v_{20}$.

EXERCICE 26 ⋆⋆

1. Vérifier que la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = 2^n - 2n + 2$ n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. (a) Prouver que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = -2n + 2$ est arithmétique.
   (b) Prouver que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = 2^n$ est géométrique.
3. Calculer alors la somme : $S = w_0 + w_1 + \cdots + w_{10}$.

EXERCICE 27 ⋆⋆

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A. La salle d'un théâtre comporte 25 rangs. Le premier rang compte 18 places, et chaque rang compte 3 places de plus que le précédent.

1. Combien de places compte le 25$^{\text{e}}$ rang ?
2. Combien la salle compte-t-elle de places au total ?
3. Le directeur souhaite agrandir la salle pour dépasser 1 500 places, en conservant la même règle. Combien de rangs faut-il au minimum ?

Partie B. On lâche une balle d'une hauteur de 2 mètres. À chaque rebond, elle remonte aux $\dfrac{3}{4}$ de la hauteur atteinte précédemment. On note h_n la hauteur, en mètres, atteinte après le n-ième rebond.

1. Calculer h_1 et h_2, puis préciser la nature de la suite (h_n).
2. Exprimer h_n en fonction de n.
3. Calculer la hauteur atteinte après le 10$^{\text{e}}$ rebond, arrondie au centimètre.
4. Calculer $h_1 + h_2 + \cdots + h_{10}$. Que représente ce nombre ?

EXERCICE 28 : SOMME DES n PREMIERS ENTIERS CARRÉS ⋆⋆

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la suite (u_n) définie par :

$$u_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

1. Calculer les 3 premiers termes de la suite.
2. Déterminer une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.
3. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la suite (v_n) par :

$$v_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

   (a) Montrer que $u_1 = v_1$.

   (b) Montrer que (v_n) admet la même relation de récurrence que (u_n).

   (c) Conclure.

EXERCICE 29 : VERS LA TERMINALE ⋆⋆⋆

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}$$

1. Calculer les trois premiers termes.
2. Pour tout entier naturel n, on définit la suite (v_n) par :

$$v_n = u_n^2 - 4$$

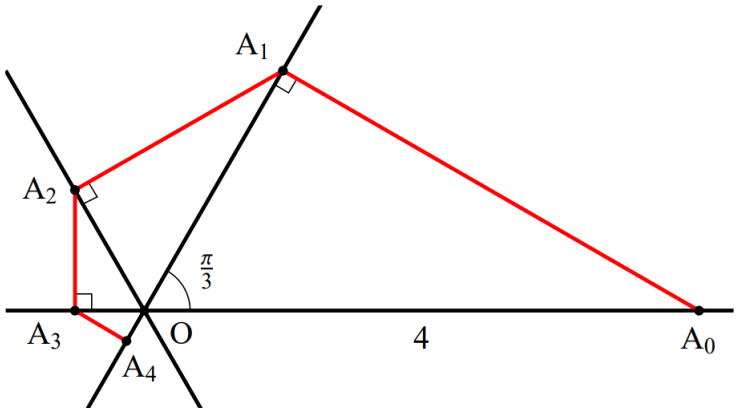
   Démontrer que v_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
3. En déduire une expression explicite de la suite v_n.
4. Sachant que (u_n) est une suite positive, en déduire que :

$$u_n = 2\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

5. Si n devient de plus en plus grand, de quelle valeur peut-on conjecturer que u_n va se rapprocher ?

EXERCICE 30 : CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE ⋆⋆⋆

On considère la figure suivant, où les deux droites issues de O font des angles de $\frac{\pi}{3}$ et la mesure de OA_0 est 4 :



On définit la suite (u_n) par : $u_n = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n$.

1. On pose $v_n = A_{n-1}A_n$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_1.
2. Calculer u_n en fonction de n.
3. Quelle est la limite supposée de la suite (u_n) ? C'est à dire la valeur vers laquelle u_n semble se rapprocher quand n grandit.