CORRIGÉ – CHAPITRE 3

GÉOMÉTRIE CARTÉSIENNE

Calcul vectoriel et relation de Chasles

EXERCICE 1 ⋆

1. On lit les coordonnées en se déplaçant *le long du quadrillage* : d'abord un nombre de « pas » parallèlement à $\vec{\imath}$, puis parallèlement à $\vec{\jmath}$.

   - $A(2\,;-1)$
   - $B(3\,;1)$
   - $C(4\,;2)$
   - $D(1\,;2)$
   - $E(0\,;2)$
   - $F(2\,;0)$
   - $G(-2\,;1)$
   - $H(-1\,;-2)$

   On remarque que E est situé sur l'axe des ordonnées (son abscisse est nulle) et F sur l'axe des abscisses (son ordonnée est nulle). Le repère n'étant pas orthonormé, il ne faut surtout pas lire les coordonnées « à l'horizontale et à la verticale ».

2. Les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'obtiennent par $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, ou directement par lecture du déplacement :

   $$\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}} \quad \boxed{\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}} \quad \boxed{\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}} \quad \boxed{\vec{z}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}}$$

   Par exemple $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ avec $A(2\,;-1)$ et $B(3\,;1)$, ce qui donne bien $(3-2\,;1-(-1)) = (1\,;2)$.

3. On additionne coordonnée par coordonnée, et l'on multiplie chaque coordonnée par le réel :

   $$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix}1+2\\2-1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}}$$

   $$2\vec{w} + \vec{u} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}}$$

   $$\vec{z} - 2\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}}$$

   Piège classique : dans $\vec{z} - 2\vec{v}$, le facteur 2 multiplie **les deux** coordonnées de $\vec{v}$, et le signe $-$ porte ensuite sur les deux résultats.

4. Par lecture : pour aller de G à D, on avance de 3 pas parallèlement à $\vec{\imath}$ et de 1 pas parallèlement à $\vec{\jmath}$. Par le calcul :

   $$\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}1-(-2)\\2-1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}}$$

   On retrouve d'ailleurs $\overrightarrow{GD} = \vec{u} + \vec{v}$.

EXERCICE 2 ⋆

1. On utilise la relation de Chasles $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, ainsi que $\overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{YX}$.

   (a) $\vec{u} = \underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}_{=\overrightarrow{AC}} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \boxed{\vec{0}}$

   (b) On regroupe astucieusement. D'une part $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, d'autre part $-\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$:

   $$\vec{v} = \underbrace{\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{AB} = \boxed{\overrightarrow{AB}}$$

   (c) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$, donc

   $$\vec{w} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \boxed{-2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BA}}$$

   Attention : $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$ vaut $\overrightarrow{BA}$ et non $\overrightarrow{AB}$; l'ordre compte.

   (d) On réordonne : $\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{TS}$ et $\overrightarrow{UT} - \overrightarrow{US} = \overrightarrow{ST}$, donc

   $$\vec{t} = \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{ST} = \boxed{\vec{0}}$$

2. On part du membre de gauche :

   $$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} = \underbrace{\overrightarrow{BA}}_{=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$$

   Ce qui nous donne bien l'égalité demandée. *On remarque que* le point O disparaît : le résultat ne dépend pas du point choisi.

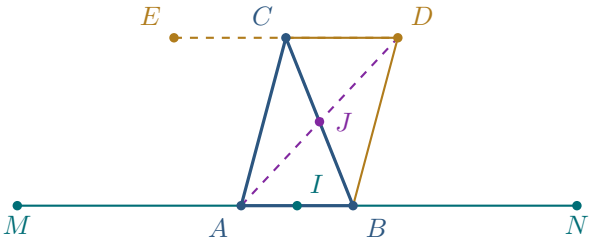
3. On regroupe deux par deux :

   $$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \underbrace{\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right)}_{=\overrightarrow{BA}} + \underbrace{\left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right)}_{=\overrightarrow{DC}} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$$

   Or $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{BA}$. On en déduit donc :

   $$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BA} = \boxed{\vec{0}}$$

EXERCICE 3 ⋆



1. Notons I_1 le milieu de $[AD]$ et J le milieu de $[BC]$. Alors :

   $$\overrightarrow{AI_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

   $$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

   Les deux vecteurs sont égaux, donc $I_1 = J$:

   $$\boxed{[AD] \text{ et } [BC] \text{ ont le même milieu.}}$$

   On reconnaît la propriété des diagonales du parallélogramme $ABDC$.

2. On calcule séparément les deux vecteurs, en passant à chaque fois par A :

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = -\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$$

On constate que $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CD}$, donc

$$\boxed{C \text{ est le milieu de } [ED].}$$

3. (a) On exprime tout à partir du point A : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}$.

$$3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM} = \vec{0} \iff 3\overrightarrow{AM} - 2\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}\right) = \vec{0} \iff \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB}}$$

Le point M est donc situé sur la droite (AB), du côté opposé à B, à une distance $2AB$ de A.

(b) De même, $\overrightarrow{NA} = -\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB}$:

$$-2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} = \vec{0} \iff 2\overrightarrow{AN} - 3\overrightarrow{AN} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \iff -\overrightarrow{AN} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AB}}$$

(c) Comme I est le milieu de $[AB]$, on a $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Ce qui nous donne :

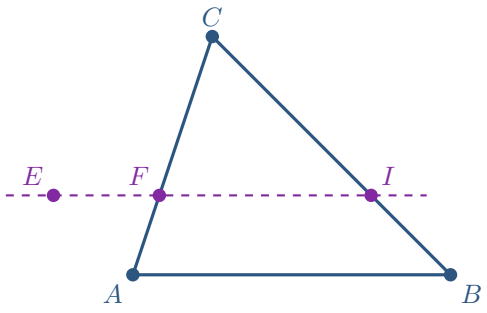
$$\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} = \boxed{-\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}}$$

$$\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AB} = \boxed{\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}}$$

On constate que $\overrightarrow{IM} = -\overrightarrow{IN}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$:

$$\boxed{I \text{ est bien le milieu de } [MN].}$$

EXERCICE 4 ⋆



1. *Construction :* $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ se reporte depuis A ; I se place sur $[CB]$ aux deux tiers en partant de C ; F se place sur $[AC]$ au tiers en partant de A.

2. Le point de départ commun est I. On note d'abord que $\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{CI} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Premier vecteur :

$$\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \underbrace{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}}_{\text{Chasles}} = \boxed{\overrightarrow{BA}}$$

Second vecteur :

$$\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \boxed{\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}}$$

3. On constate que $\overrightarrow{IF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IE}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont donc colinéaires, et comme ils ont le point I en commun :

$$\boxed{\text{les points } I,\ E \text{ et } F \text{ sont alignés.}}$$

La figure le confirme : ils appartiennent tous les trois à la droite tracée en pointillés violets.

EXERCICE 5 ⋆⋆

1. On décompose chacun des deux vecteurs de gauche en passant par un point bien choisi :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}\right) + \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}\right) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \underbrace{\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD}\right)}_{=\vec{0}} = \boxed{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}}$$

2. On introduit le point I dans les deux vecteurs :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = 2\overrightarrow{MI} + \underbrace{\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right)}_{=\vec{0} \text{ car } I \text{ milieu}} = \boxed{2\overrightarrow{MI}}$$

3. On procède de la même manière, en introduisant cette fois le point G :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} + \underbrace{\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right)}_{=\vec{0} \text{ par définition de } G} = \boxed{3\overrightarrow{MG}}$$

4. L'égalité étant valable pour *tout* point M, on peut choisir $M = A$. Comme $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)}$$

C'est la clé de l'exercice 34 : ce point G n'est autre que le centre de gravité du triangle ABC.

EXERCICE 6 ⋆⋆

1. Sur la figure, la droite (AB) est partagée en parts égales de longueur $\frac{AB}{2}$, et le point R se trouve à *une* de ces parts de A, mais **du côté opposé à** B : le coefficient est donc négatif. Le point S est au tiers de $[AC]$, et T aux trois cinquièmes de $[BC]$:

$$\boxed{\alpha = -\frac{1}{2} \qquad \beta = \frac{1}{3} \qquad \gamma = \frac{3}{5}}$$

2. (a) On passe par le point A :

$$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AS} = -\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{AS} = -\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \boxed{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$$

C'est ici que le signe de α intervient : c'est lui qui rend le premier coefficient positif.

(b) On passe par le point B, puis l'on exprime $\overrightarrow{BC}$ à l'aide de A :

$$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \boxed{\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}}$$

3. $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$, et $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{5+4}{10} = \frac{9}{10}$:

$$\boxed{\overrightarrow{RT} = \frac{9}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}}$$

4. On multiplie chaque coefficient par $\frac{5}{9}$:

$$\frac{5}{9}\overrightarrow{RT} = \frac{5}{9} \times \frac{9}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{9} \times \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \boxed{\overrightarrow{RS}}$$

5. Les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ sont colinéaires et ont l'origine R en commun, donc

$$\boxed{\text{les points } R,\ S \text{ et } T \text{ sont alignés.}}$$

Coordonnées, normes et distances

EXERCICE 7 ⋆

1. On applique $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-2 \\ 4-(-3) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5-2 \\ 0-(-3) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -2-(-1) \\ -2-4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}} \qquad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -2-5 \\ -2-0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Piège classique : c'est toujours « l'arrivée moins le départ », et les doubles signes doivent être écrits explicitement avant d'être simplifiés.

2. (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3+3 \\ 7+3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}}$

(b) $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -21 \\ -6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 15 \\ 20 \end{pmatrix}}$

(c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -4{,}5 \end{pmatrix}}$

3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -3-1 \\ 7-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, et par ailleurs $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -2-2 \\ -2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \text{ : on retrouve la relation de Chasles.}}$$

EXERCICE 8 ⋆

1. On applique $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$:

a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = \boxed{5}$

b) $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \boxed{\sqrt{5}}$

c) $\|\vec{w}\| = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = \boxed{10}$

d) $\|\vec{z}\| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = \boxed{13}$

Attention : les coordonnées sont élevées au carré, donc leur signe disparaît. Une norme est toujours positive.

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$, donc

$$AB=\sqrt{16+9}=\boxed{5}\qquad BC=\sqrt{16+9}=\boxed{5}\qquad AC=\sqrt{0+36}=\boxed{6}$$

On constate que $AB=BC$, donc $\boxed{ABC \text{ est un triangle isocèle en } B.}$

Ce n'est pas un triangle rectangle : $AB^2+BC^2=25+25=50$, alors que $AC^2=36$.

3. $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$, donc

$$DE=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}\qquad EF=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}\qquad DF=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}$$

D'une part $DE=EF=2\sqrt{5}$: le triangle est isocèle en E. D'autre part :

$$DE^2+EF^2=20+20=40=DF^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle en E :

$$\boxed{DEF \text{ est un triangle rectangle isocèle en } E.}$$

On travaille sur les carrés des longueurs, ce qui évite de manipuler les racines.

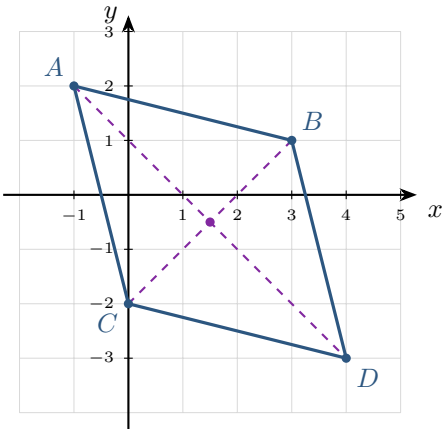
EXERCICE 9 ⋆

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-1)\\1-2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}}$

2. D'après le cours, $ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. En notant $D(x\,;y)$:

$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x-0\\y-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x=4\\y+2=-1\end{cases}\iff\begin{cases}x=4\\y=-3\end{cases}$$

$$\boxed{D(4\,;-3)}$$



3. Milieu de $[AD]$: $\left(\dfrac{-1+4}{2}\,;\dfrac{2-3}{2}\right)=(1{,}5\,;-0{,}5)$.

Milieu de $[BC]$: $\left(\dfrac{3+0}{2}\,;\dfrac{1-2}{2}\right)=(1{,}5\,;-0{,}5)$.

$$\boxed{\text{Les deux milieux coïncident : les diagonales se coupent en leur milieu.}}$$

C'est la propriété caractéristique du parallélogramme (le point violet sur la figure).

4. $AB = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$, et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ donne $AC = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$.

   Or $[AB]$ et $[AC]$ sont deux côtés *consécutifs* du parallélogramme $ABDC$, et ils ont la même longueur :

   $$\boxed{ABDC \text{ est un losange.}}$$

   On en déduit d'ailleurs que ses diagonales (AD) et (BC) sont perpendiculaires.

EXERCICE 10 ⋆

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-2)\\3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}3-0\\0-(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

   On constate que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc $\boxed{ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$

2. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, d'où :

   $$AB = CD = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \qquad \text{et} \qquad BC = DA = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

   Les quatre côtés ont la même longueur : $\boxed{ABCD \text{ est un losange.}}$

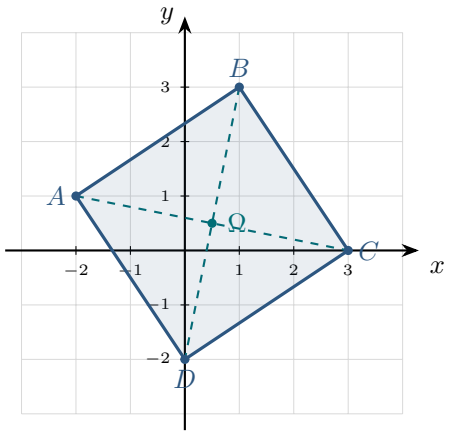
3. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$, donc

   $$AC = \sqrt{25+1} = \sqrt{26} \qquad \text{et} \qquad BD = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

   Un losange dont les diagonales ont la même longueur est un carré :

   $$\boxed{ABCD \text{ est un carré.}}$$

   Vérification : pour un carré de côté $\sqrt{13}$, la diagonale doit valoir $\sqrt{13} \times \sqrt{2} = \sqrt{26}$.



4. Le centre est le milieu commun des deux diagonales :

   $$\Omega\left(\frac{-2+3}{2}\,;\,\frac{1+0}{2}\right) = \boxed{\Omega(0{,}5\,;0{,}5)}$$

   Vérification avec l'autre diagonale : $\left(\frac{1+0}{2}\,;\,\frac{3-2}{2}\right) = (0{,}5\,;0{,}5)$.

EXERCICE 11 ⋆

1. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$, donc $\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. En notant $A(x\,;y)$:

$$\overrightarrow{NA}\begin{pmatrix}x-2\\y-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x=3\\y=6\end{cases}\qquad\text{soit}\qquad\boxed{A(3\,;6)}$$

$\overrightarrow{MQ}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, donc $3\overrightarrow{MQ}\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$. En notant $B(x\,;y)$:

$$\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}x-0\\y+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x=-3\\y=3\end{cases}\qquad\text{soit}\qquad\boxed{B(-3\,;3)}$$

2. $\overrightarrow{PA}\begin{pmatrix}3-(-9)\\6-0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}}\qquad\overrightarrow{PB}\begin{pmatrix}-3-(-9)\\3-0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}}$

3. On calcule le déterminant :

$$\det\left(\overrightarrow{PA}\,;\overrightarrow{PB}\right)=12\times3-6\times6=36-36=0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PB}$ sont donc colinéaires, et comme ils partent du même point P :

$$\boxed{\text{les points } P,\ A \text{ et } B \text{ sont alignés.}}$$

On peut même préciser que $\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{PB}$: le point B est le milieu de $[PA]$.

EXERCICE 12 ⋆

1. On note $G(x\,;y)$ et l'on écrit les trois vecteurs :

$$\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix}1-x\\-1-y\end{pmatrix}\quad\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}-1-x\\-2-y\end{pmatrix}\quad\overrightarrow{GC}\begin{pmatrix}-2-x\\2-y\end{pmatrix}$$

La relation $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ se traduit par le système :

$$\begin{cases}(1-x)+2(-1-x)+(-2-x)=0\\(-1-y)+2(-2-y)+(2-y)=0\end{cases}\iff\begin{cases}-3-4x=0\\-3-4y=0\end{cases}$$

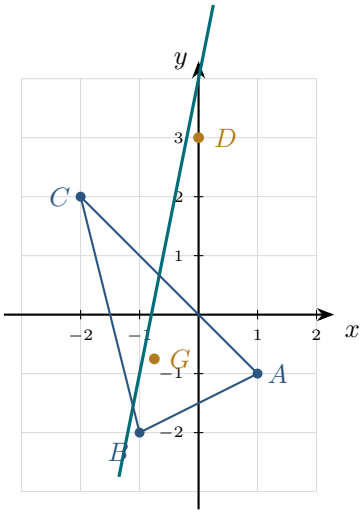
$$\boxed{G\left(-\frac{3}{4}\,;-\frac{3}{4}\right)}$$

2. $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$. En notant $D(x\,;y)$:

$$\begin{cases}x-(-1)=1\\y-(-2)=5\end{cases}\qquad\text{soit}\qquad\boxed{D(0\,;3)}$$

On remarque que D est le quatrième sommet du parallélogramme $ABDC$.

3.



Conjecture : les points B, G et D semblent alignés.

Démonstration. On calcule les deux vecteurs :

$$\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}+1\\-\frac{3}{4}+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{5}{4}\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$$

$$\det\left(\overrightarrow{BG};\overrightarrow{BD}\right)=\frac{1}{4}\times 5-1\times\frac{5}{4}=\frac{5}{4}-\frac{5}{4}=0$$

Les vecteurs sont colinéaires (on a même $\overrightarrow{BD}=4\overrightarrow{BG}$), donc

$$\boxed{\text{les points } B,\ G \text{ et } D \text{ sont alignés.}}$$

EXERCICE 13 ⋆⋆

1. $I\left(\dfrac{-3+5}{2}\,;\dfrac{2-4}{2}\right)=\boxed{I(1\,;-1)}$

2. A' est le symétrique de A par rapport à B, c'est-à-dire que B est le milieu de $[AA']$. En notant $A'(x\,;y)$:

$$\begin{cases}\dfrac{-3+x}{2}=5\\[2mm]\dfrac{2+y}{2}=-4\end{cases}\iff\begin{cases}x=13\\y=-10\end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{A'(13\,;-10)}$$

3. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix}$, donc $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{16}{3}\\-4\end{pmatrix}$, et

$$M\left(-3+\frac{16}{3}\,;2-4\right)=\boxed{M\left(\frac{7}{3}\,;-2\right)}$$

4. En notant $N(x\,;y)$, la relation $2\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NB}=\vec{0}$ donne :

$$\begin{cases}2(-3-x)+3(5-x)=0\\2(2-y)+3(-4-y)=0\end{cases}\iff\begin{cases}9-5x=0\\-8-5y=0\end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{N\left(\frac{9}{5}\,;-\frac{8}{5}\right)}$$

5. $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}\frac{7}{3}-1\\-2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IN}\begin{pmatrix}\frac{9}{5}-1\\-\frac{8}{5}+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$, d'où

$$\det\left(\overrightarrow{IM};\overrightarrow{IN}\right)=\frac{4}{3}\times\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{4}{5}\times(-1)=-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}=0$$

$\boxed{\text{les points } I,\ M \text{ et } N \text{ sont alignés.}}$

Oui, on pouvait le prévoir. Les quatre points I, A', M et N sont définis par des relations vectorielles ne faisant intervenir que A et B : chacun s'écrit sous la forme $A+k\overrightarrow{AB}$, et appartient donc à la droite (AB). Trois points d'une même droite sont nécessairement alignés — aucun calcul n'était nécessaire.

Colinéarité, alignement et parallélisme

EXERCICE 14 ⋆

On rappelle que $\det(\vec{u};\vec{v}) = xy' - x'y$, et que les vecteurs sont colinéaires si et seulement si ce déterminant est nul.

a) $\det(\vec{u};\vec{v}) = 3\times 4 - (-6)\times(-2) = 12 - 12 = \boxed{0}$: colinéaires, avec $\vec{v} = -2\vec{u}$ (le coefficient est négatif, donc **sens contraire**).

b) $\det(\vec{u};\vec{v}) = 5\times 3 - 2\times 1 = \boxed{13 \neq 0}$: **non** colinéaires.

c) $\det(\vec{u};\vec{v}) = (-4)\times(-9) - 6\times 6 = 36 - 36 = \boxed{0}$: colinéaires, avec $\vec{v} = -\dfrac{3}{2}\vec{u}$, donc de sens contraire.

d) $\det(\vec{u};\vec{v}) = \dfrac{1}{2}\times(-12) - 2\times(-3) = -6 + 6 = \boxed{0}$: colinéaires, avec $\vec{v} = 4\vec{u}$, donc de **même sens**.

e) $\det(\vec{u};\vec{v}) = \sqrt{2}\times\sqrt{2} - 2\times 1 = 2 - 2 = \boxed{0}$: colinéaires, avec $\vec{v} = \sqrt{2}\,\vec{u}$, donc de même sens.

f) $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0\times(-3) - 0\times 5 = \boxed{0}$: colinéaires, avec $\vec{v} = -\dfrac{3}{5}\vec{u}$, donc de sens contraire. *Ce sont deux vecteurs « verticaux »*, de même direction.

EXERCICE 15 ⋆

1. (a) $\det(\vec{u};\vec{v}) = 2\times\left(-\dfrac{1}{3}\right) - (-1)\times(-3) = -\dfrac{2}{3} - 3 = \boxed{-\dfrac{11}{3} \neq 0}$: non colinéaires.

   (b) $\det(\vec{u};\vec{v}) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{5} - \dfrac{6}{5}\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{5} = \boxed{0}$: colinéaires, avec $\vec{v} = \dfrac{12}{5}\vec{u}$.

2. On écrit à chaque fois que le déterminant est nul, puis on résout en m.

   (a) $\det(\vec{u};\vec{v}) = 2\times 3 - m\times 6 = 6 - 6m = 0 \iff \boxed{m = 1}$

   (b) $\det(\vec{u};\vec{v}) = (-m)\times(-3) - 1\times 0 = 3m = 0 \iff \boxed{m = 0}$

   (c) $\det(\vec{u};\vec{v}) = 4\times(-3) - (-2)\times m = -12 + 2m = 0 \iff \boxed{m = 6}$

   (d) $\det(\vec{u};\vec{v}) = 27\times 3 - 2m\times 2m = 81 - 4m^2 = 0 \iff m^2 = \dfrac{81}{4} \iff \boxed{m = \dfrac{9}{2} \text{ ou } m = -\dfrac{9}{2}}$

   Attention au dernier cas : une équation du type $m^2 = k$ avec $k > 0$ admet **deux** solutions opposées ; oublier la négative est l'erreur la plus fréquente.

EXERCICE 16 ⋆

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}8\\8\end{pmatrix}$, donc

$$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = 3\times 8 - 8\times 3 = 0$$

Les vecteurs directeurs sont colinéaires : $\boxed{(AB) \text{ et } (CD) \text{ sont parallèles.}}$

Sont-elles confondues ? Il suffit de tester si C appartient à (AB). Or $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ et

$$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = 3\times(-4) - 1\times 3 = -15 \neq 0$$

$\boxed{\text{Les droites sont } \textbf{strictement} \text{ parallèles : elles ne sont pas confondues.}}$

2. On calcule à chaque fois $\det\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MP}\right)$.

(a) $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}-8\\-11\end{pmatrix}$: $\det\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MP}\right) = 3\times(-11) - (-8)\times 4 = -33+32 = -1 \neq 0$
$\boxed{\text{non alignés}}$

(b) $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}-9\\6\end{pmatrix}$: $\det\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MP}\right) = 3\times 6 - (-9)\times(-2) = 18-18 = 0$ $\boxed{\text{alignés}}$

(c) $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}-3\\11\end{pmatrix}$: $\det\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MP}\right) = (-1)\times 11 - (-3)\times 4 = -11+12 = 1 \neq 0$
$\boxed{\text{non alignés}}$

(d) $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}1\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}-2\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$: $\det\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MP}\right) = 1\times\frac{4}{3} - (-2)\times\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}-\frac{4}{3} = 0$ $\boxed{\text{alignés}}$

On prendra garde au cas c) : les valeurs sont proches de l'alignement (le déterminant vaut 1), mais un déterminant non nul, aussi petit soit-il, suffit à conclure.

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}m-1\\3\end{pmatrix}$. Les points sont alignés si et seulement si :

$$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = 3\times 3 - (m-1)\times(-3) = 9+3m-3 = 3m+6 = 0 \iff \boxed{m=-2}$$

2. $\det(\vec{u};\vec{v}) = m\times m - 3\times 2 = m^2-6 = 0 \iff m^2 = 6 \iff \boxed{m=\sqrt{6} \text{ ou } m=-\sqrt{6}}$

3. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}m-2\\4\end{pmatrix}$. Les droites sont parallèles si et seulement si :

$$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = 2\times 4 - (m-2)\times 4 = 8-4m+8 = 16-4m = 0 \iff \boxed{m=4}$$

4. Pour $m=4$, on a $D(4;3)$. Testons si $C(2;-1)$ appartient à (AB) : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ et

$$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = 2\times(-2) - 2\times 4 = -12 \neq 0$$

$\boxed{\text{Non : les droites sont strictement parallèles.}}$

EXERCICE 18 ⋆⋆

Partie A : démonstration vectorielle

1. I étant le milieu de $[AB]$, on a $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, donc

$$\boxed{\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}} \qquad \text{et de même} \qquad \boxed{\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$$

2. On applique la relation de Chasles en passant par A :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$$

3. On vient de redémontrer le **théorème des milieux** : la droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté, et le segment correspondant mesure la moitié de ce côté. La version vectorielle a l'avantage de donner les deux informations (direction *et* longueur) d'un seul coup.

Partie B : vérification dans un repère

4. $I\left(\frac{-2+4}{2}\,;\frac{1+3}{2}\right) = \boxed{I(1\,;2)}$ $\qquad$ $J\left(\frac{-2+0}{2}\,;\frac{1-3}{2}\right) = \boxed{J(-1\,;-1)}$

   $K\left(\frac{4+0}{2}\,;\frac{3-3}{2}\right) = \boxed{K(2\,;0)}$

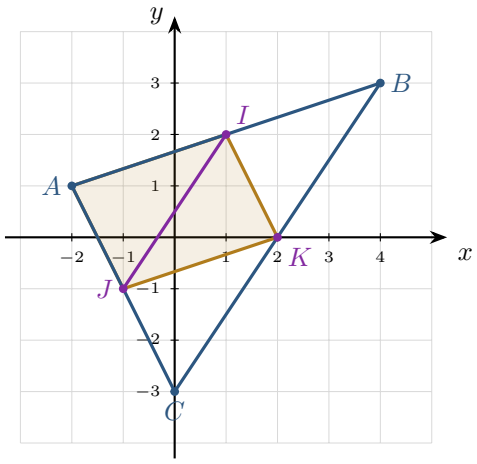
5. $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$, donc

$$2\overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix} = \boxed{\overrightarrow{BC}}$$

6. $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}1-(-2)\\2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}2-(-1)\\0-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

   On constate que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{JK}$, donc

$$\boxed{AIKJ \text{ est un parallélogramme.}}$$



En ocre, le parallélogramme $AIKJ$; en violet, la droite des milieux (IJ), parallèle à (BC).

Équations de droite

EXERCICE 19 ⋆

1. Un point appartient à d si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation :
   - $A(0\,;3)$: $3\times 0-2\times 3+6=-6+6=0$ $\boxed{A\in d}$
   - $B(2\,;6)$: $3\times 2-2\times 6+6=6-12+6=0$ $\boxed{B\in d}$
   - $C(-2\,;1)$: $3\times(-2)-2\times 1+6=-6-2+6=-2\neq 0$ $\boxed{C\notin d}$
2. L'équation est de la forme $ax+by+c=0$ avec $a=3$ et $b=-2$. Le cours donne le vecteur directeur $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$:

   $$\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}$$

   Piège classique : on ne lit pas $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ mais bien $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$: les coefficients sont échangés, et l'un change de signe.
3. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-0\\6-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$: c'est *exactement* le vecteur directeur trouvé, donc a fortiori colinéaire.
4. Avec l'axe des ordonnées, on fait $x=0$: $-2y+6=0$, donc $y=3$ et le point est $\boxed{(0\,;3)}$ (c'est le point A).
   Avec l'axe des abscisses, on fait $y=0$: $3x+6=0$, donc $x=-2$ et le point est $\boxed{(-2\,;0)}$.
5. (a) $-x+4y-8=0$: $a=-1$, $b=4$, donc $\boxed{\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}}$ (ou $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$).

   (b) $y=5$ s'écrit $0x+1y-5=0$: $a=0$, $b=1$, donc $\boxed{\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}}$: la droite est horizontale.

   (c) $x=-2$ s'écrit $1x+0y+2=0$: $a=1$, $b=0$, donc $\boxed{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}$: la droite est verticale.

EXERCICE 20 ⋆

Méthode générale. On calcule un vecteur directeur $\overrightarrow{XY}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ de la droite ; comme le vecteur directeur associé à $ax+by+c=0$ est $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$, on prend $a=q$ et $b=-p$. On détermine enfin c en injectant les coordonnées d'un point de la droite.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$, donc $a=-1$ et $b=3$: l'équation est de la forme $-x+3y+c=0$. Avec $A(1\,;5)$:

   $$-1+15+c=0 \iff c=-14$$

   $$\boxed{(AB):-x+3y-14=0 \quad \text{ou} \quad x-3y+14=0}$$

   Vérification avec $B(-2\,;4)$: $-2-12+14=0$.

2. B et C ont la même ordonnée 4 : la droite est horizontale.

$$\boxed{(BC) : y - 4 = 0}$$

3. A et C ont la même abscisse 1 : la droite est verticale.

$$\boxed{(AC) : x - 1 = 0}$$

4. $\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$, donc $a = 5$ et $b = 3$: l'équation est de la forme $5x + 3y + c = 0$. Avec $O(0\,;0)$, on obtient immédiatement $c = 0$:

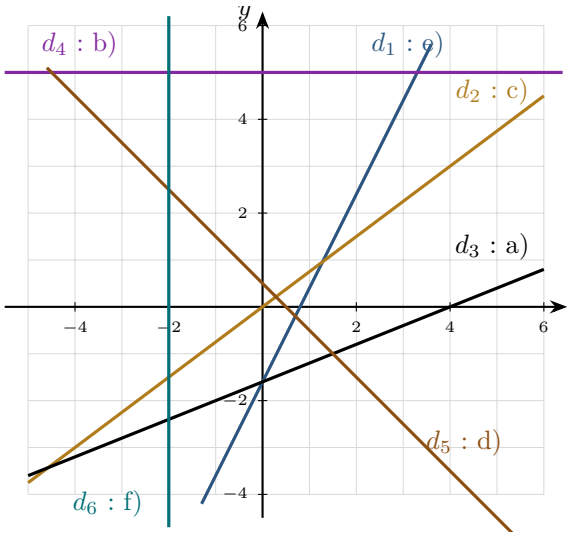
$$\boxed{(OD) : 5x + 3y = 0}$$

On remarque que toute droite passant par l'origine a une équation sans terme constant.

EXERCICE 21 ⋆

On repère chaque droite à son **coefficient directeur** et à son **ordonnée à l'origine**, après avoir mis les équations sous forme réduite lorsque c'est possible :

c) $-3x + 4y = 0 \iff y = \dfrac{3}{4}x$ d) $2x + 2y = 1 \iff y = -x + \dfrac{1}{2}$



Droite	Équation	Justification
d_1	e) $y = 2x - \dfrac{8}{5}$	la plus « raide » : coefficient directeur 2
d_2	c) $-3x + 4y = 0$	passe par l'origine, coefficient directeur $\frac{3}{4}$
d_3	a) $y = \dfrac{2}{5}x - \dfrac{8}{5}$	même ordonnée à l'origine que d_1, pente plus faible
d_4	b) $y = 5$	horizontale
d_5	d) $2x + 2y = 1$	seule droite *descendante* : coefficient directeur -1
d_6	f) $x = -2$	verticale

On remarque que d_1 et d_3 se coupent sur l'axe des ordonnées en $-\frac{8}{5}$: c'est leur ordonnée à l'origine commune, ce qui permet de les distinguer des autres du premier coup d'œil.

EXERCICE 22 ⋆

1. On isole y à chaque fois.

   (a) $2x+3y-6=0 \iff 3y=-2x+6 \iff \boxed{y=-\dfrac{2}{3}x+2}$

   (b) $-x+5y+10=0 \iff 5y=x-10 \iff \boxed{y=\dfrac{1}{5}x-2}$

   (c) $4x-8=0 \iff \boxed{x=2}$

   (d) $3y+9=0 \iff \boxed{y=-3}$

   C'est la droite c) qui n'admet pas d'équation réduite. Son équation ne contient pas de y : c'est une droite **verticale**, et y ne peut pas s'exprimer en fonction de x (à l'abscisse 2 correspondent une infinité d'ordonnées).

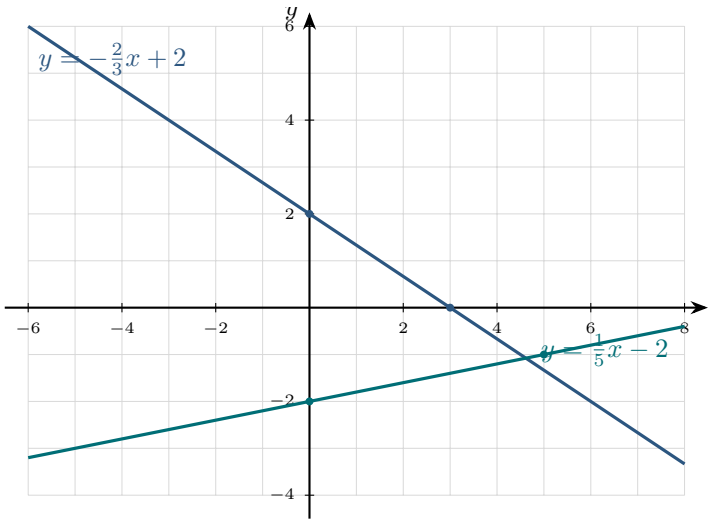
2. On ramène tout dans le membre de gauche.

   (a) $y=3x-1 \iff \boxed{3x-y-1=0}$

   (b) $y=-\dfrac{1}{2}x+4 \iff \dfrac{1}{2}x+y-4=0 \iff \boxed{x+2y-8=0}$ (on a multiplié par 2 pour éviter les fractions)

   (c) $x=5 \iff \boxed{x-5=0}$

3. Pour tracer, il suffit de deux points par droite. Pour $y=-\frac{2}{3}x+2$: les points $(0\,;2)$ et $(3\,;0)$. Pour $y=\frac{1}{5}x-2$: les points $(0\,;-2)$ et $(5\,;-1)$.



   On remarque que les deux droites sont sécantes, puisque leurs coefficients directeurs $-\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{5}$ sont différents.

EXERCICE 23 ⋆⋆

1. Le vecteur directeur $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ doit être de la forme $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$, donc $b=-3$ et $a=5$: l'équation est $5x-3y+c=0$. Avec $A(2\,;-1)$:

$$5\times 2-3\times(-1)+c=10+3+c=0 \iff c=-13$$

$$\boxed{5x-3y-13=0}$$

2. Deux droites parallèles ont le même vecteur directeur, donc les mêmes coefficients a et b : l'équation cherchée est de la forme $2x - 7y + c = 0$. Avec $B(-1\,;4)$:

$$-2 - 28 + c = 0 \iff c = 30$$

$$\boxed{2x - 7y + 30 = 0}$$

C'est la méthode la plus rapide : on recopie les deux premiers coefficients, et l'on ne recalcule que le troisième.

3. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$, que l'on simplifie en $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Donc $b = -1$ et $a = 2$: l'équation est $2x - y + c = 0$. Avec $C(0\,;-3)$:

$$0 + 3 + c = 0 \iff c = -3$$

$$\boxed{(CD) : 2x - y - 3 = 0}$$

Vérification avec $D(4\,;5)$: $8 - 5 - 3 = 0$.

4. Même direction, donc équation de la forme $2x - y + c = 0$. Avec $E(1\,;1)$:

$$2 - 1 + c = 0 \iff c = -1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{2x - y - 1 = 0}$$

5. $F(-2\,;-7)$: $2 \times (-2) - (-7) - 3 = -4 + 7 - 3 = 0$, donc $\boxed{F \text{ appartient bien à } (CD).}$

EXERCICE 24 ⋆⋆

Méthode. On compare d'abord les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ à l'aide du déterminant. S'il est non nul, les droites sont sécantes et l'on cherche le point d'intersection ; s'il est nul, on teste si C appartient à (AB) pour distinguer « strictement parallèles » de « confondues ».

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\12\end{pmatrix}$: $\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}\right) = 1 \times 12 - 2 \times 6 = 0$: les droites sont parallèles.
$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-7\end{pmatrix}$: $\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = 1 \times (-7) - (-2) \times 6 = 5 \neq 0$, donc $C \notin (AB)$.

$$\boxed{\text{Droites strictement parallèles : aucun point d'intersection.}}$$

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-10\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}60\\60\end{pmatrix}$: $\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}\right) = (-10) \times 60 - 60 \times (-10) = 0$: les droites sont parallèles.
$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-45\\-45\end{pmatrix}$: $\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = (-10) \times (-45) - (-45) \times (-10) = 450 - 450 = 0$, donc $C \in (AB)$.

$$\boxed{\text{Droites confondues : elles ont une infinité de points communs.}}$$

3. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-285\\84\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-90\end{pmatrix}$:

$$\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}\right) = (-285) \times (-90) - (-2) \times 84 = 25\,650 + 168 = 25\,818 \neq 0$$

$\boxed{\text{Les droites sont sécantes.}}$ Déterminons leur point d'intersection.

Équation de (AB) : on simplifie $\overrightarrow{AB}$ par 3, ce qui donne $\begin{pmatrix}-95\\28\end{pmatrix}$, donc $a = 28$ et $b = 95$. Avec $A(462\,;-70)$:

$$28 \times 462 + 95 \times (-70) + c = 12\,936 - 6\,650 + c = 0 \iff c = -6\,286$$

$$(AB) : 28x + 95y - 6\,286 = 0$$

Équation de (CD) : on simplifie $\overrightarrow{CD}$ par -2, ce qui donne $\begin{pmatrix}1\\45\end{pmatrix}$, donc $a = 45$ et $b = -1$. Avec $C(88\,;312)$:

$$45 \times 88 - 312 + c = 3\,960 - 312 + c = 0 \iff c = -3\,648$$

$$(CD) : 45x - y - 3\,648 = 0$$

Résolution du système, par substitution : la seconde équation donne $y = 45x - 3\,648$, d'où

$$28x + 95(45x - 3\,648) - 6\,286 = 0 \iff 28x + 4\,275x - 346\,560 - 6\,286 = 0 \iff 4\,303x = 352\,846$$

$$x = \frac{352\,846}{4\,303} = 82 \qquad \text{puis} \qquad y = 45 \times 82 - 3\,648 = 3\,690 - 3\,648 = 42$$

$$\boxed{\text{Les droites se coupent au point } (82\,;42).}$$

Vérification dans la première équation : $28 \times 82 + 95 \times 42 = 2\,296 + 3\,990 = 6\,286$.

Systèmes d'équations

EXERCICE 25 ⋆

On adopte les notations du cours : chaque équation est repérée par (e_1) ou (e_2), et l'expression que l'on remplace est mise en couleur.

1. $\begin{cases} 2x + y = -2 & (e_1) \\ 5x + 4y = 1 & (e_2) \end{cases}$ **Substitution** : dans (e_1), le y est seul, on l'isole.

$$(e_1) \iff y = -2 - 2x$$

On injecte cette expression dans (e_2) :

$$5x + 4\,y = 1 \iff 5x + 4\,(-2 - 2x) = 1 \iff 5x - 8 - 8x = 1 \iff -3x = 9 \iff x = -3$$

On revient à l'expression isolée : $y = -2 - 2 \times (-3) = 4$.

$$\boxed{S = \{(-3\,;4)\}}$$

2. $\begin{cases} 4x - 5y = 2 & (e_1) \\ -x + 3y = 3 & (e_2) \end{cases}$ **Substitution** : c'est le x de (e_2) qui est le plus simple à isoler.

$$(e_2) \iff x = 3y - 3$$

$$4\,x - 5y = 2 \iff 4\,(3y - 3) - 5y = 2 \iff 12y - 12 - 5y = 2 \iff 7y = 14 \iff y = 2$$

Puis $x = 3 \times 2 - 3 = 3$.

$$\boxed{S = \{(3\,;2)\}}$$

3. $\begin{cases} -x + 20y = 1 & (e_1) \\ 2x - 60y = -3 & (e_2) \end{cases}$ **Combinaison linéaire** : en ajoutant *deux fois* (e_1) à (e_2), les x disparaissent.

$$(e_2) + 2 \times (e_1) \quad \text{donne :} \quad 2x - 60y + 2 \times (-x + 20y) = (-3) + 2 \times 1$$

$$\iff 2x - 60y - 2x + 40y = -1 \iff -20y = -1 \iff y = \frac{1}{20}$$

En reprenant (e_1) : $-x + 20 \times \frac{1}{20} = 1 \iff -x + 1 = 1 \iff x = 0$.

$$\boxed{S = \left\{\left(0\,;\frac{1}{20}\right)\right\}}$$

4. $\begin{cases} 12x+7y=41 \ (e_1) \\ 4x-15y=239 \ (e_2) \end{cases}$ **Combinaison linéaire** : $12 = 3\times 4$, donc retrancher trois fois (e_2) élimine les x.

$$(e_1) - 3\times(e_2) \quad \text{donne :} \quad 12x+7y-3\times(4x-15y) = 41-3\times 239$$

$$\iff 12x+7y-12x+45y = 41-717 \iff 52y=-676 \iff y=-13$$

En reprenant (e_1) : $12x+7\times(-13)=41 \iff 12x=132 \iff x=11$.

$$\boxed{S=\{(11\,;-13)\}}$$

5. $\begin{cases} 3x+5y=2 \ (e_1) \\ x-\dfrac{5}{2}y=1 \ (e_2) \end{cases}$ **Substitution** : le x de (e_2) n'a pas de facteur.

$$(e_2) \iff x=1+\frac{5}{2}y$$

$$3x+5y=2 \iff 3\left(1+\frac{5}{2}y\right)+5y=2 \iff 3+\frac{15}{2}y+5y=2 \iff \frac{25}{2}y=-1 \iff y=-\frac{2}{25}$$

Puis $x=1+\dfrac{5}{2}\times\left(-\dfrac{2}{25}\right)=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$.

$$\boxed{S=\left\{\left(\frac{4}{5}\,;-\frac{2}{25}\right)\right\}}$$

6. $\begin{cases} \dfrac{1}{10}x+\dfrac{1}{20}y=1 \ (e_1) \\ \dfrac{2}{5}x-\dfrac{1}{10}y=10 \ (e_2) \end{cases}$ On commence par **chasser les dénominateurs** :

$$20\times(e_1) \iff 2x+y=20 \qquad \text{et} \qquad 10\times(e_2) \iff 4x-y=100$$

Combinaison linéaire : les coefficients de y sont déjà opposés, il suffit d'additionner.

$$(2x+y)+(4x-y)=20+100 \iff 6x=120 \iff x=20$$

Puis $2\times 20+y=20 \iff y=-20$.

$$\boxed{S=\{(20\,;-20)\}}$$

EXERCICE 26 ⋆

7. $\begin{cases} 2x-\sqrt{3}\,y=0 \ (e_1) \\ \sqrt{3}\,x-3y=-1 \ (e_2) \end{cases}$ **Substitution**.

$$(e_1) \iff \sqrt{3}\,y=2x \iff y=\frac{2x}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3}\,x-3\,y=-1 \iff \sqrt{3}\,x-3\times\frac{2x}{\sqrt{3}}=-1 \iff \sqrt{3}\,x-2\sqrt{3}\,x=-1$$

en utilisant $\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$. On obtient $-\sqrt{3}\,x=-1$, donc $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, puis $y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2}{3}$.

$$\boxed{S=\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\frac{2}{3}\right)\right\}}$$

8. $\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}5y = 4 \ (e_1) \\ x - y = 6 \ (e_2) \end{cases}$ **Substitution** : x est seul dans (e_2).

$$(e_2) \iff x = y + 6$$

$$0{,}2\,x + 0{,}5y = 4 \iff 0{,}2\,(y+6) + 0{,}5y = 4 \iff 0{,}7y = 2{,}8 \iff y = 4$$

Puis $x = 4 + 6 = 10$.

$$\boxed{S = \{(10\,;4)\}}$$

9. $\begin{cases} 5x + 2y = 14 \ (e_1) \\ 2x + 5y = 14 \ (e_2) \end{cases}$ **Combinaison linéaire** : le système est symétrique, la soustraction simplifie tout.

$(e_1) - (e_2)$ donne : $(5x + 2y) - (2x + 5y) = 14 - 14 \iff 3x - 3y = 0 \iff x = y$

En reportant dans (e_1) : $5x + 2x = 14 \iff 7x = 14 \iff x = 2$.

$$\boxed{S = \{(2\,;2)\}}$$

10. $\begin{cases} 3x + 5y = 5 \ (e_1) \\ 2x - 3y = 2 \ (e_2) \end{cases}$ **Combinaison linéaire** : pour éliminer y, on multiplie (e_1) par 3 et (e_2) par 5.

$3 \times (e_1) + 5 \times (e_2)$ donne : $3 \times (3x + 5y) + 5 \times (2x - 3y) = 3 \times 5 + 5 \times 2$

$$\iff 9x + 15y + 10x - 15y = 25 \iff 19x = 25 \iff x = \frac{25}{19}$$

En reprenant (e_1) : $5y = 5 - \dfrac{75}{19} = \dfrac{20}{19}$, donc $y = \dfrac{4}{19}$.

$$\boxed{S = \left\{\left(\frac{25}{19}\,;\frac{4}{19}\right)\right\}}$$

11. $\begin{cases} 3x + y = 5 \ (e_1) \\ 6x + 2y = 10 \ (e_2) \end{cases}$ **Combinaison linéaire**.

$(e_2) - 2 \times (e_1)$ donne : $(6x + 2y) - 2 \times (3x + y) = 10 - 2 \times 5 \iff 0 = 0$

L'égalité obtenue est toujours vraie : la seconde équation n'apporte aucune information nouvelle, elle est simplement le double de la première. Toute solution de (e_1) convient :

$$\boxed{S = \{(x\,;5 - 3x),\ x \in \mathbb{R}\}}$$

Interprétation géométrique : les deux équations décrivent une *même* droite. Les droites sont **confondues**, et le système admet une infinité de solutions.

12. $\begin{cases} \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{3}y = 1 \ (e_1) \\ \dfrac{x + 2y}{7} = 1 \ (e_2) \end{cases}$ **Substitution**, après avoir chassé le dénominateur de (e_2).

$$(e_2) \iff x + 2y = 7 \iff x = 7 - 2y$$

$$\frac{3}{2}\,x - \frac{5}{3}y = 1 \iff \frac{3}{2}\,(7 - 2y) - \frac{5}{3}y = 1 \iff \frac{21}{2} - 3y - \frac{5}{3}y = 1 \iff -\frac{14}{3}y = -\frac{19}{2}$$

donc $y = \dfrac{19}{2} \times \dfrac{3}{14} = \dfrac{57}{28}$, puis $x = 7 - \dfrac{57}{14} = \dfrac{41}{14}$.

$$\boxed{S = \left\{\left(\frac{41}{14}\,;\frac{57}{28}\right)\right\}}$$

EXERCICE 27 ⋆⋆

1. $\begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}y = 0 \ (e_1) \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = \frac{17}{36} \ (e_2) \end{cases}$ On simplifie d'abord les deux équations :

$$\frac{4}{3} \times (e_1) \iff 2x + 3y = 0 \qquad \text{et} \qquad 6 \times (e_2) \iff 2x + 3y = \frac{17}{6}$$

Combinaison linéaire : en soustrayant les deux équations obtenues, tout disparaît à gauche.

$$(2x + 3y) - (2x + 3y) = \frac{17}{6} - 0 \iff 0 = \frac{17}{6}$$

Cette égalité est fausse : le système n'a aucune solution.

$$\boxed{S = \varnothing}$$

Interprétation : les deux droites ont le même vecteur directeur mais des ordonnées à l'origine différentes : elles sont **strictement parallèles**, donc sans point commun.

2. $\begin{cases} \frac{5}{3}x - \frac{1}{4}y = \frac{35}{8} \ (e_1) \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{20}y = \frac{7}{8} \ (e_2) \end{cases}$ On simplifie de la même manière :

$$\frac{3}{5} \times (e_1) \iff x - \frac{3}{20}y = \frac{21}{8} \qquad \text{et} \qquad 3 \times (e_2) \iff x - \frac{3}{20}y = \frac{21}{8}$$

Les deux équations sont *identiques* : toute solution de l'une est solution de l'autre.

$$\boxed{S = \left\{ \left(x \,;\, \frac{20}{3}\left(x - \frac{21}{8} \right) \right),\ x \in \mathbb{R} \right\}}$$

Interprétation : les deux droites sont **confondues**, et le système admet une infinité de solutions.

3. $\begin{cases} x\sqrt{2} + y = 4 \ (e_1) \\ 2x - y\sqrt{2} = 0 \ (e_2) \end{cases}$ **Substitution**.

$$(e_2) \iff y\sqrt{2} = 2x \iff y = \frac{2x}{\sqrt{2}} = x\sqrt{2}$$

$$x\sqrt{2} + y = 4 \iff x\sqrt{2} + x\sqrt{2} = 4 \iff 2x\sqrt{2} = 4 \iff x = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Puis $y = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.

$$\boxed{S = \left\{ \left(\sqrt{2} \,;\, 2 \right) \right\}}$$

4. $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 3 \ (e_1) \\ x^2 + 2y^2 = 22 \ (e_2) \end{cases}$ Ce système n'est pas linéaire, mais il le devient si l'on pose

$$X = x^2 \qquad \text{et} \qquad Y = y^2$$

Le système s'écrit alors $\begin{cases} 3X - Y = 3 \ (e_1) \\ X + 2Y = 22 \ (e_2) \end{cases}$, que l'on résout par **combinaison linéaire** :

$$2 \times (e_1) + (e_2) \quad \text{donne :} \quad 2 \times (3X - Y) + (X + 2Y) = 2 \times 3 + 22$$

$$\iff 6X - 2Y + X + 2Y = 28 \iff 7X = 28 \iff X = 4$$

Puis (e_1) donne $Y = 3 \times 4 - 3 = 9$.

Il reste à **revenir aux inconnues initiales** : $x^2 = 4$ donne $x = 2$ ou $x = -2$, et $y^2 = 9$ donne $y = 3$ ou $y = -3$. Toutes les combinaisons conviennent :

$$\boxed{S = \{(2\,;3)\,;\ (2\,;-3)\,;\ (-2\,;3)\,;\ (-2\,;-3)\}}$$

Piège classique : chaque carré fournit **deux** valeurs, d'où quatre couples et non un seul.

5. $\begin{cases} \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{5}{y-2} = -4 \ (e_1) \\ \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{2}{y-2} = 13 \ (e_2) \end{cases}$ Les valeurs $x = -1$ et $y = 2$ sont interdites. On pose

$$X = \frac{1}{x+1} \qquad \text{et} \qquad Y = \frac{1}{y-2}$$

Le système devient $\begin{cases} 2X - 5Y = -4 \ (e_1) \\ 3X + 2Y = 13 \ (e_2) \end{cases}$, résolu par **<u>combinaison linéaire</u>** :

$$2 \times (e_1) + 5 \times (e_2) \quad \text{donne :} \quad 2 \times (2X - 5Y) + 5 \times (3X + 2Y) = 2 \times (-4) + 5 \times 13$$
$$\iff 4X - 10Y + 15X + 10Y = 57 \iff 19X = 57 \iff X = 3$$

Puis (e_1) donne $2 \times 3 - 5Y = -4$, soit $Y = 2$.

Retour aux inconnues : $\dfrac{1}{x+1} = 3$ donne $x + 1 = \dfrac{1}{3}$, soit $x = -\dfrac{2}{3}$; et $\dfrac{1}{y-2} = 2$ donne $y - 2 = \dfrac{1}{2}$, soit $y = \dfrac{5}{2}$. Ces deux valeurs sont bien autorisées.

$$\boxed{S = \left\{\left(-\frac{2}{3}\,;\frac{5}{2}\right)\right\}}$$

EXERCICE 28 ⋆⋆

1. Notons a le prix d'une place adulte et e celui d'une place enfant, en euros.

$$\begin{cases} 3a + 2e = 37 \ (e_1) \\ 2a + 5e = 43 \ (e_2) \end{cases}$$

<u>Combinaison linéaire</u> : pour éliminer e, on multiplie (e_1) par 5 et (e_2) par 2.

$$5 \times (e_1) - 2 \times (e_2) \quad \text{donne :} \quad 5 \times (3a + 2e) - 2 \times (2a + 5e) = 5 \times 37 - 2 \times 43$$
$$\iff 15a + 10e - 4a - 10e = 185 - 86 \iff 11a = 99 \iff a = 9$$

En reprenant (e_1) : $2e = 37 - 27 = 10$, donc $e = 5$.

$$\boxed{\text{Une place adulte coûte 9 €, une place enfant 5 €.}}$$

2. Notons L la longueur et ℓ la largeur, en mètres. Le périmètre donne $2(L + \ell) = 34$, soit $L + \ell = 17$.

$$\begin{cases} L + \ell = 17 \ (e_1) \\ L - \ell = 5 \ (e_2) \end{cases}$$

<u>Combinaison linéaire</u> : les coefficients de ℓ sont opposés.

$$(e_1) + (e_2) \quad \text{donne :} \quad (L + \ell) + (L - \ell) = 17 + 5 \iff 2L = 22 \iff L = 11$$

Puis $\ell = 17 - 11 = 6$.

$$\boxed{\text{Le terrain mesure 11 m sur 6 m.}}$$

3. Notons x le nombre de pièces de 2 € et y celui de pièces de 5 €.

$$\begin{cases} x+y=60 \ (e_1) \\ 2x+5y=180 \ (e_2) \end{cases}$$

Substitution : x s'isole immédiatement dans (e_1).

$$(e_1) \iff x=60-y$$

$2x+5y=180 \iff 2(60-y)+5y=180 \iff 120-2y+5y=180 \iff 3y=60 \iff y=20$

Puis $x=60-20=40$.

Il y a 40 pièces de 2 € et 20 pièces de 5 €.

4. Notons p l'âge du père et f celui du fils, en années.

$$\begin{cases} p=3f \ (e_1) \\ p+12=2(f+12) \ (e_2) \end{cases}$$

Substitution : (e_1) donne déjà p en fonction de f.

$$p+12=2(f+12) \iff 3f+12=2f+24 \iff f=12$$

Puis $p=3\times 12=36$.

Le fils a 12 ans et le père 36 ans.

Vérification : dans 12 ans, ils auront 24 et 48 ans, et l'on a bien $48=2\times 24$.

EXERCICE 29 - PYTHON ⋆⋆

1. L'appel calcule $3\times 4-(-6)\times(-2)=12-12$, donc

`determinant(3, -2, -6, 4)` renvoie 0

Le déterminant étant nul, les vecteurs $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$ sont colinéaires — c'est le cas a) de l'exercice 14.

2.
```
def sont_colineaires(x, y, xp, yp):
    return determinant(x, y, xp, yp) == 0
```

On n'écrit pas `if ... : return True else: return False` : le test `== 0` produit déjà directement un booléen.

3. Il faut d'abord calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire les différences des coordonnées, puis tester leur colinéarité :

```
def alignes(xA, yA, xB, yB, xC, yC):
    return sont_colineaires(xB - xA, yB - yA, xC - xA, yC - yA)
```

4. On obtient successivement :

```
False    True    False    True
```

ce qui correspond bien aux réponses de l'exercice 16 : seuls les triplets b) et d) sont alignés.

5. La condition manquante teste la nullité du déterminant, c'est-à-dire le parallélisme :

```
def intersection(a, b, c, ap, bp, cp):
    d = determinant(a, b, ap, bp)
    if d == 0:
        return None
    x = (b*cp - bp*c) / d
    y = (ap*c - a*cp) / d
    return (x, y)
```

6. Pour les cas 1 et 2 de l'exercice 24, la fonction renvoie `None`. Pour le cas 3 :

`intersection(28, 95, -6286, 45, -1, -3648)` $\longrightarrow$ `(82.0, 42.0)`

On retrouve bien le point $(82\,;42)$.

Limite du programme : il ne distingue pas les droites strictement parallèles des droites confondues, alors que le premier cas n'a aucune solution et le second une infinité. Il faudrait pour cela tester en plus si un point de la première droite vérifie la seconde équation.

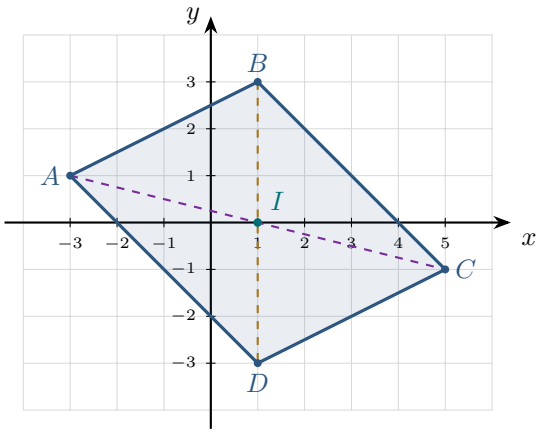
7. Les nombres décimaux sont stockés de façon approchée en machine : un calcul qui devrait donner exactement 0 peut produire une valeur minuscule mais non nulle, comme $1{,}1 \times 10^{-16}$. Le test `d == 0` serait alors faux, et le programme conclurait à tort que les droites sont sécantes. On remplace donc l'égalité stricte par un test de proximité :

```
    if abs(d) < 1e-10:
        return None
```

Exercices de synthèse

EXERCICE 30 ⋆⋆

Partie A : nature du quadrilatère $ABCD$



1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-3)\\3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5-1\\-1-(-3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

   On constate que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

2. $AB = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}47$ et, avec $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$, $BC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$.

   Ces deux côtés consécutifs n'ont pas la même longueur :

   $ABCD$ n'est pas un losange.

3. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}$ donne $AC=\sqrt{68}=2\sqrt{17}\approx 8{,}25$, et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix}$ donne $BD=6$.
Les diagonales n'ont pas la même longueur :

$$\boxed{ABCD \text{ n'est pas un rectangle : c'est un parallélogramme quelconque.}}$$

4. Le centre est le milieu de $[AC]$:

$$I\left(\frac{-3+5}{2}\,;\frac{1-1}{2}\right)=\boxed{I(1\,;0)}$$

Vérification avec $[BD]$: $\left(\frac{1+1}{2}\,;\frac{3-3}{2}\right)=(1\,;0)$.

Partie B : équations de droites

5. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ se simplifie en $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, donc $b=-2$ et $a=1$: l'équation est $x-2y+c=0$. Avec $A(-3\,;1)$:

$$-3-2+c=0 \iff c=5 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{(AB): x-2y+5=0}$$

Vérification avec $B(1\,;3)$: $1-6+5=0$.

6. $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$, donc (CD) a le même vecteur directeur et son équation est de la forme $x-2y+c=0$. Avec $D(1\,;-3)$:

$$1+6+c=0 \iff c=-7 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{(CD): x-2y-7=0}$$

Les deux équations ont les mêmes coefficients a et b mais des constantes différentes ($5\neq -7$) :

$$\boxed{(AB) \text{ et } (CD) \text{ sont strictement parallèles.}}$$

On retrouve bien le parallélisme des côtés opposés du parallélogramme.

7. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}$ se simplifie en $\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$, donc $b=-4$ et $a=-1$: l'équation est $-x-4y+c=0$. Avec $A(-3\,;1)$: $3-4+c=0$, donc $c=1$:

$$\boxed{(AC): x+4y-1=0}$$

B et D ont la même abscisse 1 : la droite est verticale.

$$\boxed{(BD): x-1=0}$$

8. $E(9\,;7)$: $9-14+5=0$, donc $\boxed{E\in(AB)}$.
$F(2\,;4)$: $2-8+5=-1\neq 0$, donc $\boxed{F\notin(AB)}$.

9. On cherche le point de (AB) tel que $y=0$:

$$x-2\times 0+5=0 \iff x=-5 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{(-5\,;0)}$$

Partie C : intersection des diagonales

10. Notons $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (AC) et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (BD) :

$$\det(\vec{u}\,;\vec{v})=4\times 1-0\times(-1)=4\neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\text{les droites sont sécantes.}}$$

11. Le système s'écrit $\begin{cases} x+4y-1=0 \\ x-1=0 \end{cases}$. La seconde équation donne directement $x=1$, et en reportant dans la première :

$$1+4y-1=0 \iff 4y=0 \iff y=0$$

$$\boxed{\text{Le point d'intersection est } (1\,;0).}$$

12. C'est exactement le point I trouvé à la question 4 :

$$\boxed{\text{les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.}}$$

La résolution du système et le calcul du milieu constituent donc deux méthodes indépendantes qui se confirment mutuellement.

EXERCICE 31 ⋆⋆

Partie A : trois droites

1. On lit $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ sur chaque équation :

$$d : \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}} \qquad d' : \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad d'' : \boxed{\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}}$$

2. $\det\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -2\times 1 - 4\times 3 = -14 \neq 0$, donc $\boxed{d \text{ et } d' \text{ sont sécantes.}}$
La seconde équation donne $x=4y-10$. En reportant dans la première :

$$3(4y-10)+2y-12=0 \iff 12y-30+2y-12=0 \iff 14y=42 \iff y=3$$

puis $x=4\times 3-10=2$.

$$\boxed{K(2\,;3)}$$

Vérification : $3\times 2+2\times 3-12=6+6-12=0$.

3. $\det\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = -2\times 6-(-4)\times 3=-12+12=0$: les droites d et d'' sont **parallèles**.
Sont-elles confondues ? En multipliant l'équation de d par 2, on obtient $6x+4y-24=0$, alors que d'' a pour équation $6x+4y+5=0$. Les constantes diffèrent, donc

$$\boxed{d \text{ et } d'' \text{ sont strictement parallèles.}}$$

4. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ impose $b=-1$ et $a=1$: l'équation est $x-y+c=0$. Avec $K(2\,;3)$:

$$2-3+c=0 \iff c=1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{x-y+1=0}$$

Partie B : une application

5. Le coût est composé d'une part fixe et d'une part proportionnelle au nombre de séances :

$$\boxed{y_A=3n+12} \qquad \text{et} \qquad \boxed{y_B=1{,}5n+30}$$

6. Ce sont deux équations réduites de droites, de coefficients directeurs respectifs 3 et 1,5, donc de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1{,}5\end{pmatrix}$:

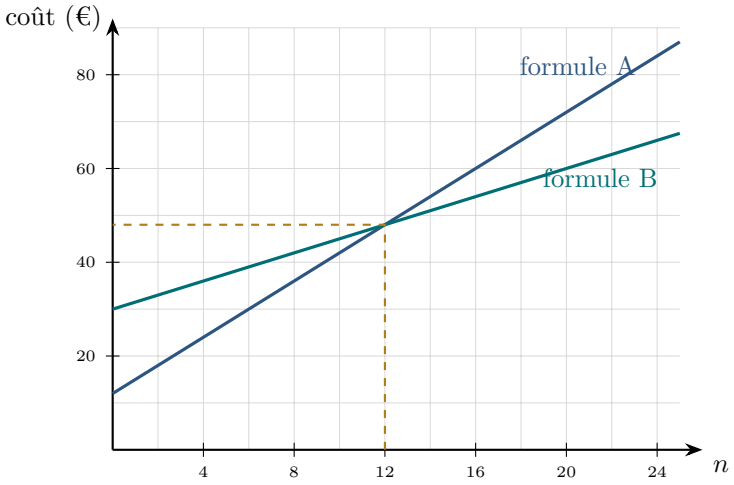
$$\det(\vec{u};\vec{v}) = 1\times 1{,}5 - 1\times 3 = -1{,}5 \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\text{les droites sont sécantes.}}$$

7. Les deux formules coûtent le même prix lorsque $y_A = y_B$:

$$3n + 12 = 1{,}5n + 30 \iff 1{,}5n = 18 \iff n = 12$$

puis $y_A = 3\times 12 + 12 = 48$.

$$\boxed{\text{Les deux formules reviennent au même pour 12 séances, soit 48 €.}}$$



8. Pour $n = 20$ séances :

$$y_A = 3\times 20 + 12 = 72 \text{ €} \qquad \text{et} \qquad y_B = 1{,}5\times 20 + 30 = 60 \text{ €}$$

$$\boxed{\text{Il faut conseiller la formule B, moins chère de 12 €.}}$$

Lecture graphique : au-delà de 12 séances, la droite de la formule B passe en dessous de celle de la formule A. La formule A n'est intéressante que pour une pratique occasionnelle.

EXERCICE 32 ⋆⋆

1. **Réponse A.** $\det(\vec{u};\vec{v}) = 2\times 15 - (-6)\times(-5) = 30 - 30 = 0$: les vecteurs sont colinéaires. La réponse C est fausse car $\vec{v} = -3\vec{u}$: le coefficient étant négatif, ils sont de *sens contraire*.
2. **Réponse A.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-1\\8-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$. La réponse B additionne les coordonnées au lieu de les soustraire, la réponse C inverse le sens du vecteur.
3. **Réponse B.** $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.
4. **Réponse B.** Avec $a = 5$ et $b = -2$, le vecteur directeur est $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$. La réponse A est le piège classique (lire $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$).
5. **Réponse A.** Tous les points de cette droite ont la même ordonnée 4 : la droite est horizontale, donc parallèle à l'axe des abscisses. Elle ne passe pas par l'origine, puisque $0 \neq 4$.

6. **Réponse C.** La seconde équation est exactement le double de la première : les deux droites sont confondues, et tout point de la droite $x + y = 5$ est solution.

7. **Réponse A.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ donnent $\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = 2\times(-2)-(-1)\times 4 = -4+4 = 0$: les points sont alignés.

8. **Réponse B.** Un déterminant non nul signifie que les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, donc que les droites ne sont pas parallèles : elles sont sécantes.

EXERCICE 33 ⋆⋆⋆

1. On développe le membre de droite :

$$(x-y)^2 + 4xy = x^2 - 2xy + y^2 + 4xy = x^2 + 2xy + y^2 = \boxed{(x+y)^2}$$

L'égalité est donc vraie pour tous réels x et y.

2. On sait que $x - y = 6$ et $xy = 216$. L'égalité précédente donne :

$$(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy = 6^2 + 4\times 216 = 36 + 864 = 900$$

Donc $x + y = 30$ **ou** $x + y = -30$: un carré égal à 900 admet deux racines opposées.

Premier cas : $\begin{cases} x+y=30 \\ x-y=6 \end{cases}$ donne $2x = 36$, soit $x = 18$ et $y = 12$.

Second cas : $\begin{cases} x+y=-30 \\ x-y=6 \end{cases}$ donne $2x = -24$, soit $x = -12$ et $y = -18$.

$$\boxed{\text{Les deux couples solutions sont } (18\,;12) \text{ et } (-12\,;-18).}$$

Vérification du second : $(-12)-(-18) = 6$ et $(-12)\times(-18) = 216$.

Piège classique : oublier la racine négative revient à perdre la moitié des solutions.

3. Notons x et y les dimensions du terrain. Le périmètre donne $2(x+y) = 44$, soit $x + y = 22$, et l'aire donne $xy = 120$. On utilise l'égalité sous la forme annoncée :

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = 22^2 - 4\times 120 = 484 - 480 = 4$$

Donc $x - y = 2$ (on peut choisir $x \geqslant y$, ce qui écarte la valeur -2). Il reste :

$$\begin{cases} x+y=22 \\ x-y=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=12 \\ y=10 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Le terrain mesure 12 m sur 10 m.}}$$

Vérification : périmètre $2\times 22 = 44$ m et aire $12\times 10 = 120$ m^2.

4. On procède de la même manière avec $x + y = 22$ et $xy = 150$:

$$(x-y)^2 = 484 - 4\times 150 = 484 - 600 = -116$$

Or un carré ne peut pas être négatif :

$$\boxed{\text{Un tel terrain n'existe pas.}}$$

Interprétation. À périmètre fixé, l'aire d'un rectangle est maximale lorsqu'il est *carré*. Ici, le carré de périmètre 44 m a pour côté 11 m et pour aire 121 m^2 : aucune aire supérieure n'est atteignable, et $150 > 121$.

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

1. C'est exactement la question 3 de l'exercice 5. On introduit le point G dans chacun des trois vecteurs :
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}+\underbrace{\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)}_{=\vec{0}}=\boxed{3\overrightarrow{MG}}$$

2. L'égalité étant valable pour tout point M, on choisit $M=A$. Comme $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$:
$$\vec{0}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}\qquad\text{soit}\qquad\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}}$$

3. Le point A' étant le milieu de $[BC]$, on a $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$. On introduit alors A' dans les deux vecteurs :
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B}\right)+\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'C}\right)=2\overrightarrow{AA'}+\underbrace{\left(\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}\right)}_{=\vec{0}}=\boxed{2\overrightarrow{AA'}}$$

4. En rapprochant les deux résultats : $3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AA'}$, donc
$$\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}}$$
Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont colinéaires et partent du même point A :
$$\boxed{G\text{ appartient à la médiane }(AA').}$$

5. La relation $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ est **symétrique** : elle joue le même rôle pour les trois sommets. En reprenant exactement le même raisonnement avec $M=B$, on obtient $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$, donc $G\in(BB')$; puis avec $M=C$, $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$, donc $G\in(CC')$.
$$\boxed{\text{Les trois médianes passent toutes par } G\text{ : elles sont concourantes.}}$$
Le point G est le **centre de gravité** du triangle, situé aux deux tiers de chaque médiane en partant du sommet.

6. (a) En notant $G(x\,;y)$, la relation $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ donne :
$$\begin{cases}(-2-x)+(4-x)+(1-x)=0\\(1-y)+(3-y)+(-4-y)=0\end{cases}\iff\begin{cases}3-3x=0\\-3y=0\end{cases}\qquad\text{soit}\qquad\boxed{G(1\,;0)}$$
On retrouve la formule usuelle : le centre de gravité a pour coordonnées les moyennes de celles des trois sommets.

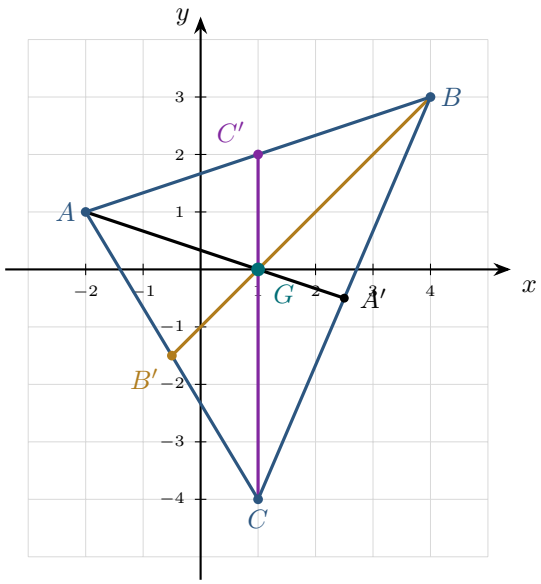
(b) A' est le milieu de $[BC]$: $A'\left(\dfrac{4+1}{2}\,;\dfrac{3-4}{2}\right)=\boxed{A'(2{,}5\,;-0{,}5)}$

$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1-(-2)\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}4{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix}$, donc
$$\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\boxed{\overrightarrow{AG}}$$

(c) $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}4{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix}$ se simplifie en $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, donc $b=-3$ et $a=-1$: l'équation est $-x-3y+c=0$.
Avec $A(-2\,;1)$: $2-3+c=0$, donc $c=1$:

$$\boxed{(AA') : x+3y-1=0}$$

On vérifie que $G(1\,;0)$ appartient bien à cette droite : $1+0-1=0$.



Les trois médianes (AA') en noir, (BB') en ocre et (CC') en violet se coupent bien au point $G(1\,;0)$.