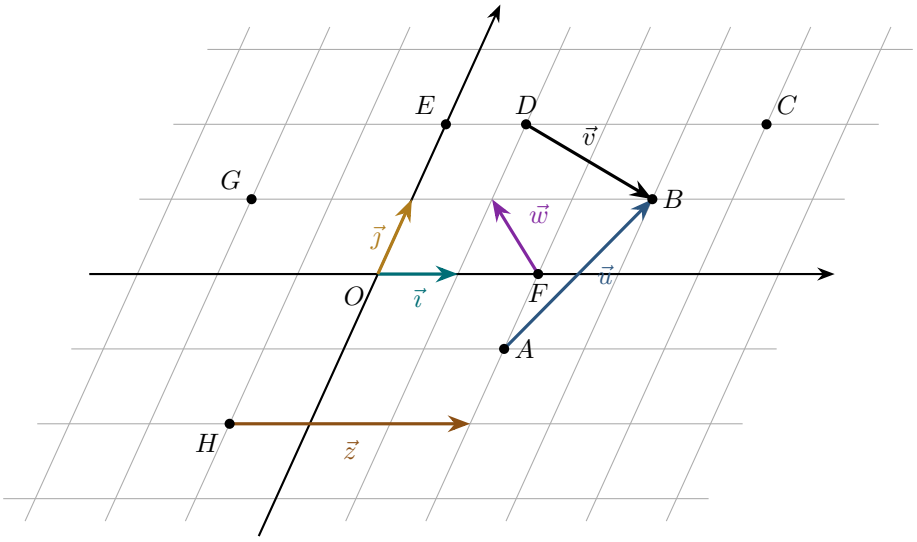
EXERCICES – CHAPITRE 3

GÉOMÉTRIE CARTÉSIENNE

Calcul vectoriel et relation de Chasles

EXERCICE 1 ⋆



D'après le repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ci-dessus, déterminer :

1. Les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H.
2. Les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{z}$.
3. Les coordonnées des vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$, $2\vec{w}+\vec{u}$ et $\vec{z}-2\vec{v}$.
4. Lire sur la figure les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{GD}$, puis les retrouver par le calcul.

EXERCICE 2 ⋆

1. Simplifier les écritures suivantes en utilisant la relation de Chasles :

   a) $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

   b) $\vec{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$

   c) $\vec{w}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AB}$

   d) $\vec{t}=\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{TR}-\overrightarrow{US}+\overrightarrow{UT}$

2. Démontrer que pour tous les points A, B et C :

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$$

3. $ABCD$ est un parallélogramme et M un point quelconque. Montrer que :

$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=\vec{0}$$

EXERCICE 3 ⋆

Soit ABC un triangle quelconque.

1. Construire le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Montrer que $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.
2. Construire le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$. Montrer que C est le milieu de $[ED]$.
3. On considère les points M et N tels que :
$$3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM} = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad -2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} = \vec{0}$$
   (a) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, puis placer le point M.
   (b) En utilisant la même méthode, placer le point N.
   (c) Soit I le milieu de $[AB]$. Exprimer $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, et en déduire que I est aussi le milieu de $[MN]$.

EXERCICE 4 ⋆

Soit ABC un triangle, E un point tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, I un point tel que $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et F un point tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

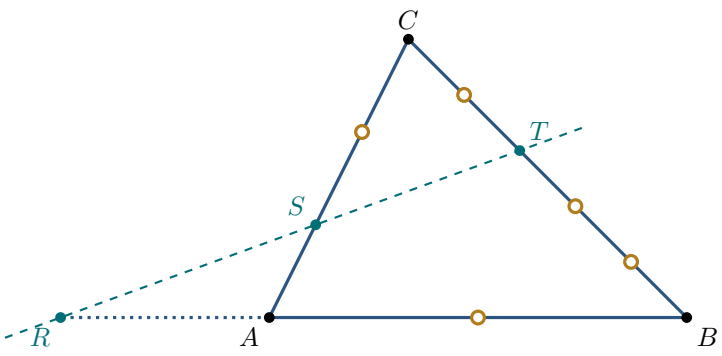
1. Faire une figure.
2. Montrer à l'aide de la relation de Chasles que :
$$\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{BA} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{IF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$$
3. En déduire que les points I, E et F sont alignés.

EXERCICE 5 ⋆⋆

1. Démontrer que, pour tous points A, B, C et D du plan :
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$
2. Soit I le milieu de $[AB]$. Montrer que, pour tout point M du plan :
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$$
3. Soit ABC un triangle, et G le point défini par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Montrer que, pour tout point M du plan :
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\,\overrightarrow{MG}$$
4. En appliquant l'égalité précédente à un point bien choisi, exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

EXERCICE 6 ⋆⋆

On considère le triangle ABC ci-dessous. Le point R appartient à la droite (AB), le point S au segment $[AC]$ et le point T au segment $[BC]$. Les points ocre marquent des partages en parts égales.



On veut montrer dans cet exercice que R, S et T sont alignés.

1. À partir de la figure, déterminer les valeurs des réels α, β et γ tels que :

$$\overrightarrow{AR} = \alpha\,\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AS} = \beta\,\overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{BT} = \gamma\,\overrightarrow{BC}$$

On prendra garde au signe de α : le point R n'appartient pas au segment $[AB]$.

2. Montrer à l'aide de la relation de Chasles que :
   (a) $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$;
   (b) $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire une expression du vecteur $\overrightarrow{RT}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4. Vérifier que $\overrightarrow{RS} = \frac{5}{9}\overrightarrow{RT}$.
5. Conclure.

Coordonnées, normes et distances

EXERCICE 7 ⋆

Le plan est muni d'un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On donne les points

$$A(2\,;-3) \qquad B(-1\,;4) \qquad C(5\,;0) \qquad D(-2\,;-2)$$

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs :
   a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ b) $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}$ c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$
3. Vérifier par le calcul que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$. Quel résultat du cours retrouve-t-on ainsi ?

EXERCICE 8 ⋆

1. Calculer la norme de chacun des vecteurs suivants :
   a) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ b) $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ c) $\vec{w}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$ d) $\vec{z}\begin{pmatrix}-5\\-12\end{pmatrix}$
2. On donne les points $A(1\,;2)$, $B(5\,;5)$ et $C(1\,;8)$. Calculer AB, BC et AC, puis préciser la nature du triangle ABC.
3. On donne les points $D(0\,;0)$, $E(4\,;2)$ et $F(2\,;6)$. Calculer DE, EF et DF, puis, à l'aide de la réciproque du théorème de Pythagore, préciser la nature du triangle DEF.

EXERCICE 9 ⋆

Dans un repère, on donne $A(-1\,;2)$, $B(3\,;1)$ et $C(0\,;-2)$.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.
3. Vérifier que les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu. Quelle propriété retrouve-t-on ?

4. Calculer AB et AC. Que peut-on en déduire sur la nature du quadrilatère $ABDC$?

EXERCICE 10 ⋆

Dans un repère, on donne les points $A(-2\,;1)$, $B(1\,;3)$, $C(3\,;0)$ et $D(0\,;-2)$.

1. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{DC}$. Que peut-on en déduire ?
2. Calculer les longueurs AB, BC, CD et DA. Préciser la nature du quadrilatère $ABCD$.
3. Calculer les longueurs des diagonales AC et BD. Affiner alors la réponse précédente.
4. Déterminer les coordonnées du centre de ce quadrilatère.

EXERCICE 11 ⋆

Dans un repère, on donne les points $M(0\,;-3)$, $N(2\,;3)$, $P(-9\,;0)$ et $Q(-1\,;-1)$.

1. Calculer les coordonnées des points A et B tels que :

$$\overrightarrow{NA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MQ}$$

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PB}$.
3. Démontrer que les points P, A et B sont alignés.

EXERCICE 12 ⋆

Dans un repère, on donne les points $A(1\,;-1)$, $B(-1\,;-2)$ et $C(-2\,;2)$.

1. Déterminer les coordonnées du point G vérifiant :

$$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

2. Déterminer les coordonnées du point D vérifiant :

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$$

3. Faire une figure. Que peut-on conjecturer pour les points B, G et D ? Démontrer cette conjecture.

EXERCICE 13 ⋆⋆

Dans un repère, on donne les points $A(-3\,;2)$ et $B(5\,;-4)$.

1. Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.
2. Déterminer les coordonnées du point A', symétrique de A par rapport à B.
3. Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
4. Déterminer les coordonnées du point N tel que $2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} = \vec{0}$.
5. Démontrer que les points I, M et N sont alignés. Pouvait-on le prévoir sans aucun calcul ?

Colinéarité, alignement et parallélisme

EXERCICE 14 ⋆

Dans chaque cas, calculer $\det(\vec{u};\vec{v})$ et dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-9\end{pmatrix}$

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-12\end{pmatrix}$

e) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$

f) $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$

Pour les couples colinéaires, préciser le réel λ tel que $\vec{v}=\lambda\vec{u}$, et dire si les deux vecteurs ont le même sens.

EXERCICE 15 ⋆

1. Dans chaque cas, déterminer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

   a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

   b) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{6}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}$

2. Dans chaque cas, déterminer la ou les valeurs de m pour lesquelles $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

   a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}m\\3\end{pmatrix}$

   b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-m\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

   c) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\m\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$

   d) $\vec{u}\begin{pmatrix}27\\2m\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2m\\3\end{pmatrix}$

EXERCICE 16 ⋆

1. On donne les points $A(-2;2)$, $B(1;5)$, $C(-1;-2)$ et $D(7;6)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ? Sont-elles confondues ?
2. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les points M, N et P sont alignés :

   (a) $M(2;3)$, $N(5;7)$, $P(-6;-8)$

   (b) $M(4;-1)$, $N(7;-3)$, $P(-5;5)$

   (c) $M(-2;3)$, $N(-3;7)$, $P(-5;14)$

   (d) $M\left(2;-\frac{1}{3}\right)$, $N(3;-1)$, $P(0;1)$

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. On donne $A(1;2)$, $B(4;-1)$ et $C(m;5)$. Déterminer la valeur de m pour laquelle les points A, B et C sont alignés.
2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $\vec{u}\begin{pmatrix}m\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\m\end{pmatrix}$ sont colinéaires.
3. On donne $A(0;1)$, $B(2;5)$, $C(2;-1)$ et $D(m;3)$. Déterminer la valeur de m pour laquelle les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
4. Pour cette valeur de m, les droites (AB) et (CD) sont-elles confondues ?

EXERCICE 18 ⋆⋆

Soit ABC un triangle. On note I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[AC]$ et K le milieu de $[BC]$.

Partie A : démonstration vectorielle

1. Exprimer $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire, à l'aide de la relation de Chasles, que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
3. Quel théorème de collège vient-on de redémontrer ?

Partie B : vérification dans un repère

On prend $A(-2\,;1)$, $B(4\,;3)$ et $C(0\,;-3)$.

4. Calculer les coordonnées de I, J et K.
5. Vérifier par le calcul que $\overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{IJ}$.
6. Démontrer que le quadrilatère $AIKJ$ est un parallélogramme.

Équations de droite

EXERCICE 19 ⋆

On considère la droite d d'équation cartésienne $3x - 2y + 6 = 0$.

1. Les points $A(0\,;3)$, $B(2\,;6)$ et $C(-2\,;1)$ appartiennent-ils à d ? Justifier par un calcul.
2. Donner un vecteur directeur de d.
3. Vérifier que $\overrightarrow{AB}$ est bien colinéaire à ce vecteur directeur.
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de d avec les axes du repère.
5. Donner un vecteur directeur de chacune des droites suivantes :

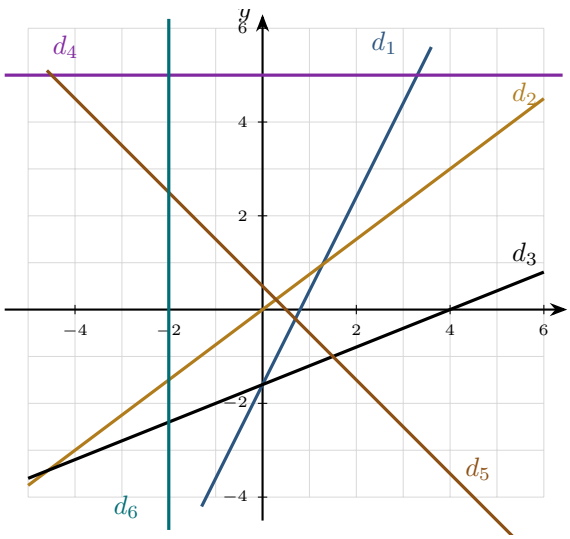
   a) $-x + 4y - 8 = 0$ b) $y = 5$ c) $x = -2$

EXERCICE 20 ⋆

Dans un repère d'origine O, on considère les points $A(1\,;5)$, $B(-2\,;4)$, $C(1\,;4)$ et $D(-3\,;5)$. Déterminer une équation cartésienne de :

1. (AB) 2. (BC) 3. (AC) 4. (OD)

EXERCICE 21 ⋆



Associer chacune des droites à son équation :

a) $y = \frac{2}{5}x - \frac{8}{5}$ c) $-3x + 4y = 0$ e) $y = 2x - \frac{8}{5}$

b) $y = 5$ d) $2x + 2y = 1$ f) $x = -2$

EXERCICE 22 ⋆

1. Donner, lorsqu'elle existe, l'équation réduite de chacune des droites suivantes :

   a) $2x + 3y - 6 = 0$ b) $-x + 5y + 10 = 0$ c) $4x - 8 = 0$ d) $3y + 9 = 0$

   Pour l'une d'entre elles, l'équation réduite n'existe pas : laquelle, et pourquoi ?

2. Donner une équation cartésienne de chacune des droites suivantes :

   a) $y = 3x - 1$ b) $y = -\frac{1}{2}x + 4$ c) $x = 5$

3. Tracer dans un même repère les droites des questions 1.a) et 1.b).

EXERCICE 23 ⋆⋆

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(2\,;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $B(-1\,;4)$ et parallèle à la droite d d'équation $2x - 7y + 1 = 0$.
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite (CD), où $C(0\,;-3)$ et $D(4\,;5)$.
4. En déduire une équation cartésienne de la droite passant par $E(1\,;1)$ et parallèle à (CD).
5. Le point $F(-2\,;-7)$ appartient-il à (CD) ?

EXERCICE 24 ⋆⋆

Dans chacun des cas suivants, préciser la position relative des droites (AB) et (CD), et déterminer leur point d'intersection lorsqu'il existe :

1. $A(4\,;1)$, $B(5\,;7)$, $C(2\,;-6)$ et $D(4\,;6)$.
2. $A(25\,;40)$, $B(15\,;30)$, $C(-20\,;-5)$ et $D(40\,;55)$.
3. $A(462\,;-70)$, $B(177\,;14)$, $C(88\,;312)$ et $D(86\,;222)$.

Systèmes d'équations

EXERCICE 25 ⋆

Résoudre les systèmes suivants. On précisera à chaque fois la méthode employée (substitution ou combinaison linéaire).

1. $\begin{cases}2x + y = -2\\5x + 4y = 1\end{cases}$ 2. $\begin{cases}4x - 5y = 2\\-x + 3y = 3\end{cases}$

3. $\begin{cases} -x + 20y = 1 \\ 2x - 60y = -3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 12x + 7y = 41 \\ 4x - 15y = 239 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ x - \dfrac{5}{2}y = 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{1}{10}x + \dfrac{1}{20}y = 1 \\ \dfrac{2}{5}x - \dfrac{1}{10}y = 10 \end{cases}$

EXERCICE 26 ⋆

Résoudre les systèmes suivants.

7. $\begin{cases} 2x - \sqrt{3}\,y = 0 \\ \sqrt{3}\,x - 3y = -1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}5y = 4 \\ x - y = 6 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ 2x + 5y = 14 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x + 5y - 5 = 0 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 6x + 2y = 10 \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{3}y = 1 \\ \dfrac{x + 2y}{7} = 1 \end{cases}$

Pour le système 11., interpréter géométriquement le résultat obtenu.

EXERCICE 27 ⋆⋆

Résoudre les systèmes suivants. Pour les deux premiers, on interprétera géométriquement le résultat en termes de droites.

1. $\begin{cases} \dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{4}y = 0 \\ \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{2}y = \dfrac{17}{36} \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{5}{3}x - \dfrac{1}{4}y = \dfrac{35}{8} \\ \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{20}y = \dfrac{7}{8} \end{cases}$

3. $\begin{cases} x\sqrt{2} + y = 4 \\ 2x - y\sqrt{2} = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + 2y^2 = 22 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{5}{y-2} = -4 \\ \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{2}{y-2} = 13 \end{cases}$

EXERCICE 28 ⋆⋆

Chacune des situations suivantes se traduit par un système de deux équations à deux inconnues. On précisera à chaque fois les inconnues choisies, on écrira le système, puis on le résoudra.

1. Au cinéma, 3 places adulte et 2 places enfant coûtent 37 €, tandis que 2 places adulte et 5 places enfant coûtent 43 €. Quel est le prix de chaque place ?
2. Un terrain rectangulaire a un périmètre de 34 m, et sa longueur dépasse sa largeur de 5 m. Quelles sont ses dimensions ?
3. Une tirelire contient 60 pièces, des pièces de 2 € et des pièces de 5 €, pour un total de 180 €. Combien y a-t-il de pièces de chaque sorte ?
4. Un père a aujourd'hui trois fois l'âge de son fils. Dans 12 ans, il n'aura plus que le double de son âge. Quels sont leurs âges actuels ?

EXERCICE 29 - PYTHON ⋆⋆

On souhaite automatiser les tests de colinéarité et le calcul du point d'intersection de deux droites. On dispose de la fonction suivante :

```
def determinant(x, y, xp, yp):
    return x*yp - xp*y
```

1. Que renvoie l'appel `determinant(3, -2, -6, 4)` ? Interpréter ce résultat.
2. Écrire une fonction `sont_colineaires(x, y, xp, yp)` qui renvoie `True` si les deux vecteurs sont colinéaires, et `False` sinon. On réutilisera la fonction `determinant`.
3. Écrire une fonction `alignes(xA, yA, xB, yB, xC, yC)` qui renvoie `True` si les trois points sont alignés. Quelles coordonnées de vecteurs faut-il calculer au préalable ?
4. Tester cette fonction sur les quatre triplets de points de l'exercice 16.
5. Recopier et compléter la fonction suivante, qui renvoie les coordonnées du point d'intersection des droites d'équations $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$, ou `None` si ce point n'existe pas :

```
def intersection(a, b, c, ap, bp, cp):
    d = determinant(a, b, ap, bp)
    if ... :
        return None
    x = (b*cp - bp*c) / d
    y = (ap*c - a*cp) / d
    return (x, y)
```

6. Tester cette fonction sur les trois cas de l'exercice 24.
7. Le test d'égalité à 0 est délicat lorsque les coefficients sont des nombres décimaux. Expliquer pourquoi, et proposer une amélioration du test.

Exercices de synthèse

EXERCICE 30 ⋆⋆

Le plan est muni d'un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère les points

$$A(-3\,;1) \qquad B(1\,;3) \qquad C(5\,;-1) \qquad D(1\,;-3)$$

Partie A : nature du quadrilatère $ABCD$

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$?
2. Calculer les longueurs AB et BC. Le quadrilatère $ABCD$ est-il un losange ?
3. Calculer les longueurs des diagonales AC et BD. Le quadrilatère $ABCD$ est-il un rectangle ?
4. Déterminer les coordonnées du centre I de ce parallélogramme.

Partie B : équations de droites

5. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
6. Déterminer une équation cartésienne de la droite (CD), et retrouver ainsi le parallélisme établi à la question 1.
7. Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (AC) et (BD).

8. Le point $E(9\,;7)$ appartient-il à la droite (AB) ? Et le point $F(2\,;4)$?
9. Déterminer les coordonnées du point de la droite (AB) dont l'ordonnée est nulle.

Partie C : intersection des diagonales

10. Justifier que les droites (AC) et (BD) sont sécantes.
11. Résoudre le système formé par leurs deux équations cartésiennes.
12. Comparer le résultat obtenu avec celui de la question 4, et conclure.

EXERCICE 31 ⋆⋆

Partie A : trois droites

On considère les droites suivantes :

$$d : 3x + 2y - 12 = 0 \qquad d' : x - 4y + 10 = 0 \qquad d'' : 6x + 4y + 5 = 0$$

1. Donner un vecteur directeur de chacune de ces trois droites.
2. Démontrer que d et d' sont sécantes, puis déterminer les coordonnées de leur point d'intersection K.
3. Étudier la position relative de d et d''. Sont-elles confondues ?
4. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par K et de vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Partie B : une application

Un club de sport propose deux formules :

- **Formule A** : 12 € d'inscription, puis 3 € par séance ;
- **Formule B** : 30 € d'inscription, puis 1,50 € par séance.

On note n le nombre de séances effectuées dans l'année.

5. Exprimer, en fonction de n, le coût annuel y_A de la formule A et le coût annuel y_B de la formule B.
6. Interpréter chacune de ces deux expressions comme l'équation réduite d'une droite. Ces deux droites sont-elles sécantes ? Justifier à l'aide de vecteurs directeurs.
7. Déterminer, par le calcul, le nombre de séances pour lequel les deux formules reviennent au même prix, ainsi que ce prix.
8. Quelle formule conseiller à un adhérent prévoyant 20 séances dans l'année ?

EXERCICE 32 ⋆⋆

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Déterminer laquelle et justifier.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\15\end{pmatrix}$ sont	colinéaires	non colinéaires	de même sens
2. Si $A(1\,;2)$ et $B(4\,;8)$, alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées	$(3\,;6)$	$(5\,;10)$	$(-3\,;-6)$
3. La norme du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ vaut	1	5	7
4. Un vecteur directeur de la droite d'équation $5x-2y+1=0$ est	$\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$
5. La droite d'équation $y=4$ est	parallèle à (Ox)	parallèle à (Oy)	passe par l'origine
6. Le système $\begin{cases}x+y=5\\2x+2y=10\end{cases}$ admet	une unique solution	aucune solution	une infinité de solutions
7. Les points $A(1\,;1)$, $B(3\,;5)$ et $C(0\,;-1)$ sont	alignés	non alignés	confondus
8. Si $\det(\vec{u}\,;\vec{v})=7$, alors deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont	parallèles	sécantes	confondues

EXERCICE 33 ⋆⋆⋆

1. Montrer l'égalité, valable pour tous réels x et y :
$$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$$
2. La différence de deux nombres x et y est 6 et leur produit 216. Quels sont ces nombres ? *On prendra garde à ne pas oublier de solution.*
3. Trouver les dimensions d'un terrain rectangulaire de périmètre 44 m et d'aire 120 m^2. *On pourra utiliser l'égalité de la question 1 sous la forme* $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$.
4. Existe-t-il un terrain rectangulaire de périmètre 44 m et d'aire 150 m^2 ? Justifier à l'aide de la même méthode.

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.

Soit ABC un triangle. On note A' le milieu de $[BC]$, B' le milieu de $[AC]$ et C' le milieu de $[AB]$. Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont les **médianes** du triangle.

On définit le point G par la relation :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

1. Justifier, à l'aide de l'exercice 5, que pour tout point M du plan :
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\,\overrightarrow{MG}$$
2. En appliquant cette égalité au point $M = A$, montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AG}$.
3. Justifier par ailleurs que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AA'}$.
4. En déduire que $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$, puis que le point G appartient à la médiane (AA').
5. Expliquer pourquoi le même raisonnement, mené à partir de $M = B$ puis de $M = C$, montre que G appartient aussi à (BB') et à (CC'). Conclure.
6. **Vérification dans un repère.** On prend $A(-2\,;1)$, $B(4\,;3)$ et $C(1\,;-4)$.
   (a) Déterminer les coordonnées de G.
   (b) Déterminer les coordonnées de A', puis vérifier par le calcul que $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.
   (c) Déterminer une équation cartésienne de la médiane (AA') et vérifier que G lui appartient.