CORRIGÉ – CHAPITRE 4

DÉRIVATION

Taux de variation et nombre dérivé

EXERCICE 1 ⋆

On applique la définition : le taux de variation de f entre a et b vaut $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

a) $\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1} = \dfrac{7-(-2)}{3} = \dfrac{9}{3} = \boxed{3}$

b) $\dfrac{f(5)-f(2)}{5-2} = \dfrac{25-4}{3} = \boxed{7}$

c) $\dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = \dfrac{9-1}{4} = \boxed{2}$

d) $\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = \dfrac{8-0}{2} = \boxed{4}$

e) $\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1} = \dfrac{\frac{1}{4}-1}{3} = \dfrac{-\frac{3}{4}}{3} = \boxed{-\dfrac{1}{4}}$

f) $\dfrac{f(9)-f(1)}{9-1} = \dfrac{3-1}{8} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$

g) $f(-2) = 4+6 = 10$ et $f(1) = 1-3 = -2$, donc $\dfrac{-2-10}{1-(-2)} = \dfrac{-12}{3} = \boxed{-4}$

h) $f(-3) = 13$ et $f(5) = -19$, donc $\dfrac{-19-13}{5-(-3)} = \dfrac{-32}{8} = \boxed{-4}$

Remarque sur a) et h). Les deux fonctions sont **affines**, et le taux obtenu est exactement leur coefficient directeur : 3 pour $x \mapsto 3x-5$, et -4 pour $x \mapsto -4x+1$. C'est normal : le taux de variation est le coefficient directeur de la droite passant par les deux points de la courbe, et pour une fonction affine cette droite *est* la courbe. Le taux ne dépend donc pas des deux réels choisis.

EXERCICE 2 ⋆

a) $\dfrac{(3+h)^2-3^2}{h} = \dfrac{9+6h+h^2-9}{h} = \dfrac{h(6+h)}{h} = \boxed{6+h}$

Lorsque h devient très proche de 0, cette expression se rapproche de 6 : $\boxed{f'(3)=6}$.

b) $f(1+h) = (1+h)^2+2(1+h) = 1+2h+h^2+2+2h = 3+4h+h^2$ et $f(1)=3$, donc le taux vaut

$$\frac{4h+h^2}{h} = \boxed{4+h} \qquad \text{et} \qquad \boxed{f'(1)=4}$$

c) $f(2+h) = 3(2+h)^2-(2+h) = 3(4+4h+h^2)-2-h = 10+11h+3h^2$ et $f(2)=10$, donc

$$\frac{11h+3h^2}{h} = \boxed{11+3h} \qquad \text{et} \qquad \boxed{f'(2)=11}$$

d) $(1+h)^3 = 1+3h+3h^2+h^3$ et $f(1)=1$, donc

$$\frac{3h+3h^2+h^3}{h} = \boxed{3+3h+h^2} \qquad \text{et} \qquad \boxed{f'(1)=3}$$

e) $\dfrac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h} = \dfrac{\frac{2-(2+h)}{2(2+h)}}{h} = \dfrac{\frac{-h}{2(2+h)}}{h} = \boxed{-\dfrac{1}{2(2+h)}}$

Lorsque h se rapproche de 0, le dénominateur se rapproche de 4, donc $\boxed{f'(2) = -\dfrac{1}{4}}$.

f) $\dfrac{5(a+h)-4-(5a-4)}{h} = \dfrac{5a+5h-4-5a+4}{h} = \dfrac{5h}{h} = \boxed{5}$

Remarque sur f). Le taux ne dépend ni de a, ni de h : il vaut 5 partout. On retrouve le résultat du cours, à savoir que la fonction affine $x \mapsto ax+b$ a pour dérivée la fonction constante $x \mapsto a$.

EXERCICE 3 ⋆⋆

Partie A

1. D'après l'exercice 2, le taux vaut $6+h$. On complète donc directement :

h	1	0,5	0,1	0,01	−0,01	−0,1	−0,5
$\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$	7	6,5	6,1	6,01	5,99	5,9	5,5

2. Lorsque h se rapproche de 0 **par valeurs positives**, le taux se rapproche de 6 en restant supérieur à 6 ; lorsque h s'en rapproche **par valeurs négatives**, le taux se rapproche de 6 en restant inférieur à 6. Le nombre 6 est donc encadré d'aussi près que l'on veut :

$$\boxed{f'(3) = 6}$$

3. La formule du cours donne $f'(x) = 2x$, donc $f'(3) = 2 \times 3 = 6$. On retrouve bien la valeur conjecturée.

4. Pour $g(x) = \sqrt{x}$ en $a = 4$, le taux vaut $\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$:

h	1	0,1	0,01	0,001
$\dfrac{g(4+h)-g(4)}{h}$	0,2361	0,2485	0,2498	0,2500

Le taux se rapproche de 0,25, donc $\boxed{g'(4) = \dfrac{1}{4}}$.

Vérification : $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $g'(4) = \dfrac{1}{2 \times 2} = \dfrac{1}{4}$.

Partie B

5. Lorsque h est très petit, on a $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \approx f'(a)$. En multipliant les deux membres par h, il vient $f(a+h)-f(a) \approx h \times f'(a)$, puis

$$\boxed{f(a+h) \approx f(a) + h \times f'(a)}$$

6. Avec $a = 3$ et $h = 0{,}02$:

$$f(3{,}02) \approx f(3) + 0{,}02 \times f'(3) = 9 + 0{,}02 \times 6 = 9 + 0{,}12 = \boxed{9{,}12}$$

La valeur exacte est $3{,}02^2 = 9{,}1204$. L'erreur commise vaut donc $\boxed{0{,}0004}$, soit moins de un dix-millième.

7. Avec $g(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$ et $h = 0{,}1$:

$$\sqrt{4{,}1} \approx g(4) + 0{,}1 \times g'(4) = 2 + 0{,}1 \times \frac{1}{4} = \boxed{2{,}025}$$

La calculatrice donne $\sqrt{4{,}1} \approx 2{,}02485$: l'erreur est d'environ $1{,}5 \times 10^{-4}$.

8. $k(2) = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$ et $k'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, donc $k'(2) = -\dfrac{1}{4} = -0{,}25$. Avec $h = 0{,}05$:

$$\frac{1}{2{,}05} \approx 0{,}5 + 0{,}05 \times (-0{,}25) = 0{,}5 - 0{,}0125 = \boxed{0{,}4875}$$

La valeur exacte est $\dfrac{1}{2{,}05} \approx 0{,}48780$: l'erreur vaut environ 3×10^{-4}.

9. L'approximation est **bien meilleure pour** $h = 0{,}001$. En effet, plus h est petit, plus le taux de variation est proche de $f'(a)$, donc plus le remplacement de l'un par l'autre est légitime. Géométriquement, on remplace la courbe par sa tangente : cette substitution n'est acceptable qu'au voisinage immédiat du point de contact.

EXERCICE 4 ⋆⋆

1. $d(1) = 1 + 2 = 3$ et $d(3) = 9 + 6 = 15$, donc la vitesse moyenne vaut

$$\frac{d(3) - d(1)}{3 - 1} = \frac{15 - 3}{2} = \boxed{6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

2. $d(1+h) = (1+h)^2 + 2(1+h) = 1 + 2h + h^2 + 2 + 2h = 3 + 4h + h^2$, et $d(1) = 3$, donc

$$\frac{d(1+h) - d(1)}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = \boxed{4 + h}$$

3. Lorsque h devient très petit, cette expression se rapproche de 4 :

$$\boxed{\text{la vitesse instantanée à l'instant } t = 1 \text{ vaut } 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.}$$

4. $d'(t) = 2t + 2$, donc $d'(3) = \boxed{8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$ et $d'(10) = \boxed{22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$.
Vérification : $d'(1) = 2 + 2 = 4$, ce qui confirme la question 3.

5. On résout $d'(t) = 12$:

$$2t + 2 = 12 \iff 2t = 10 \iff \boxed{t = 5 \text{ s}}$$

6. Avec $a = 1$ et $h = 0{,}02$:

$$d(1{,}02) \approx d(1) + 0{,}02 \times d'(1) = 3 + 0{,}02 \times 4 = \boxed{3{,}08 \text{ m}}$$

(la valeur exacte est $1{,}02^2 + 2 \times 1{,}02 = 3{,}0804$*)*

EXERCICE 5 ⋆

1. On lit les ordonnées des quatre points marqués :

$$\boxed{f(-4) = 0 \qquad f(0) = 4 \qquad f(2) = 3 \qquad f(4) = 0}$$

2. Le nombre dérivé est le **coefficient directeur de la tangente**. On le lit en se déplaçant d'une unité vers la droite sur chaque tangente, et en mesurant le déplacement vertical :

$$\boxed{f'(-4) = 2 \qquad f'(0) = 0 \qquad f'(2) = -1 \qquad f'(4) = -2}$$

Par exemple, la tangente au point d'abscisse -4 passe par les points $(-4\,;0)$ et $(-2\,;4)$: son coefficient directeur vaut $\dfrac{4 - 0}{-2 - (-4)} = \dfrac{4}{2} = 2$.

3. La tangente est horizontale au point de coordonnées $(0\,;4)$, c'est-à-dire au sommet de la courbe. Une droite horizontale a un coefficient directeur nul, donc

$$\boxed{f'(0)=0}$$

4. $f'(-4)=2$ est positif ; $f'(2)=-1$ et $f'(4)=-2$ sont négatifs ; $f'(0)=0$.

> un nombre dérivé positif correspond à une tangente qui **monte** ;
> un nombre dérivé négatif à une tangente qui **descend**.

5. Sur $[-6\,;0]$, la courbe **monte**. Les tangentes y montent donc également, et

$$\boxed{f'(x) \text{ semble positif sur } [-6\,;0].}$$

EXERCICE 6 ⋆

1. $\boxed{g(0)=2 \qquad g(1)=0 \qquad g(2)=-2}$
2. Les tangentes en 0 et en 2 sont horizontales ; celle en 1 passe par les points $(1\,;0)$ et $(0\,;3)$, d'où un coefficient directeur $\dfrac{3-0}{0-1}=-3$:

$$\boxed{g'(0)=0 \qquad g'(1)=-3 \qquad g'(2)=0}$$

3. La tangente est horizontale aux points d'abscisses $\boxed{0 \text{ et } 2}$, c'est-à-dire aux points $(0\,;2)$ et $(2\,;-2)$.
4. Entre 0 et 2, la courbe **descend** : les tangentes y descendent aussi. Comme 0,5 appartient à cet intervalle,

$$\boxed{g'(0{,}5)<0}$$

5. Après $x=2$, la courbe **remonte** nettement, donc

$$\boxed{g'(3)>0}$$

Ces deux conjectures seront vérifiées par le calcul à l'exercice 15.

Fonction dérivée : calculs

EXERCICE 7 ⋆

On applique les dérivées usuelles ainsi que $(u+v)'=u'+v'$ et $(ku)'=ku'$. Toutes ces fonctions sont des polynômes : elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

a) $\boxed{f'(x)=0}$

b) $\boxed{f'(x)=3}$

c) $\boxed{f'(x)=-4x+3}$

d) $\boxed{f'(x)=3x^2-8x+7}$

e) $\boxed{f'(x)=-15x^2+8x-9}$

f) $\boxed{f'(x)=-2x^3+9x^2+\sqrt{3}}$

g) $\boxed{f'(x)=\dfrac{3x^2+12}{2}}$

h) $\boxed{f'(x)=5x^4}$

i) $\boxed{f'(x)=28x^3-x}$

j) $\boxed{f'(x) = \dfrac{2}{5}}$

k) $\boxed{f'(x) = 12x^2 - 12x + 2}$

l) $\boxed{f'(x) = -6x^5 + 6x^2 - 1}$

Détail de la question f). On écrit $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^3 + \sqrt{3}\,x - 1$. Le terme $\sqrt{3}\,x$ est de la forme kx avec $k = \sqrt{3}$: sa dérivée vaut $\sqrt{3}$, et non $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Le nombre $\sqrt{3}$ est une *constante*, pas une fonction. De même, le terme -1 disparaît. D'où :

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \times 4x^3 + 3 \times 3x^2 + \sqrt{3} = -2x^3 + 9x^2 + \sqrt{3}$$

Détail de la question g). On écrit $f(x) = \frac{1}{2}\left(x^3 + 12x - 1\right)$, produit par le réel $\frac{1}{2}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 + 12\right) = \frac{3x^2 + 12}{2}$$

EXERCICE 8 ⋆

On rappelle les ensembles du cours : $\dfrac{1}{x^n}$ *est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}^*$*, tandis que* $\sqrt{x}$ *est définie sur* $[0\,;+\infty[$ *mais dérivable seulement sur* $]0\,;+\infty[$.

a) $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^*$ et $\boxed{f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - 2}$

b) $D_f = [0\,;+\infty[$, $D_{f'} =]0\,;+\infty[$ et $\boxed{f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{x}} + x^2}$

c) $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^*$. On applique $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$ avec $n = 3$:

$$f'(x) = -4 \times \left(-\frac{3}{x^4}\right) = \boxed{\frac{12}{x^4}}$$

d) $D_f = D_{f'} =]0\,;+\infty[$: la racine impose $x \geqslant 0$ et le quotient impose $x \neq 0$.

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{2}{5x^2}}$$

e) $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^*$ et $f'(x) = 3 \times \left(-\dfrac{2}{x^3}\right) = \boxed{-\dfrac{6}{x^3}}$

f) $D_f = D_{f'} =]0\,;+\infty[$ et $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{x^2}}$

g) $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^*$ et $\boxed{f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}}$

h) $D_f = D_{f'} =]0\,;+\infty[$ et $\boxed{f'(x) = -\dfrac{4}{x^5} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$

i) $D_f = [0\,;+\infty[$, $D_{f'} =]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = -6 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \boxed{-\dfrac{3}{\sqrt{x}}}$

j) $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^*$ et $f'(x) = 2 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{2}{x^3}\right) = \boxed{-\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{3x^3}}$

Piège classique (questions f) et i)) : $2\sqrt{x}$ a pour dérivée $2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, et non $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Le facteur 2 ne doit pas être oublié.

EXERCICE 9 ⋆⋆

On utilise la formule du produit : $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

a) $f(x) = (2x-1)(x+3)$, dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = 2x-1 \\ v(x) = x+3 \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 2 \times (x+3) + (2x-1) \times 1 = 2x + 6 + 2x - 1 = \boxed{4x+5}$$

Vérification en développant d'abord : $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$, donc $f'(x) = 4x + 5$.

b) $f(x) = x\sqrt{x}$, définie sur $[0\,;+\infty[$ et dérivable sur $]0\,;+\infty[$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$$

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{2x}{2\sqrt{x}} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \boxed{\frac{3x}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}}$$

en utilisant $\sqrt{x} = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$ pour réduire au même dénominateur.

c) $f(x) = 2\sqrt{x}\,(x^2+3x)$, dérivable sur $]0\,;+\infty[$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = 2\sqrt{x} \\ v(x) = x^2 + 3x \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \\ v'(x) = 2x + 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \times (x^2+3x) + 2\sqrt{x} \times (2x+3) = \frac{x^2+3x}{\sqrt{x}} + \frac{2x(2x+3)}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{x^2 + 3x + 4x^2 + 6x}{\sqrt{x}} = \boxed{\frac{5x^2+9x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\,(5x+9)}$$

en ayant écrit $2\sqrt{x} = \dfrac{2x}{\sqrt{x}}$.

d) $f(x) = (x^2+1)(\sqrt{x} - 2x)$, dérivable sur $]0\,;+\infty[$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = x^2+1 \\ v(x) = \sqrt{x} - 2x \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 2 \end{cases}$$

$$\boxed{f'(x) = 2x\,(\sqrt{x} - 2x) + (x^2+1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 2\right)}$$

e) $f(x) = (3x-2)(x^2+x+1)$, dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = 3x-2 \\ v(x) = x^2+x+1 \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 3 \\ v'(x) = 2x+1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 3(x^2+x+1) + (3x-2)(2x+1) = 3x^2 + 3x + 3 + 6x^2 + 3x - 4x - 2 = \boxed{9x^2 + 2x + 1}$$

f) $f(x) = (2x-1)(2x-1)$, dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = 2x-1 \\ v(x) = 2x-1 \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 2 \\ v'(x) = 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = 2(2x-1) + (2x-1) \times 2 = 4(2x-1) = \boxed{8x-4}$$

Vérification en développant d'abord : $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$, donc $f'(x) = 8x - 4$.

g) $f(x) = \sqrt{x}\,(x-4)$, dérivable sur $]0\,;+\infty[$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \sqrt{x} \\ v(x) = x-4 \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{x-4}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{x-4}{2\sqrt{x}} + \frac{2x}{2\sqrt{x}} = \boxed{\frac{3x-4}{2\sqrt{x}}}$$

h) $f(x) = (x^2+2) \times \dfrac{1}{x}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = x^2+2 \\ v(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

$$f'(x) = 2x \times \frac{1}{x} + (x^2+2) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2 - \frac{x^2+2}{x^2} = 2 - 1 - \frac{2}{x^2} = \boxed{1 - \frac{2}{x^2}}$$

Vérification : $f(x) = x + \dfrac{2}{x}$, donc $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2}$.

EXERCICE 10 ⋆⋆

On utilise la formule de l'inverse : $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.

a) $f(x) = 2 \times \dfrac{1}{3x-5}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}$.

$$v(x) = 3x-5 \quad \text{ce qui donne :} \quad v'(x) = 3$$

$$f'(x) = 2 \times \left(-\frac{3}{(3x-5)^2}\right) = \boxed{-\frac{6}{(3x-5)^2}}$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ car $x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$.

$$v(x) = x^2+1 \quad \text{ce qui donne :} \quad v'(x) = 2x$$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}}$$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

$$v(x) = \sqrt{x} \quad \text{ce qui donne :} \quad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x} \times x} = \boxed{-\frac{1}{2x\sqrt{x}}}$$

d) $f(x) = -3 \times \dfrac{1}{x^2-4}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;2\}$.

$$v(x) = x^2 - 4 \qquad \text{ce qui donne :} \qquad v'(x) = 2x$$

$$f'(x) = -3 \times \left(-\frac{2x}{(x^2-4)^2}\right) = \boxed{\frac{6x}{(x^2-4)^2}}$$

e) $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

$$v(x) = 2x - 1 \qquad \text{ce qui donne :} \qquad v'(x) = 2$$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{2}{(2x-1)^2}}$$

f) $f(x) = 5 \times \dfrac{1}{x^3+x}$. Comme $x^3 + x = x(x^2+1)$ ne s'annule qu'en 0, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$v(x) = x^3 + x \qquad \text{ce qui donne :} \qquad v'(x) = 3x^2 + 1$$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{5(3x^2+1)}{(x^3+x)^2}}$$

EXERCICE 11 ⋆⋆

On utilise la formule du quotient : $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\big(v(x)\big)^2}$. ***Attention à l'ordre des deux termes du numérateur : ici c'est une soustraction, et elle n'est pas commutative.***

a) $f(x) = \dfrac{1-2x}{x-2}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = 1 - 2x \\ v(x) = x - 2 \end{cases} \qquad \text{ce qui donne :} \qquad \begin{cases} u'(x) = -2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{-2(x-2) - (1-2x) \times 1}{(x-2)^2} = \frac{-2x + 4 - 1 + 2x}{(x-2)^2} = \boxed{\frac{3}{(x-2)^2}}$$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$, dérivable sur $]0\,;+\infty[$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \sqrt{x} \\ v(x) = x + 1 \end{cases} \qquad \text{ce qui donne :} \qquad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}} - \frac{2x}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2} = \boxed{\frac{1-x}{2\sqrt{x}\,(x+1)^2}}$$

c) $f(x) = \dfrac{2-x^2}{2+x^2}$, dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = 2 - x^2 \\ v(x) = 2 + x^2 \end{cases} \qquad \text{ce qui donne :} \qquad \begin{cases} u'(x) = -2x \\ v'(x) = 2x \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{-2x(2+x^2) - (2-x^2) \times 2x}{(2+x^2)^2} = \frac{-4x - 2x^3 - 4x + 2x^3}{(2+x^2)^2} = \boxed{\frac{-8x}{(2+x^2)^2}}$$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 8}{2x - 5}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\}$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = x^2 - 4x + 8 \\ v(x) = 2x - 5 \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 2x - 4 \\ v'(x) = 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-4)(2x-5) - 2(x^2 - 4x + 8)}{(2x-5)^2} = \frac{4x^2 - 18x + 20 - 2x^2 + 8x - 16}{(2x-5)^2}$$

$$= \boxed{\frac{2x^2 - 10x + 4}{(2x-5)^2} = \frac{2(x^2 - 5x + 2)}{(2x-5)^2}}$$

e) $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x^2 + 1}$, dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = 3x + 1 \\ v(x) = x^2 + 1 \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 3 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{3(x^2+1) - (3x+1) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2 + 3 - 6x^2 - 2x}{(x^2+1)^2} = \boxed{\frac{-3x^2 - 2x + 3}{(x^2+1)^2}}$$

f) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x - 1}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = x^2 + x \\ v(x) = x - 1 \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 2x + 1 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1) - (x^2 + x)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - x - 1 - x^2 - x}{(x-1)^2} = \boxed{\frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}}$$

g) $f(x) = \dfrac{x + 3}{2x - 1}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = x + 3 \\ v(x) = 2x - 1 \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{1 \times (2x-1) - (x+3) \times 2}{(2x-1)^2} = \frac{2x - 1 - 2x - 6}{(2x-1)^2} = \boxed{\frac{-7}{(2x-1)^2}}$$

h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x}$, dérivable sur $]0\,;+\infty[$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \sqrt{x} + 1 \\ v(x) = x \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times x - (\sqrt{x} + 1)}{x^2} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{2} - \sqrt{x} - 1}{x^2} = \frac{-\frac{\sqrt{x}}{2} - 1}{x^2} = \boxed{-\frac{\sqrt{x} + 2}{2x^2}}$$

en utilisant $\dfrac{x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

EXERCICE 12 ⋆⋆

On utilise $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$. *Toutes les fonctions polynomiales sont dérivables sur* $\mathbb{R}$.

a) $u(x) = 3x - 1$, $u'(x) = 3$, $n = 4$:

$$f'(x) = 4 \times 3 \times (3x-1)^3 = \boxed{12(3x-1)^3} \qquad (\text{sur } \mathbb{R})$$

b) $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$, $n = 3$:

$$f'(x) = 3 \times 2x \times (x^2+1)^2 = \boxed{6x(x^2+1)^2} \qquad (\text{sur } \mathbb{R})$$

c) $u(x) = -2x + 3$, $u'(x) = -2$, $n = 4$:

$$f'(x) = 4 \times (-2) \times (-2x+3)^3 = \boxed{-8(-2x+3)^3} \qquad (\text{sur } \mathbb{R})$$

d) $u(x) = 3x^3 + 1$, $u'(x) = 9x^2$, $n = 2$:

$$f'(x) = 2 \times 9x^2 \times (3x^3+1) = \boxed{18x^2(3x^3+1)} \qquad (\text{sur } \mathbb{R})$$

e) $u(x) = x^2 - 4x$, $u'(x) = 2x - 4$, $n = 5$:

$$f'(x) = 5(2x-4)(x^2-4x)^4 = \boxed{10(x-2)(x^2-4x)^4} \qquad (\text{sur } \mathbb{R})$$

f) $u(x) = x^2 + x + 1$, $u'(x) = 2x + 1$, $n = 2$:

$$f'(x) = \boxed{2(2x+1)(x^2+x+1)} \qquad (\text{sur } \mathbb{R})$$

g) $f(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^2} = (2x-1)^{-2}$, avec $u(x) = 2x - 1$, $u'(x) = 2$ et $n = -2$:

$$f'(x) = -2 \times 2 \times (2x-1)^{-3} = \boxed{-\frac{4}{(2x-1)^3}} \qquad \left(\text{sur } \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{1}{2}\right\}\right)$$

Vérification par la règle de l'inverse. On pose $v(x) = (2x-1)^2$, donc $v'(x) = 2 \times 2 \times (2x-1) = 4(2x-1)$, d'où

$$f'(x) = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2} = -\frac{4(2x-1)}{(2x-1)^4} = -\frac{4}{(2x-1)^3}$$

Les deux méthodes concordent.

h) $f(x) = (2x+1)^{-3}$, avec $u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$ et $n = -3$:

$$f'(x) = -3 \times 2 \times (2x+1)^{-4} = \boxed{-\frac{6}{(2x+1)^4}} \qquad \left(\text{sur } \mathbb{R} \setminus \left\{-\tfrac{1}{2}\right\}\right)$$

EXERCICE 13 ⋆⋆

On utilise $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. *La fonction* $\sqrt{u}$ *est définie là où* $u \geqslant 0$, *mais dérivable seulement là où* $u > 0$ *: les deux ensembles diffèrent toujours des points où* u *s'annule.*

a) $u(x) = x - 4$, $u'(x) = 1$. $D_f = [4\,;+\infty[$ et $D_{f'} =]4\,;+\infty[$:

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-4}}}$$

b) $u(x) = 3x+1$, $u'(x) = 3$. $D_f = \left[-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ et $D_{f'} = \left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$:

$$\boxed{f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}}$$

c) $u(x) = 1-2x$, $u'(x) = -2$. $D_f = \left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$ et $D_{f'} = \left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$:

$$f'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{1-2x}} = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{1-2x}}}$$

d) $u(x) = x^2+4$, $u'(x) = 2x$. Comme $x^2+4 \geqslant 4 > 0$, on a $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \boxed{\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}$$

e) $u(x) = x^2+x+1$, $u'(x) = 2x+1$. Le discriminant de u vaut $\Delta = 1^2 - 4\times1\times1 = -3 < 0$: le trinôme ne s'annule jamais et garde le signe de son coefficient dominant, donc $u(x) > 0$ pour tout réel x. Ainsi $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$ et

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}$$

f) $f(x) = 2\sqrt{x^2-9}$, avec $u(x) = x^2-9$ et $u'(x) = 2x$. On a $u(x) \geqslant 0$ pour $x \leqslant -3$ ou $x \geqslant 3$, donc $D_f =]-\infty\,;-3] \cup [3\,;+\infty[$ et $D_{f'} =]-\infty\,;-3[\cup]3\,;+\infty[$:

$$f'(x) = 2\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}} = \boxed{\frac{2x}{\sqrt{x^2-9}}}$$

g) $u(x) = \dfrac{1}{2x} - 1 = \dfrac{1-2x}{2x}$. Ce quotient est strictement positif lorsque $1-2x$ et $2x$ sont de même signe, c'est-à-dire pour $0 < x < \frac{1}{2}$. Donc $D_f = \left]0\,;\frac{1}{2}\right]$ et $D_{f'} = \left]0\,;\frac{1}{2}\right[$. Avec $u'(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$:

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2x^2}}{2\sqrt{\frac{1}{2x}-1}} = \boxed{-\frac{1}{4x^2\sqrt{\frac{1}{2x}-1}}}$$

h) $f(x) = x\sqrt{x+1}$: c'est un **produit**, dont le second facteur est une racine. $D_f = [-1\,;+\infty[$ et $D_{f'} =]-1\,;+\infty[$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \sqrt{x+1} \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \end{cases}$$

$$f'(x) = \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2(x+1)}{2\sqrt{x+1}} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}} = \boxed{\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}}$$

EXERCICE 14 ⋆⋆

a) **Produit.** $D_f = [0\,;+\infty[$, $D_{f'} =]0\,;+\infty[$.

$$\begin{cases} u(x) = \sqrt{x} \\ v(x) = 2x-1 \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v'(x) = 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} = \frac{2x-1}{2\sqrt{x}} + \frac{4x}{2\sqrt{x}} = \boxed{\frac{6x-1}{2\sqrt{x}}}$$

b) **Quotient.** $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^*$.

$$\begin{cases} u(x) = x^2 - 1 \\ v(x) = x \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{2x \times x - (x^2 - 1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \boxed{\frac{x^2 + 1}{x^2}}$$

c) **Somme.** $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^*$: $f'(x) = 6x - \left(-\frac{2}{x^3}\right) = \boxed{6x + \frac{2}{x^3}}$

d) **Quotient.** $D_f = D_{f'} =]0\,;+\infty[$.

$$\begin{cases} u(x) = 2x + 1 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 2 \\ v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x} - (2x+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\dfrac{4x - 2x - 1}{2\sqrt{x}}}{x} = \boxed{\frac{2x - 1}{2x\sqrt{x}}}$$

e) **Inverse.** $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, avec $v(x) = x - 3$ et $v'(x) = 1$: $\boxed{f'(x) = -\frac{1}{(x-3)^2}}$

f) **Produit.** $D_f = [0\,;+\infty[$, $D_{f'} =]0\,;+\infty[$.

$$\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$$

$$f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{4x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = \boxed{\frac{5x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x\sqrt{x}}{2}}$$

g) **Somme.** $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^*$: $\boxed{f'(x) = -\frac{4}{x^2} - 6x}$

h) **Produit.** $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^*$.

$$\begin{cases} u(x) = x - 1 \\ v(x) = \dfrac{1}{x} + 2 \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2 + (x-1)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x} + 2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \boxed{2 + \frac{1}{x^2}}$$

Vérification : $f(x) = 1 + 2x - \frac{1}{x} - 2 = 2x - \frac{1}{x} - 1$, donc $f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$.

i) **Puissance.** $u(x) = 2x - 5$, $u'(x) = 2$, $n = 3$, sur $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 3 \times 2 \times (2x-5)^2 = \boxed{6(2x-5)^2}$$

j) **Racine.** $u(x) = 4x - 3$, $u'(x) = 4$. $D_f = \left[\frac{3}{4}\,;+\infty\right[$ et $D_{f'} = \left]\frac{3}{4}\,;+\infty\right[$:

$$f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x-3}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{4x-3}}}$$

EXERCICE 15 ⋆

1. $f(x) = 4 - \dfrac{x^2}{4}$ donne $f'(x) = -\dfrac{2x}{4} = \boxed{-\dfrac{x}{2}}$, d'où :

$$f'(-4) = 2 \qquad f'(0) = 0 \qquad f'(2) = -1 \qquad f'(4) = -2$$

Les quatre valeurs coïncident exactement avec celles lues à l'exercice 5.

2. $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ donne $\boxed{g'(x) = 3x^2 - 6x}$, d'où :

$$g'(0) = 0 \qquad g'(1) = 3 - 6 = -3 \qquad g'(2) = 12 - 12 = 0$$

Les trois valeurs confirment les lectures de l'exercice 6.

3. $g'(0{,}5) = 3 \times 0{,}25 - 6 \times 0{,}5 = 0{,}75 - 3 = \boxed{-2{,}25 < 0}$ et $g'(3) = 27 - 18 = \boxed{9 > 0}$.
Les deux signes conjecturés graphiquement sont donc corrects.

4. $f'(x) = 0 \iff -\dfrac{x}{2} = 0 \iff \boxed{x = 0}$: c'est bien l'unique abscisse où la tangente était horizontale sur la première figure.
$g'(x) = 0 \iff 3x(x-2) = 0 \iff \boxed{x = 0 \text{ ou } x = 2}$: ce sont bien les deux abscisses repérées sur la seconde figure.

Équation de tangente

EXERCICE 16 ⋆

On applique la formule $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

a) $f(2) = 4 - 6 + 1 = -1$ et $f'(x) = 2x - 3$ donc $f'(2) = 1$:

$$y = 1 \times (x - 2) - 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{y = x - 3}$$

b) $f(-1) = -1$ et $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(-1) = 3$:

$$y = 3(x + 1) - 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{y = 3x + 2}$$

c) $f(2) = \dfrac{1}{2}$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ donc $f'(2) = -\dfrac{1}{4}$:

$$y = -\frac{1}{4}(x - 2) + \frac{1}{2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{y = -\frac{x}{4} + 1}$$

d) $f(9) = 3$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $f'(9) = \dfrac{1}{6}$:

$$y = \frac{1}{6}(x - 9) + 3 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{y = \frac{x}{6} + \frac{3}{2}}$$

e) $f(3) = -9 + 12 = 3$ et $f'(x) = -2x + 4$ donc $f'(3) = -2$:

$$y = -2(x - 3) + 3 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{y = -2x + 9}$$

f) $f(2) = \dfrac{3}{1} = 3$ et, avec $u(x) = x + 1$ et $v(x) = x - 1$, $f'(x) = \dfrac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = -\dfrac{2}{(x-1)^2}$ donc $f'(2) = -2$:

$$y = -2(x - 2) + 3 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{y = -2x + 7}$$

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$. La tangente est horizontale lorsque $f'(x) = 0$, c'est-à-dire pour $x = 1$ ou $x = 3$. Comme $f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$ et $f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$:

$$\boxed{\text{aux points } (1\,;5) \text{ et } (3\,;1),\ \text{tangentes } y = 5 \text{ et } y = 1.}$$

2. Deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont le même coefficient directeur. On résout donc $f'(x) = 2$:

$$2x - 4 = 2 \iff x = 3 \qquad \text{et} \qquad f(3) = 9 - 12 + 1 = -2$$

$$\boxed{\text{au point } (3\,;-2),\ \text{tangente } y = 2(x-3) - 2 = 2x - 8.}$$

3. On résout $f'(x) = 9$:

$$3x^2 - 3 = 9 \iff 3x^2 = 12 \iff x^2 = 4 \iff x = -2 \text{ ou } x = 2$$

Comme $f(-2) = -8 + 6 = -2$ et $f(2) = 8 - 6 = 2$:

$$\boxed{\text{aux points } (-2\,;-2) \text{ et } (2\,;2),\ \text{tangentes } y = 9x + 16 \text{ et } y = 9x - 16.}$$

Attention : l'équation $x^2 = 4$ admet **deux** solutions, il y a donc deux points.

4. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. Or $x^2 > 0$ pour tout $x \neq 0$, donc $f'(x) < 0$: la dérivée ne s'annule jamais.

$$\boxed{\text{La courbe de la fonction inverse n'admet aucune tangente horizontale.}}$$

5. Une tangente parallèle à l'axe des abscisses est une tangente horizontale. On résout $f'(x) = 0$:

$$2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{au point } \left(-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{4}\right),\ \text{tangente } y = -\frac{1}{4}.}$$

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. $f(a) = a^2$ et $f'(x) = 2x$ donc $f'(a) = 2a$. La tangente T_a a donc pour équation :

$$y = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - 2a^2 + a^2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{y = 2ax - a^2}$$

2. Le point $A(0\,;-1)$ appartient à T_a si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation :

$$-1 = 2a \times 0 - a^2 \iff -1 = -a^2 \iff a^2 = 1 \iff a = -1 \text{ ou } a = 1$$

$$\boxed{\text{Deux tangentes conviennent : } y = 2x - 1 \text{ et } y = -2x - 1.}$$

3. Pour $B(1\,;0)$:

$$0 = 2a \times 1 - a^2 \iff 2a - a^2 = 0 \iff a(2-a) = 0 \iff a = 0 \text{ ou } a = 2$$

$$\boxed{\text{Deux tangentes conviennent : } y = 0 \text{ et } y = 4x - 4.}$$

4. Pour $C(0\,;1)$:

$$1 = -a^2 \iff a^2 = -1$$

Un carré ne pouvant être négatif, cette équation n'a aucune solution :

$$\boxed{\text{Aucune tangente à } \mathcal{P} \text{ ne passe par } C.}$$

Interprétation. La parabole est *convexe* : elle est située au-dessus de toutes ses tangentes. Le point $C(0\,;1)$ se trouve à l'intérieur de la parabole, c'est-à-dire au-dessus d'elle ; aucune tangente ne peut donc l'atteindre. Les points A et B, eux, sont situés en dessous de la courbe, et l'on peut en mener deux tangentes.

EXERCICE 19 ⋆⋆

1. On lit les ordonnées des trois points marqués, puis les coefficients directeurs des tangentes :

$$\boxed{f(0) = 0 \qquad f(2) = -2 \qquad f(4) = 0}$$

$$\boxed{f'(0) = -2 \qquad f'(2) = 0 \qquad f'(4) = 2}$$

2. On applique $y = f'(a)(x-a) + f(a)$:
   - en $a = 0$: $y = -2(x-0) + 0$, soit $\boxed{y = -2x}$;
   - en $a = 2$: $y = 0 \times (x-2) - 2$, soit $\boxed{y = -2}$;
   - en $a = 4$: $y = 2(x-4) + 0$, soit $\boxed{y = 2x - 8}$.
3. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x$ donne $\boxed{f'(x) = x - 2}$, d'où $f'(0) = -2$, $f'(2) = 0$ et $f'(4) = 2$: les trois lectures sont confirmées.
4. $f(6) = 18 - 12 = 6$ et $f'(6) = 4$, donc :

$$y = 4(x-6) + 6 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{y = 4x - 18}$$

Pour la tracer, il suffit de placer le point $(6\,;6)$ et, par exemple, le point $(5\,;2)$.

5. La droite $y = x + 3$ a pour coefficient directeur 1. On résout donc $f'(x) = 1$:

$$x - 2 = 1 \iff x = 3 \qquad \text{et} \qquad f(3) = \frac{9}{2} - 6 = -\frac{3}{2}$$

$$\boxed{\text{Au point } \left(3\,;-\frac{3}{2}\right), \text{ tangente } y = x - \frac{9}{2}.}$$

Dérivée, variations et extremums

EXERCICE 20 ⋆

1. Par lecture graphique : $\boxed{A(-1\,;4) \quad \text{et} \quad B(3\,;-4)}$
2. La courbe monte, puis descend, puis remonte :

x	-3		-1		3		5
$f(x)$	-4	↗	4	↘	-4	↗	4

3. Une fonction croissante a une dérivée positive, une fonction décroissante une dérivée négative :

x	-3		-1		3		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. La dérivée s'annule là où la tangente est horizontale :

$$\boxed{f'(x) = 0 \text{ pour } x = -1 \text{ et } x = 3}$$

5. $\boxed{f \text{ admet un maximum local 4 en } -1, \text{ et un minimum local } -4 \text{ en 3.}}$

6. En $x = 0$, la courbe **descend** : la tangente y descend aussi, donc $\boxed{f'(0) < 0}$. En $x = 4$, la courbe **monte**, donc $\boxed{f'(4) > 0}$.
Aucun calcul n'est nécessaire : le signe de la dérivée se lit directement sur le sens de variation.

EXERCICE 21 ⋆⋆

1. La courbe de f' coupe l'axe des abscisses en deux points :

$$\boxed{f'(x) = 0 \text{ pour } x = -2 \text{ et } x = 2}$$

2. La parabole est *au-dessus* de l'axe entre -2 et 2, et en dessous à l'extérieur :

x	-3		-2		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Piège à éviter : on lit ici le **signe** de f', c'est-à-dire la position de la courbe par rapport à l'axe — et non ses variations.

3. Le signe de f' donne les variations de f :

x	-3		-2		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

4. $\boxed{f \text{ admet un minimum local en } -2 \text{ et un maximum local en 2.}}$ Dans les deux cas, f' s'annule *en changeant de signe.*

5. Par lecture graphique, $\boxed{f'(0) = 4}$. Ce nombre est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe de f au point d'abscisse 0.

6. Avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = 4$:

$$y = 4(x - 0) + 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{y = 4x + 1}$$

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. On reporte le signe de f' et les cinq valeurs données :

x	-4		-2		1		4		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	5	↘	-3	↗		↗	6	↘	2

La fonction est croissante sur tout $[-2\,;4]$, l'annulation en 1 n'interrompant pas la croissance.

2. $\boxed{f \text{ admet un minimum local } -3 \text{ en } -2, \text{ et un maximum local 6 en 4.}}$

3. En $x = 1$, la dérivée s'annule mais **ne change pas de signe**. D'après la propriété du cours, il n'y a donc *pas* d'extremum en ce point.

$\boxed{\begin{array}{l}\text{la courbe admet en } (1\,;0) \text{ une tangente horizontale, sans extremum :}\\ \text{elle y marque un palier avant de repartir vers le haut.}\end{array}}$

4. Sur $[-4\,;6]$, en comparant toutes les valeurs remarquables 5, -3, 6 et 2 :

$\boxed{\text{maximum 6 atteint en } x = 4 \quad ; \quad \text{minimum } -3 \text{ atteint en } x = -2}$

5. On examine les trois branches monotones :
   - sur $[-4\,;-2]$, f décroît de 5 à -3 : comme $1 \in]-3\,;5[$, il y a une solution ;
   - sur $[-2\,;4]$, f croît de -3 à 6 : comme $1 \in]-3\,;6[$, il y a une solution ;
   - sur $[4\,;6]$, f décroît de 6 à 2 : comme $1 < 2$, il n'y en a aucune.

$\boxed{\text{L'équation } f(x) = 1 \text{ admet 2 solutions sur } [-4\,;6].}$

EXERCICE 23 ⋆

a) $f'(x) = 2x - 4$, qui s'annule en 2 et est positive après.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-1	↗	

$\boxed{\text{Minimum } -1 \text{ atteint en } x = 2.}$

b) $f'(x) = -4x + 8$, qui s'annule en 2 et est *négative* après.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	

Maximum 3 atteint en $x = 2$.

c) $f'(x) = 6x + 6$, qui s'annule en -1 : minimum -2 atteint en $x = -1$, f décroissante sur $]-\infty\,;-1]$ puis croissante sur $[-1\,;+\infty[$.

d) $f'(x) = -2x+6$, qui s'annule en 3 : maximum 9 atteint en $x = 3$, f croissante puis décroissante.

EXERCICE 24 ⋆⋆

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, produit dont les racines sont 0 et 2. Un trinôme de coefficient dominant positif est négatif *entre* ses racines :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

Maximum local 2 en 0 ; minimum local -2 en 2.

b) $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	

Maximum local 5 en 1 ; minimum local 4 en 2.

c) $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	21	$\searrow$	-11	$\nearrow$	

Maximum local 21 en -2 ; minimum local -11 en 2.

d) $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = \boxed{3(x+1)^2}$.

Voilà la surprise : un carré est toujours positif ou nul. La dérivée s'annule en -1, mais **sans changer de signe**.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↗	

f est croissante sur $\mathbb{R}$ tout entier et n'admet aucun extremum.

Commentaire. L'annulation de la dérivée est une condition **nécessaire** mais non suffisante pour un extremum : il faut de plus un changement de signe. En $x = -1$, la courbe admet une tangente horizontale, qu'elle traverse aussitôt sans changer de sens de variation.

EXERCICE 25 ⋆⋆

Dans tout cet exercice, le dénominateur de f' est un carré, donc strictement positif : le signe de f' est celui de son numérateur.

a) $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2} = \boxed{\frac{(x-2)(x+2)}{x^2}}$$

Sur $]0\,;+\infty[$, le facteur $x+2$ est positif : le signe de f' est celui de $x-2$.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	4	↗	

Minimum 4 atteint en $x = 2$.

b) $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3-16}{x^2} = \boxed{\frac{2(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2}}$$

Le trinôme x^2+2x+4 a pour discriminant $\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$: il est toujours strictement positif. Le signe de f' est donc celui de $x-2$, et

minimum 12 atteint en $x = 2$.

c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = x^2+1 \\ v(x) = x \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{2x \times x - (x^2+1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \boxed{\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}}$$

Sur $]0\,;+\infty[$, le signe est celui de $x-1$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	2	↗	

$\boxed{\text{Minimum 2 atteint en } x = 1.}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = x^2-4 \\ v(x) = x \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{2x \times x - (x^2-4)}{x^2} = \boxed{\frac{x^2+4}{x^2}}$$

Le numérateur x^2+4 est *toujours* strictement positif :

$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0\,;+\infty[, \text{ sans extremum.}}$

e) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ sur $]2\,;+\infty[$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = x+1 \\ v(x) = x-2 \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{1 \times (x-2) - (x+1) \times 1}{(x-2)^2} = \boxed{\frac{-3}{(x-2)^2}}$$

Le numérateur est la constante $-3 < 0$:

$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]2\,;+\infty[, \text{ sans extremum.}}$

f) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$ sur $]-3\,;+\infty[$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = 2x-1 \\ v(x) = x+3 \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{2(x+3) - (2x-1)}{(x+3)^2} = \frac{2x+6-2x+1}{(x+3)^2} = \boxed{\frac{7}{(x+3)^2}}$$

$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-3\,;+\infty[, \text{ sans extremum.}}$

g) $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x-1}$ sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = 3x+2 \\ v(x) = 2x-1 \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 3 \\ v'(x) = 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{3(2x-1)-2(3x+2)}{(2x-1)^2} = \frac{6x-3-6x-4}{(2x-1)^2} = \boxed{\frac{-7}{(2x-1)^2}}$$

$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[.}$

h) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ sur $]1\,;+\infty[$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = x^2+3 \\ v(x) = x-1 \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2-3}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \boxed{\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}}$$

Sur $]1\,;+\infty[$, le facteur $x+1$ est positif : le signe est celui de $x-3$.

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	6	↗	

$\boxed{\text{Minimum 6 atteint en } x = 3.}$

i) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = x^2+2x+2 \\ v(x) = x+1 \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 2x+2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x+1)-(x^2+2x+2)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x+2-x^2-2x-2}{(x+1)^2} = \boxed{\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}}$$

Sur $]-1\,;+\infty[$, le facteur $x+2$ est positif : le signe est celui de x.

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	2	↗	

$\boxed{\text{Minimum 2 atteint en } x = 0.}$

j) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 1}$ sur $]1\,;+\infty[$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = x^2 - 2x \\ v(x) = x - 1 \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 2x - 2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2-2x)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x + 2 - x^2 + 2x}{(x-1)^2} = \boxed{\frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2}}$$

Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$: il ne s'annule jamais et reste du signe de son coefficient dominant, donc strictement positif.

$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]1\,;+\infty[, \text{ sans extremum.}}$

k) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = x - 1 \\ v(x) = x^2 \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{1 \times x^2 - (x-1) \times 2x}{(x^2)^2} = \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^4} = \frac{x(2-x)}{x^4} = \boxed{\frac{2-x}{x^3}}$$

Sur $]0\,;+\infty[$, on a $x^3 > 0$: le signe est celui de $2 - x$.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	$\frac{1}{4}$	↘	

$\boxed{\text{Maximum } \dfrac{1}{4} \text{ atteint en } x = 2.}$

l) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty\,;0[$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \boxed{\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}}$$

Attention : la dérivée s'annule en -1 *et* en 1, mais seule la valeur -1 appartient à l'intervalle d'étude. Sur $]-\infty\,;0[$, le facteur $x - 1$ est négatif : le signe de f' est l'*opposé* de celui de $x + 1$.

x	$-\infty$		-1		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖
$f(x)$		↗	-2	↘	‖

Maximum -2 atteint en $x=-1$.

m) $f(x)=\sqrt{x}-x$ sur $]0\,;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-1=\frac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

Le dénominateur est positif ; le numérateur s'annule lorsque $\sqrt{x}=\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $x=\frac{1}{4}$, et il est positif avant.

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	

Maximum $\dfrac{1}{4}$ atteint en $x=\dfrac{1}{4}$.

n) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ sur $]0\,;+\infty[$. On pose :

$$\begin{cases} u(x)=\sqrt{x} \\ v(x)=x+1 \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v'(x)=1 \end{cases}$$

$$f'(x)=\frac{\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{(x+1)^2}=\frac{\dfrac{x+1-2x}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2}=\boxed{\frac{1-x}{2\sqrt{x}\,(x+1)^2}}$$

Le dénominateur est positif : le signe est celui de $1-x$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	

Maximum $\dfrac{1}{2}$ atteint en $x=1$.

EXERCICE 26 ⋆⋆

1. $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$, et $f(0)=0$, $f(1)=4$, $f(3)=0$, $f(4)=4$.

x	0		1		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	4	↘	0	↗	4

Maximum 4, atteint **deux fois**, en $x = 1$ et en $x = 4$; minimum 0, en $x = 0$ et $x = 3$.

On remarque que le maximum est atteint à la fois en un point où f' s'annule et en une **borne** de l'intervalle, où f' ne s'annule pas.

2. $g'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$, et $g(-1) = 5$, $g(0) = 1$, $g(2) = 5$, $g(3) = 1$.

x	-1		0		2		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	5	↘	1	↗	5	↘	1

Maximum 5 en $x = -1$ et $x = 2$; minimum 1 en $x = 0$ et $x = 3$.

3. $h'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x^2}$. Sur $[1\,;5]$, le signe est celui de $x-2$. De plus $h(1) = 5$, $h(2) = 4$ et $h(5) = 5 + \frac{4}{5} = \frac{29}{5}$.

x	1		2		5
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	5	↘	4	↗	$\frac{29}{5}$

Minimum 4 en $x = 2$; maximum $\dfrac{29}{5} = 5{,}8$ en $x = 5$.

Ici le maximum est atteint en une borne, et non en un point d'annulation de la dérivée.

EXERCICE 27 ⋆⋆

1. La longueur découpée est positive, donc $x \geqslant 0$. De plus, on retire x à *chaque* extrémité d'un côté de 12 cm, donc $12 - 2x \geqslant 0$, soit $x \leqslant 6$:

$$\boxed{x \in [0\,;6]}$$

2. La base est un carré de côté $12 - 2x$ et la hauteur vaut x, donc

$$\boxed{V(x) = x(12-2x)^2}$$

3. $(12-2x)^2 = 144 - 48x + 4x^2$, donc $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ et

$$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12\left(x^2 - 8x + 12\right) = \boxed{12(x-2)(x-6)}$$

Vérification de la factorisation : $(x-2)(x-6) = x^2 - 8x + 12$.

4. Le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines 2 et 6, négatif entre elles.

x	0		2		6
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	↗	128	↘	0

5. $V(2) = 2 \times (12-4)^2 = 2 \times 64 = 128$:

$$\boxed{\text{Le volume est maximal pour } x = 2 \text{ cm, et vaut alors } 128 \text{ cm}^3.}$$

La boîte a alors pour base un carré de 8 cm de côté et pour hauteur 2 cm.

EXERCICE 28 ⋆⋆

1. $\boxed{R(q) = 200q}$
2. $B(q) = 200q - (q^3 - 24q^2 + 245q + 100)$, d'où

$$\boxed{B(q) = -q^3 + 24q^2 - 45q - 100}$$

3. $B'(q) = -3q^2 + 48q - 45 = -3\left(q^2 - 16q + 15\right) = \boxed{-3(q-1)(q-15)}$
Vérification : $(q-1)(q-15) = q^2 - 16q + 15$.
4. Le facteur -3 étant négatif, B' est du signe *opposé* à celui de $(q-1)(q-15)$: positive entre les racines, négative à l'extérieur. Avec $B(0) = -100$, $B(1) = -122$, $B(15) = 1250$ et $B(20) = 600$:

q	0		1		15		20
$B'(q)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$B(q)$	-100	↘	-122	↗	1250	↘	600

5. Le bénéfice est maximal pour $q = 15$, c'est-à-dire 1 500 objets. Il vaut alors 1 250 centaines d'euros :

$$\boxed{\text{Bénéfice maximal de } 125\,000 \text{ € pour } 1\,500 \text{ objets produits.}}$$

6. $B(0) = -100$ et $B(1) = -122$: dans les deux cas le bénéfice est **négatif**, et il est même *plus* mauvais pour $q = 1$ que pour $q = 0$.

$$\boxed{\text{Produire très peu est la pire stratégie : les frais fixes ne sont pas couverts.}}$$

L'entreprise a intérêt à produire beaucoup, jusqu'à 1 500 objets — au-delà, le bénéfice diminue à nouveau.

EXERCICE 29 ⋆⋆

1. $f'(x) = 2ax + b$. L'égalité $2ax + b = 6x + 7$ devant être vraie pour *tout* réel x, on identifie les coefficients : $2a = 6$ et $b = 7$, donc $a = 3$ et $b = 7$. Puis

$$f(1) = a + b + c = 3 + 7 + c = 6 \iff c = -4$$

$$\boxed{a = 3, \quad b = 7, \quad c = -4}$$

2. $g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Par identification avec $6x^2 - 5x + 1$:

$$3a = 6, \quad 2b = -5, \quad c = 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{a = 2, \quad b = -\frac{5}{2}, \quad c = 1}$$

3. $h'(x) = 2ax + b$. Par identification avec $-4x + \dfrac{1}{2}$: $2a = -4$ et $b = \dfrac{1}{2}$, donc $a = -2$. La courbe passant par $(2\,;-9)$:

$$h(2) = 4a + 2b + c = -8 + 1 + c = -9 \iff c = -2$$

$$\boxed{a = -2, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = -2}$$

4. $k(x) = ax + \dfrac{b}{x}$ donne $k'(x) = a - \dfrac{b}{x^2}$. Les deux conditions s'écrivent :

$$\begin{cases} k(1) = a + b = 4 \\ k'(1) = a - b = 0 \end{cases}$$

En additionnant, $2a = 4$ donc $a = 2$, puis $b = 2$:

$$\boxed{a = 2, \quad b = 2}$$

EXERCICE 30 ⋆⋆

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3\left(x^2 - 2x - 3\right)$. Or $(x - 3)(x + 1) = x^2 - 2x - 3$, donc

$$\boxed{f'(x) = 3(x - 3)(x + 1)}$$

2. Le trinôme est négatif entre ses racines -1 et 3. Avec $f(-3) = -27 - 27 + 27 + 5 = -22$, $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$, $f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$ et $f(5) = 125 - 75 - 45 + 5 = 10$:

x	-3		-1		3		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-22	↗	10	↘	-22	↗	10

3. $\boxed{\text{Maximum local } 10 \text{ en } -1 \quad ; \quad \text{minimum local } -22 \text{ en } 3.}$
   Sur $[-3\,;5]$ tout entier, le maximum vaut 10 (atteint en -1 et en 5) et le minimum -22 (atteint en -3 et en 3).

4. $f(0) = 5$ et $f'(0) = 3 \times (-3) \times 1 = -9$, donc
$$y = -9(x-0) + 5 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{T : y = -9x + 5}$$

5. $f'(x) = 0 \iff x = -1$ ou $x = 3$:
$$\boxed{\text{aux points } (-1\,;10) \text{ et } (3\,;-22).}$$

6. $f'(x) = -9 \iff 3x^2 - 6x - 9 = -9 \iff 3x^2 - 6x = 0 \iff 3x(x-2) = 0$, donc
$$\boxed{x = 0 \text{ ou } x = 2}$$

   Interprétation. En ces deux points la tangente a le même coefficient directeur -9 que la tangente T : les tangentes en 0 et en 2 sont donc **parallèles**. Comme $f(2) = 8-12-18+5 = -17$, la seconde a pour équation $y = -9(x-2) - 17 = -9x + 1$: elle est bien parallèle à T sans lui être confondue.

EXERCICE 31 ⋆⋆

1. Les cinq points sont $(-4\,;-1)$, $(-2\,;3)$, $(1\,;-2)$, $(3\,;0)$ et $(5\,;4)$.

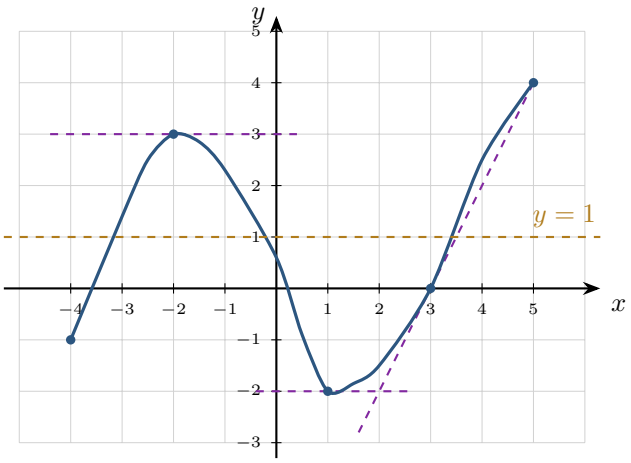
2. Un nombre dérivé nul signifie que la tangente a un coefficient directeur nul :
$$\boxed{\text{les tangentes aux points d'abscisses } -2 \text{ et } 1 \text{ sont horizontales.}}$$
   Ce sont donc les droites d'équations $y = 3$ et $y = -2$, tracées en pointillés violets ci-dessous.

3. Avec $a = 3$, $f(3) = 0$ et $f'(3) = 2$:
$$y = 2(x-3) + 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{y = 2x - 6}$$
   Pour la tracer, on part du point $(3\,;0)$ et l'on avance d'une unité vers la droite en montant de deux : on obtient le point $(4\,;2)$.

4. En -2 et en 1, la dérivée s'annule ; entre ces deux valeurs f passe de 3 à -2, elle y est donc décroissante. Ailleurs elle croît, ce que confirme $f'(3) = 2 > 0$.

x	-4		-2		1		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	↗	3	↘	-2	↗	4

5. Toute courbe respectant ce tableau et les trois tangentes convient. En voici une :



6. La droite d'équation $y = 1$, tracée en ocre, coupe la courbe une fois sur chacune des trois branches monotones :

$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 1 \text{ admet 3 solutions.}}$$

En revanche, le minimum de f sur $[-4\,;5]$ vaut -2, et $-3 < -2$:

$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = -3 \text{ n'admet aucune solution.}}$$

EXERCICE 32 ⋆⋆

1. $f(x) = -x^3 + 3x + 2$ donne $f'(x) = -3x^2 + 3 = -3\left(x^2 - 1\right)$, soit

$$\boxed{f'(x) = -3(x-1)(x+1)}$$

2. Le coefficient -3 étant négatif, le trinôme est *positif* entre ses racines. On calcule les quatre valeurs utiles :

$f(-2) = 8-6+2 = 4$ $\quad$ $f(-1) = 1-3+2 = 0$ $\quad$ $f(1) = -1+3+2 = 4$ $\quad$ $f(2) = -8+6+2 = 0$

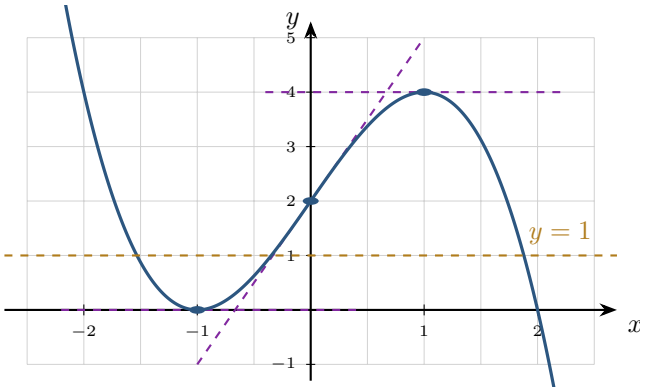
x	-2		-1		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	4	↘	0	↗	4	↘	0

$$\boxed{\text{Minimum local 0 en } -1 \quad ; \quad \text{maximum local 4 en 1.}}$$

3. On applique $y = f'(a)(x-a) + f(a)$:
   - en $a = -1$: $f(-1) = 0$ et $f'(-1) = 0$, donc $\boxed{y = 0}$ (l'axe des abscisses) ;
   - en $a = 0$: $f(0) = 2$ et $f'(0) = 3$, donc $y = 3(x-0) + 2$, soit $\boxed{y = 3x + 2}$;
   - en $a = 1$: $f(1) = 4$ et $f'(1) = 0$, donc $\boxed{y = 4}$.

Les deux tangentes horizontales correspondent bien aux deux extremums du tableau.

4. et 5. On place les points $(-1\,;0)$, $(0\,;2)$ et $(1\,;4)$, on trace les trois tangentes en violet, puis la courbe qui les épouse en chacun de ces points :



4. La droite d'équation $y = 1$ coupe la courbe une fois sur chacune des trois branches monotones :

$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 1 \text{ admet 3 solutions sur } [-2\,;2].}$$

Par lecture graphique, ces solutions valent environ :

$$\boxed{x_1 \approx -1{,}5 \qquad x_2 \approx -0{,}35 \qquad x_3 \approx 1{,}9}$$

Vérification : $f(-1{,}5) = 3{,}375 - 4{,}5 + 2 = 0{,}875$ et $f(1{,}9) = -6{,}859 + 5{,}7 + 2 = 0{,}841$, deux valeurs proches de 1.

EXERCICE 33 ⋆⋆

1. **Réponse A.** $(x^n)' = nx^{n-1}$, donc la dérivée de x^5 est $5x^4$. La réponse B oublie le facteur 5, la réponse C *augmente* l'exposant au lieu de le diminuer.
2. **Réponse B.** $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$ avec $n = 2$ donne $-\dfrac{2}{x^3}$. La réponse C oublie le signe $-$.
3. **Réponse A.** C'est la proposition 3 du cours.
4. **Réponse B.** $(uv)' = u'v + uv'$. La réponse A est l'erreur la plus fréquente : la dérivée d'un produit n'est *pas* le produit des dérivées.
5. **Réponse A.** La tangente a pour coefficient directeur $f'(a)$ et passe par le point $(a\,;f(a))$. La réponse B échange les rôles de $f(a)$ et $f'(a)$.
6. **Réponse B.** C'est la proposition 8 du cours.
7. **Réponse C.** $f'(x) = 3x^2$ s'annule en 0 *sans changer de signe* : la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$, et n'admet aucun extremum.
8. **Réponse A.** C'est la définition du taux de variation, dont le dénominateur est $(a+h) - a = h$.
9. **Réponse B.** $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$ avec $u(x) = 3x+1$, $u'(x) = 3$ et $n = 5$ donne $5 \times 3 \times (3x+1)^4 = 15(3x+1)^4$. La réponse A oublie u'.
10. **Réponse B.** $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u'(x) = 5$ donne $\dfrac{5}{2\sqrt{5x+2}}$. La réponse A oublie encore u'.

EXERCICE 34 ⋆⋆

1. **Fausse**. *Contre-exemple :* $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$, et pourtant f est croissante sur $\mathbb{R}$: il n'y a aucun extremum en 0. *Énoncé correct :* il faut de plus que f' **change de signe** en a.
2. **Vraie**. C'est le premier point de la proposition 9 du cours.
3. **Fausse**. Le coefficient directeur de la tangente est $f'(a)$; le nombre $f(a)$ est l'*ordonnée* du point de contact.
4. **Fausse**. *Contre-exemple :* avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = x$, on a $\frac{u}{v}(x) = x$ donc $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = 1$, alors que $\frac{u'}{v'}(x) = \frac{2x}{1} = 2x$. *Énoncé correct :* $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
5. **Vraie**. Si f était strictement décroissante quelque part, sa dérivée y serait négative. Une fonction croissante a donc une dérivée positive ou nulle.
6. **Fausse**. La fonction inverse est décroissante **sur chaque intervalle** de son ensemble de définition, mais pas sur $\mathbb{R}^*$ tout entier. *Contre-exemple :* $-1 < 1$ et pourtant $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$: l'ordre est conservé, ce qui contredit la décroissance.
7. **Vraie**. Si $f'(x) = k$ pour tout x de I, alors f est de la forme $x \mapsto kx + b$: c'est une fonction affine. *On remarque que* la réciproque est également vraie.

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

1. Les points M et N ont pour abscisses $-x$ et x, donc

$$\boxed{MN = x - (-x) = 2x}$$

Le point P appartient à $\mathcal{P}$ et a pour abscisse x, donc son ordonnée vaut $9 - x^2$:

$$\boxed{NP = 9 - x^2}$$

2. L'aire du rectangle est le produit de ses deux dimensions :

$$A(x) = 2x\left(9 - x^2\right) = \boxed{18x - 2x^3}$$

3. $A'(x) = 18 - 6x^2 = 6\left(3 - x^2\right) = \boxed{6\left(\sqrt{3} - x\right)\left(\sqrt{3} + x\right)}$
4. Sur $]0\,;3[$, le facteur $\sqrt{3} + x$ est positif : le signe de A' est celui de $\sqrt{3} - x$, positif avant $\sqrt{3}$ et négatif après.

x	0		$\sqrt{3}$		3
$A'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$A(x)$	‖ 0	↗	$12\sqrt{3}$	↘	0 ‖

5. L'aire est maximale pour $x = \sqrt{3}$, et vaut alors

$$A\left(\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}\left(9 - 3\right) = \boxed{12\sqrt{3} \approx 20{,}78}$$

6. Les dimensions du rectangle sont alors :

$$MN = 2\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad NP = 9 - 3 = 6$$

$$\boxed{\text{Le rectangle d'aire maximale mesure } 2\sqrt{3} \text{ sur } 6.}$$

Vérification : $2\sqrt{3} \times 6 = 12\sqrt{3}$.

EXERCICE 36 ⋆⋆⋆

1. $f_m(x) = x^3 - 3mx + 1$, où m est une constante, donc

$$\boxed{f'_m(x) = 3x^2 - 3m = 3\left(x^2 - m\right)}$$

2. **Cas $m \leqslant 0$.** Alors $-m \geqslant 0$, donc $x^2 - m \geqslant x^2 \geqslant 0$: la dérivée est positive sur $\mathbb{R}$, et ne s'annule qu'en 0 dans le cas $m = 0$.

$$\boxed{f_m \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \text{ et n'admet aucun extremum.}}$$

3. **Cas $m > 0$.** Alors $\sqrt{m}$ existe et

$$x^2 - m = \left(x - \sqrt{m}\right)\left(x + \sqrt{m}\right)$$

La dérivée s'annule donc en $-\sqrt{m}$ et $\sqrt{m}$, et elle est négative entre ces deux valeurs.

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		$\sqrt{m}$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_m(x)$		↗		↘		↗	

4. On calcule les deux extremums. Comme $\left(\sqrt{m}\right)^3 = m\sqrt{m}$:

$$f_m\left(-\sqrt{m}\right) = -m\sqrt{m} + 3m\sqrt{m} + 1 = \boxed{2m\sqrt{m} + 1} \qquad \text{(maximum local)}$$

$$f_m\left(\sqrt{m}\right) = m\sqrt{m} - 3m\sqrt{m} + 1 = \boxed{-2m\sqrt{m} + 1} \qquad \text{(minimum local)}$$

5. $f'_m(1) = 3(1 - m) = 0 \iff \boxed{m = 1}$. Pour cette valeur, les extremums sont atteints en -1 et 1, et valent :

$$f_1(-1) = -1 + 3 + 1 = \boxed{3} \qquad \text{et} \qquad f_1(1) = 1 - 3 + 1 = \boxed{-1}$$

Vérification par la formule de la question 4 : $2 \times 1 \times 1 + 1 = 3$ et $-2 \times 1 \times 1 + 1 = -1$.

6. Pour toute valeur de m, on a :

$$f_m(0) = 0^3 - 3m \times 0 + 1 = 1$$

Le terme en m disparaît, car il est multiplié par $x = 0$.

$$\boxed{\text{Toutes les courbes passent par le point de coordonnées } (0\,;1).}$$