# EXERCICES – CHAPITRE 4

## DÉRIVATION

### Taux de variation et nombre dérivé

**EXERCICE 1** ⋆

Dans chaque cas, calculer le taux de variation de la fonction $f$ entre les deux réels indiqués.

a) $f(x) = 3x - 5$ entre 1 et 4

b) $f(x) = x^2$ entre 2 et 5

c) $f(x) = x^2$ entre $-1$ et 3

d) $f(x) = x^3$ entre 0 et 2

e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ entre 1 et 4

f) $f(x) = \sqrt{x}$ entre 1 et 9

g) $f(x) = x^2 - 3x$ entre $-2$ et 1

h) $f(x) = -4x + 1$ entre $-3$ et 5

Que remarque-t-on pour les questions a) et h) ? Expliquer.

**EXERCICE 2** ⋆

Dans chaque cas, exprimer puis simplifier le taux de variation $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ pour la valeur de $a$ indiquée et pour $h \neq 0$. Observer ensuite l'expression obtenue et indiquer de quelle valeur ce taux se rapproche lorsque $h$ devient très proche de 0 : cette valeur est le **nombre dérivé** $f'(a)$.

a) $f(x) = x^2$ avec $a = 3$

b) $f(x) = x^2 + 2x$ avec $a = 1$

c) $f(x) = 3x^2 - x$ avec $a = 2$

d) $f(x) = x^3$ avec $a = 1$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ avec $a = 2$

f) $f(x) = 5x - 4$ avec $a$ quelconque

*On rappelle que* $(1+h)^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3$. Que remarque-t-on à la question f) ?

**EXERCICE 3** ⋆⋆

**Partie A : approcher un nombre dérivé par le calcul**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On s'intéresse au nombre dérivé de $f$ en 3.

1. Recopier et compléter le tableau suivant, en arrondissant si nécessaire au millième.

| $h$ | 1 | 0,5 | 0,1 | 0,01 | $-0,01$ | $-0,1$ | $-0,5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$ | | | | | | | |

2. De quelle valeur le taux de variation semble-t-il se rapprocher lorsque $h$ se rapproche de 0, que ce soit par valeurs positives ou négatives ? Conjecturer la valeur de $f'(3)$.
3. Retrouver ce résultat en utilisant la formule de dérivation de $x \mapsto x^2$.
4. Reprendre les questions 1 et 2 avec la fonction $g$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}$, au point $a = 4$, en se limitant à $h = 1\,;\ 0{,}1\,;\ 0{,}01\,;\ 0{,}001$. Vérifier ensuite à l'aide de la formule du cours.

**Partie B : approcher** $f(a+h)$

Lorsque $h$ est très petit, le taux de variation $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est très proche de $f'(a)$. On peut donc écrire :

$$f(a+h) \approx f(a) + h \times f'(a)$$

5. Justifier cette écriture à partir de la définition du taux de variation.
6. En utilisant $f(3) = 9$ et $f'(3) = 6$, donner une valeur approchée de $f(3{,}02)$ **sans calculer** $3{,}02^2$. Comparer ensuite avec la valeur exacte, et calculer l'erreur commise.
7. De la même manière, donner une valeur approchée de $\sqrt{4{,}1}$, puis comparer à la valeur affichée par la calculatrice.
8. Soit $k$ la fonction inverse, définie sur $\mathbb{R}^*$ par $k(x) = \dfrac{1}{x}$. Calculer $k(2)$ et $k'(2)$, puis donner une valeur approchée de $\dfrac{1}{2{,}05}$. Comparer à la valeur exacte.
9. L'approximation est-elle meilleure pour $h = 0{,}1$ ou pour $h = 0{,}001$ ? Expliquer.

## EXERCICE 4 ⋆⋆

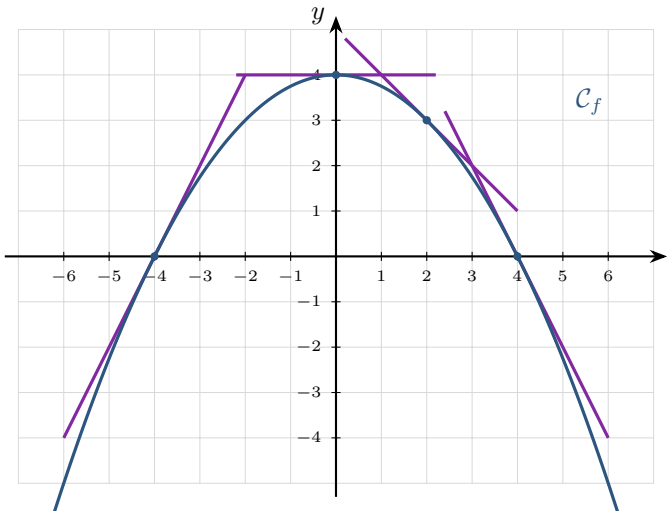
Un mobile se déplace en ligne droite. À l'instant $t$ (en secondes), la distance parcourue depuis son départ, en mètres, est donnée par :

$$d(t) = t^2 + 2t \qquad \text{pour } t \in [0\,;10]$$

1. Calculer la vitesse moyenne du mobile entre les instants $t = 1$ et $t = 3$.
2. Exprimer puis simplifier le taux de variation de $d$ entre 1 et $1 + h$, pour $h \neq 0$.
3. De quelle valeur ce taux se rapproche-t-il lorsque $h$ devient très petit ? Cette valeur est la **vitesse instantanée** du mobile à l'instant $t = 1$.
4. Déterminer $d'(t)$, puis la vitesse instantanée à l'instant $t = 3$ et à l'instant $t = 10$.
5. À quel instant la vitesse du mobile atteint-elle 12 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ?
6. Donner une valeur approchée de la distance parcourue à l'instant $t = 1{,}02$, sans calculer $1{,}02^2$.

## EXERCICE 5 ⋆

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction $f$ définie sur $[-6\,;6]$, ainsi que ses tangentes en quatre points, tracées en violet.

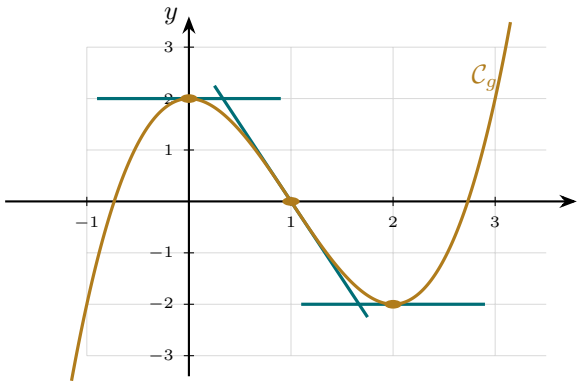



1. Déterminer par lecture graphique $f(-4)$, $f(0)$, $f(2)$ et $f(4)$.
2. Déterminer de même les nombres dérivés $f'(-4)$, $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(4)$.
3. En quel point la tangente tracée est-elle horizontale ? Que vaut alors le nombre dérivé ?

4. Parmi les quatre nombres dérivés lus, lesquels sont positifs ? lesquels sont négatifs ? Que peut-on dire de la tangente dans chacun de ces deux cas ?
5. Sur l'intervalle $[-6\,;0]$, la courbe monte-t-elle ou descend-elle ? Quel semble être le signe des nombres dérivés sur cet intervalle ?

### EXERCICE 6 ⋆

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction $g$ définie sur $[-1\,;3]$, ainsi que ses tangentes en trois points.




1. Déterminer par lecture graphique $g(0)$, $g(1)$ et $g(2)$.
2. Déterminer de même $g'(0)$, $g'(1)$ et $g'(2)$.
3. En quels points la tangente est-elle horizontale ?
4. Le nombre dérivé $g'(0{,}5)$ est-il positif ou négatif ? Justifier en observant l'allure de la courbe, sans aucun calcul.
5. Même question pour $g'(3)$.

## Fonction dérivée : calculs

### EXERCICE 7 ⋆

Pour chacune des fonctions suivantes, définie sur $\mathbb{R}$, donner la fonction dérivée.

a) $f(x) = 5$

b) $f(x) = 3x + 5$

c) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$

d) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 1$

e) $f(x) = -5x^3 + 4x^2 - 9x - 5$

f) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^4 + 3x^3 + \sqrt{3}\,x - 1$

g) $f(x) = \dfrac{x^3 + 12x - 1}{2}$

h) $f(x) = x^5$

i) $f(x) = 7x^4 - \dfrac{x^2}{2}$

j) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{5}$

k) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$

l) $f(x) = -x^6 + 2x^3 - x$

*Attention à la question f) :* $\sqrt{3}$ est un nombre, pas une fonction.

## EXERCICE 8 ⋆

Pour chacune des fonctions suivantes, donner son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité, puis la fonction dérivée.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x} - 2x$

b) $f(x) = 5\sqrt{x} + \dfrac{x^3}{3}$

c) $f(x) = -\dfrac{4}{x^3}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{2}{5x}$

e) $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$

f) $f(x) = 2\sqrt{x} - \dfrac{3}{x}$

g) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$

h) $f(x) = \dfrac{1}{x^4} + \sqrt{x}$

i) $f(x) = -6\sqrt{x} + 5$

j) $f(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{3x^2}$

## EXERCICE 9 ⋆⋆

Chacune des fonctions suivantes est un **produit**. Après avoir posé $u$ et $v$, donner la fonction dérivée en précisant l'ensemble de dérivabilité.

a) $f(x) = (2x-1)(x+3)$

b) $f(x) = x\sqrt{x}$

c) $f(x) = 2\sqrt{x}\,(x^2+3x)$

d) $f(x) = (x^2+1)(\sqrt{x}-2x)$

e) $f(x) = (3x-2)(x^2+x+1)$

f) $f(x) = (2x-1)(2x-1)$

g) $f(x) = \sqrt{x}\,(x-4)$

h) $f(x) = (x^2+2) \times \dfrac{1}{x}$

Pour la question f), vérifier le résultat en développant d'abord l'expression de $f$.

## EXERCICE 10 ⋆⋆

Chacune des fonctions suivantes est l'**inverse** d'une fonction. Après avoir posé $v$, donner la fonction dérivée en précisant l'ensemble de dérivabilité.

a) $f(x) = \dfrac{2}{3x-5}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \dfrac{-3}{x^2-4}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$

f) $f(x) = \dfrac{5}{x^3+x}$

## EXERCICE 11 ⋆⋆

Chacune des fonctions suivantes est un **quotient**. Après avoir posé $u$ et $v$, donner la fonction dérivée sous forme simplifiée, en précisant l'ensemble de dérivabilité.

a) $f(x) = \dfrac{1-2x}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{2-x^2}{2+x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-4x+8}{2x-5}$

e) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2+1}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x-1}$

g) $f(x) = \dfrac{x+3}{2x-1}$

h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x}$

## EXERCICE 12 ⋆⋆

Chacune des fonctions suivantes est de la forme $u^n$. Après avoir posé $u$ et précisé $n$, donner la fonction dérivée en utilisant la formule $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$, puis préciser l'ensemble de dérivabilité.

a) $f(x) = (3x-1)^4$

b) $f(x) = (x^2+1)^3$

c) $f(x) = (-2x+3)^4$

d) $f(x) = (3x^3+1)^2$

e) $f(x) = (x^2-4x)^5$

f) $f(x) = (x^2+x+1)^2$

g) $f(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$

h) $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^3}$

*Pour les questions g) et h), on remarquera que* $\dfrac{1}{v^n} = v^{-n}$ *: la formule s'applique aussi avec un exposant négatif.* Vérifier la question g) en utilisant cette fois la règle de dérivation de l'inverse.

## EXERCICE 13 ⋆⋆

Chacune des fonctions suivantes est de la forme $\sqrt{u}$. Après avoir posé $u$, donner l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité, puis la fonction dérivée à l'aide de la formule $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

a) $f(x) = \sqrt{x-4}$

b) $f(x) = \sqrt{3x+1}$

c) $f(x) = \sqrt{1-2x}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2+4}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

f) $f(x) = 2\sqrt{x^2-9}$

g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{2x}-1}$

h) $f(x) = x\sqrt{x+1}$

*Attention :* pour la question e), on justifiera que $u$ ne s'annule jamais ; pour la question h), il faut combiner deux règles.

## EXERCICE 14 ⋆⋆

Les fonctions suivantes mélangent toutes les règles du chapitre : il faut donc commencer par reconnaître de quel type de fonction il s'agit. Donner à chaque fois l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité, et la fonction dérivée.

a) $f(x) = \sqrt{x}\,(2x-1)$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$

c) $f(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x}}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

f) $f(x) = x^2\sqrt{x}$

g) $f(x) = \dfrac{4}{x} - 3x^2 + 7$

h) $f(x) = (x-1)\left(\dfrac{1}{x}+2\right)$

i) $f(x) = (2x-5)^3$

j) $f(x) = \sqrt{4x-3}$

## EXERCICE 15 ⋆

**Retour sur les exercices 5 et 6.** Maintenant que l'on sait dériver, on peut vérifier par le calcul les nombres dérivés qui avaient été lus graphiquement.

1. La fonction de l'exercice 5 est définie sur $[-6\,;6]$ par $f(x) = 4 - \dfrac{x^2}{4}$. Calculer $f'(x)$, puis $f'(-4)$, $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(4)$. Comparer aux valeurs lues.

2. La fonction de l'exercice 6 est définie sur $[-1\,;3]$ par $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Calculer $g'(x)$, puis $g'(0)$, $g'(1)$ et $g'(2)$. Comparer aux valeurs lues.
3. Calculer $g'(0{,}5)$ et $g'(3)$, et vérifier les signes conjecturés à l'exercice 6.
4. Résoudre $f'(x) = 0$ et $g'(x) = 0$. Retrouve-t-on les abscisses des tangentes horizontales observées sur les deux figures ?

## Équation de tangente

### EXERCICE 16 ⋆

Dans chaque cas, déterminer une équation de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse $a$.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$ et $a = 2$

b) $f(x) = x^3$ et $a = -1$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $a = 2$

d) $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 9$

e) $f(x) = -x^2 + 4x$ et $a = 3$

f) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ et $a = 2$

### EXERCICE 17 ⋆⋆

1. Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. Déterminer les points de la courbe de $f$ en lesquels la tangente est horizontale, puis donner l'équation de ces tangentes.
2. Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Déterminer le point de la courbe en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 2x - 7$, puis l'équation de cette tangente.
3. Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$. Déterminer les points de la courbe en lesquels la tangente a pour coefficient directeur 9.
4. Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. La courbe de $f$ admet-elle une tangente horizontale ? Justifier.
5. Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$. Déterminer le point de la courbe en lequel la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

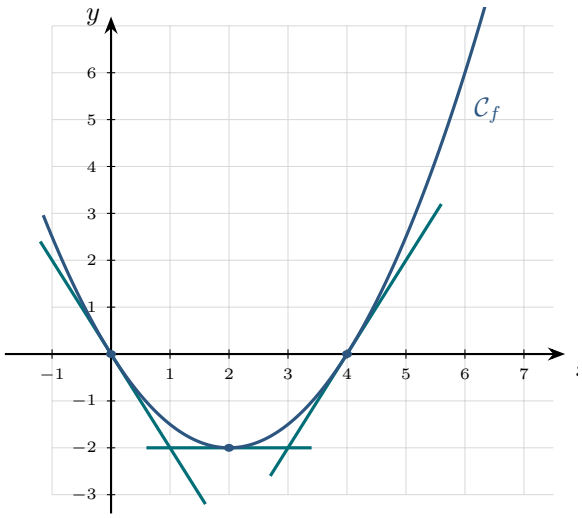
### EXERCICE 18 ⋆⋆

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, de courbe $\mathcal{P}$. Pour tout réel $a$, on note $T_a$ la tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse $a$.

1. Montrer que $T_a$ a pour équation $y = 2ax - a^2$.
2. Déterminer les valeurs de $a$ pour lesquelles $T_a$ passe par le point $A(0\,;-1)$. En déduire les équations des tangentes correspondantes.
3. Déterminer de même les valeurs de $a$ pour lesquelles $T_a$ passe par le point $B(1\,;0)$.
4. Existe-t-il une tangente à $\mathcal{P}$ passant par le point $C(0\,;1)$ ? Justifier, puis interpréter graphiquement ce résultat.

## EXERCICE 19 ⋆⋆

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction $f$ définie sur $[-1\,;7]$, ainsi que ses tangentes en trois points.

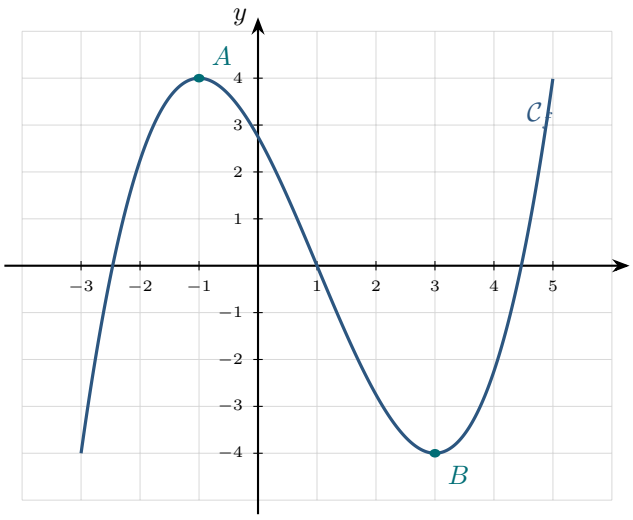



1. Déterminer par lecture graphique $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$, puis $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(4)$.
2. En déduire une équation de chacune des trois tangentes tracées.
3. On admet que $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x$. Calculer $f'(x)$ et vérifier les trois nombres dérivés lus à la question 1.
4. Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 6, puis la tracer sur le graphique.
5. Existe-t-il un point de la courbe en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x + 3$ ? Si oui, déterminer ses coordonnées et l'équation de cette tangente.

# Dérivée, variations et extremums

## EXERCICE 20 ⋆

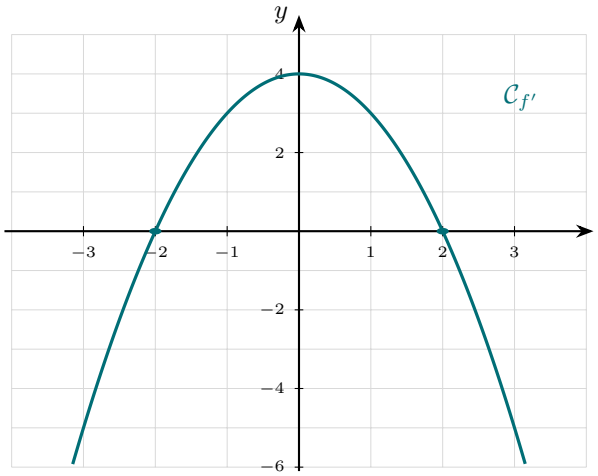
On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction $f$ définie sur $[-3\,;5]$. Les points $A$ et $B$ sont les deux points de la courbe en lesquels la tangente est horizontale.



1. Donner les coordonnées des points $A$ et $B$.
2. Dresser le tableau de variations de $f$ sur $[-3\,;5]$.
3. En déduire le tableau de signes de $f'$ sur $[-3\,;5]$.
4. Pour quelles valeurs de $x$ a-t-on $f'(x) = 0$ ?
5. Préciser les extremums locaux de $f$ ainsi que leur nature.
6. Le nombre $f'(0)$ est-il positif ou négatif ? Et $f'(4)$ ? Justifier sans calcul.

## EXERCICE 21 ⋆⋆

**Attention : la courbe ci-dessous est celle de la fonction dérivée $f'$**, et non celle de $f$. La fonction $f$ est définie et dérivable sur $[-3\,;3]$.




1. Déterminer par lecture graphique les valeurs de $x$ pour lesquelles $f'(x) = 0$.
2. Dresser le tableau de signes de $f'$ sur $[-3\,;3]$.
3. En déduire le tableau de variations de $f$ sur $[-3\,;3]$.
4. La fonction $f$ admet-elle des extremums locaux ? Si oui, en quelles abscisses, et de quelle nature ?
5. Lire $f'(0)$. Que représente ce nombre pour la courbe de $f$ ?
6. On sait de plus que $f(0) = 1$. Donner une équation de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse 0.

## EXERCICE 22 ⋆⋆

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur $[-4\,;6]$, dont la dérivée $f'$ admet le tableau de signes suivant :

| $x$ | $-4$ | | $-2$ | | $1$ | | $4$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

On donne par ailleurs $f(-4) = 5$, $f(-2) = -3$, $f(1) = 0$, $f(4) = 6$ et $f(6) = 2$.

1. Dresser le tableau de variations de $f$ sur $[-4\,;6]$.
2. Préciser les extremums locaux de $f$ et leur nature.
3. *Attention :* $f'$ s'annule en 1 sans changer de signe. Que peut-on en dire pour la courbe de $f$ en ce point ?

4. Déterminer le maximum et le minimum de $f$ sur l'intervalle $[-4\,;6]$.
5. Combien l'équation $f(x) = 1$ admet-elle de solutions sur $[-4\,;6]$ ? On justifiera à l'aide du tableau de variations.

## EXERCICE 23 ⋆

Pour chacune des fonctions suivantes, définie sur $\mathbb{R}$ : calculer $f'$, étudier son signe, dresser le tableau de variations de $f$, puis préciser l'extremum obtenu.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$
b) $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$
c) $f(x) = 3x^2 + 6x + 1$
d) $f(x) = -x^2 + 6x$

## EXERCICE 24 ⋆⋆

Pour chacune des fonctions suivantes, définie sur $\mathbb{R}$ : calculer $f'$, la **factoriser**, étudier son signe, puis dresser le tableau de variations de $f$ en précisant les extremums locaux.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$
b) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$
c) $f(x) = x^3 - 12x + 5$
d) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

*La question d) réserve une surprise : on commentera soigneusement le résultat obtenu.*

## EXERCICE 25 ⋆⋆

Même travail pour les fonctions suivantes, sur l'intervalle indiqué : calculer $f'$, la mettre sous forme d'un **quotient**, étudier son signe, dresser le tableau de variations de $f$ et préciser les extremums éventuels.

*Conseil.* Pour une fonction rationnelle, la dérivée s'écrit toujours $f'(x) = \dfrac{N(x)}{\big(v(x)\big)^2}$. Le dénominateur étant un carré, il est strictement positif sur l'intervalle d'étude : **le signe de $f'$ est donc celui de son seul numérateur** $N(x)$, que l'on prendra soin de factoriser.

a) $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
b) $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
d) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
e) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ sur $]2\,;+\infty[$
f) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$ sur $]-3\,;+\infty[$
g) $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x-1}$ sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$
h) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ sur $]1\,;+\infty[$
i) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$
j) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x-1}$ sur $]1\,;+\infty[$
k) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$
l) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty\,;0[$
m) $f(x) = \sqrt{x} - x$ sur $]0\,;+\infty[$
n) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ sur $]0\,;+\infty[$

*Deux remarques pour finir.* Aux questions d) et j), le numérateur de $f'$ est un trinôme qui ne s'annule jamais : on le justifiera par son discriminant, et l'on en tirera une conclusion immédiate sur les variations. La question l) est la seule à porter sur un intervalle de réels **négatifs** : on prendra garde à ne conserver que la racine appartenant à cet intervalle.

## EXERCICE 26 ⋆⋆

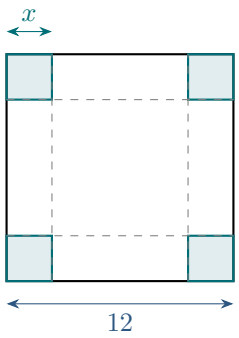
Dans chaque cas, la fonction est étudiée sur un intervalle **fermé**. Dresser son tableau de variations, puis déterminer son maximum et son minimum sur cet intervalle, en précisant en quelles valeurs ils sont atteints.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ sur $[0\,;4]$
2. $g(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$ sur $[-1\,;3]$
3. $h(x) = x + \dfrac{4}{x}$ sur $[1\,;5]$

*On prendra garde à ne pas oublier les valeurs aux bornes de l'intervalle : un extremum global peut fort bien être atteint en une borne, là où la dérivée ne s'annule pas.*

## EXERCICE 27 ⋆⋆

On dispose d'une plaque de carton carrée de 12 cm de côté. On découpe à chaque coin un carré de côté $x$, exprimé en centimètres, puis on relève les bords pour former une boîte sans couvercle.




1. Justifier que $x$ appartient à l'intervalle $[0\,;6]$.
2. Exprimer les dimensions de la boîte en fonction de $x$, puis montrer que son volume, en cm$^3$, vaut $V(x) = x(12-2x)^2$.
3. Développer $V(x)$, puis montrer que $V'(x) = 12(x-2)(x-6)$.
4. Étudier le signe de $V'$ sur $[0\,;6]$ et dresser le tableau de variations de $V$.
5. En déduire la valeur de $x$ pour laquelle le volume est maximal, ainsi que ce volume maximal.

## EXERCICE 28 ⋆⋆

Une entreprise fabrique et vend $q$ centaines d'objets, avec $0 \leqslant q \leqslant 20$. Le coût total de production, en centaines d'euros, est donné par :

$$C(q) = q^3 - 24q^2 + 245q + 100$$

Chaque centaine d'objets est vendue 200 centaines d'euros.

1. Exprimer la recette $R(q)$ en fonction de $q$.
2. Montrer que le bénéfice $B(q) = R(q) - C(q)$ vaut $B(q) = -q^3 + 24q^2 - 45q - 100$.
3. Calculer $B'(q)$, puis montrer que $B'(q) = -3(q-1)(q-15)$.
4. Étudier le signe de $B'$ sur $[0\,;20]$ et dresser le tableau de variations de $B$.
5. En déduire la production qui rend le bénéfice maximal, ainsi que ce bénéfice maximal en euros.
6. Calculer $B(0)$ et $B(1)$. L'entreprise a-t-elle intérêt à produire très peu ? Commenter.

## Exercices de synthèse

### EXERCICE 29 ⋆⋆

1. Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$, où $a$, $b$ et $c$ sont des réels. Sachant que $f'(x) = 6x+7$ pour tout réel $x$ et que $f(1) = 6$, déterminer $a$, $b$ et $c$.
2. Soit $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. Sachant que $g'(x) = 6x^2 - 5x + 1$ pour tout réel $x$, déterminer $a$, $b$ et $c$.
3. Soit $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = ax^2 + bx + c$. Sachant que $h'(x) = -4x + \dfrac{1}{2}$ et que la courbe de $h$ passe par le point de coordonnées $(2\,;-9)$, déterminer $a$, $b$ et $c$.
4. Soit $k$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $k(x) = ax + \dfrac{b}{x}$. Sachant que $k(1) = 4$ et $k'(1) = 0$, déterminer $a$ et $b$.

### EXERCICE 30 ⋆⋆

Soit $f$ la fonction définie sur $[-3\,;5]$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$$

1. Calculer $f'(x)$, puis vérifier que $f'(x) = 3(x-3)(x+1)$.
2. Étudier le signe de $f'$ sur $[-3\,;5]$ et dresser le tableau de variations de $f$.
3. Préciser les extremums locaux de $f$, ainsi que le maximum et le minimum de $f$ sur $[-3\,;5]$.
4. Déterminer une équation de la tangente $T$ à la courbe de $f$ au point d'abscisse 0.
5. Déterminer les points de la courbe en lesquels la tangente est horizontale.
6. Résoudre l'équation $f'(x) = -9$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

### EXERCICE 31 ⋆⋆

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur $[-4\,;5]$. On dispose des seuls renseignements suivants :

$$f(-4) = -1 \quad f(-2) = 3 \quad f(1) = -2 \quad f(3) = 0 \quad f(5) = 4$$

$$f'(-2) = 0 \qquad f'(1) = 0 \qquad f'(3) = 2$$

1. Dans un repère orthonormé, placer les cinq points de la courbe dont on connaît les coordonnées.
2. Que signifient graphiquement les égalités $f'(-2) = 0$ et $f'(1) = 0$ ? Tracer les deux tangentes correspondantes.
3. Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 3, puis la tracer.
4. En déduire un tableau de variations compatible avec toutes ces données.
5. Tracer alors une courbe possible pour la fonction $f$.
6. Combien l'équation $f(x) = 1$ admet-elle de solutions ? Et l'équation $f(x) = -3$ ?

*On prendra un repère allant de $-5$ à 6 en abscisse et de $-3$ à 5 en ordonnée.*

## EXERCICE 32 ⋆⋆

Soit $f$ la fonction définie sur $[-2\,;2]$ par :

$$f(x) = -x^3 + 3x + 2$$

1. Calculer $f'(x)$, puis le factoriser.
2. Étudier le signe de $f'$ et dresser le tableau de variations de $f$ sur $[-2\,;2]$. On précisera les valeurs de $f$ aux bornes et aux extremums.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de $f$ en chacun des points d'abscisses $-1$, $0$ et $1$.
4. Dans un repère orthonormé, placer les trois points de contact, puis tracer les trois tangentes.
5. Tracer alors la courbe de $f$, en s'appuyant sur le tableau de variations et sur les trois tangentes.
6. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ sur $[-2\,;2]$, puis donner une valeur approchée de chacune d'elles.

*On prendra un repère allant de $-2$ à $2$ en abscisse et de $-1$ à $5$ en ordonnée.*

## EXERCICE 33 ⋆⋆

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Déterminer laquelle et justifier.

| | Réponse A | Réponse B | Réponse C |
|---|---|---|---|
| 1. Si $f(x) = x^5$, alors $f'(x)$ vaut | $5x^4$ | $x^4$ | $5x^6$ |
| 2. La dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$ est | $-\dfrac{1}{2x}$ | $-\dfrac{2}{x^3}$ | $\dfrac{2}{x^3}$ |
| 3. La dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ est | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x}$ | $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| 4. Si $f = uv$, alors $f'$ vaut | $u'v'$ | $u'v + uv'$ | $u'v - uv'$ |
| 5. Si $f'(x) < 0$ sur un intervalle $I$, alors sur $I$ la fonction $f$ est | croissante | décroissante | constante |
| 6. Pour $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$. La fonction $f$ admet en 0 | un minimum | un maximum | aucun extremum |
| 7. Le taux de variation de $f$ entre $a$ et $a+h$ est | $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ | $f(a+h)-f(a)$ | $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h}$ |
| 8. La dérivée de $x \mapsto (3x+1)^5$ est | $5(3x+1)^4$ | $15(3x+1)^4$ | $3(3x+1)^4$ |
| 9. La dérivée de $x \mapsto \sqrt{5x+2}$ est | $\dfrac{1}{2\sqrt{5x+2}}$ | $\dfrac{5}{2\sqrt{5x+2}}$ | $\dfrac{5}{\sqrt{5x+2}}$ |

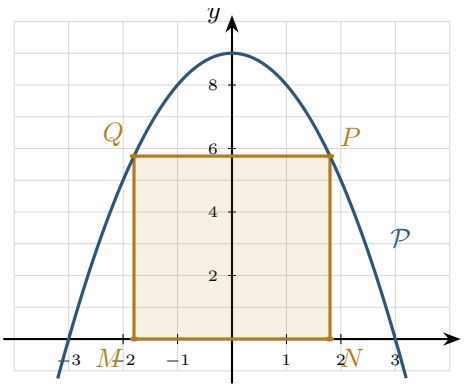
## EXERCICE 34 ⋆⋆

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est fausse, donner un contre-exemple ou l'énoncé correct.

1. Si $f'(a) = 0$, alors $f$ admet un extremum local en $a$.
2. Si $f$ est dérivable et admet un extremum local en $a$, alors $f'(a) = 0$.
3. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $a$ a pour coefficient directeur $f(a)$.
4. La dérivée d'un quotient est le quotient des dérivées.
5. Si $f$ est dérivable et croissante sur un intervalle $I$, alors $f'(x) \geqslant 0$ sur $I$.
6. La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^*$.
7. Si $f'$ est constante sur $I$, alors $f$ est une fonction affine sur $I$.

## EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = 9 - x^2$. Pour tout réel $x$ de $]0\,;3[$, on construit le rectangle $MNPQ$ dont les sommets $M$ et $N$ appartiennent à l'axe des abscisses, d'abscisses respectives $-x$ et $x$, et dont les sommets $P$ et $Q$ appartiennent à $\mathcal{P}$.




1. Exprimer la longueur $MN$ puis la hauteur $NP$ en fonction de $x$.
2. En déduire que l'aire du rectangle vaut $A(x) = 18x - 2x^3$.
3. Calculer $A'(x)$ et le factoriser.
4. Étudier le signe de $A'$ sur $]0\,;3[$ et dresser le tableau de variations de $A$.
5. En déduire la valeur exacte de $x$ pour laquelle l'aire est maximale, puis la valeur exacte de cette aire maximale. En donner une valeur approchée au centième.
6. Déterminer alors les dimensions exactes du rectangle d'aire maximale.

## EXERCICE 36 ⋆⋆⋆

Pour tout réel $m$, on considère la fonction $f_m$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_m(x) = x^3 - 3mx + 1$$

1. Calculer $f'_m(x)$ en fonction de $m$.
2. **Premier cas.** On suppose $m \leqslant 0$. Étudier le signe de $f'_m$ et en déduire les variations de $f_m$ sur $\mathbb{R}$. La fonction admet-elle des extremums ?
3. **Second cas.** On suppose $m > 0$. Montrer que $f'_m$ s'annule en deux valeurs que l'on exprimera en fonction de $m$, puis dresser le tableau de variations de $f_m$.

4. Montrer que, dans ce second cas, le maximum local de $f_m$ vaut $2m\sqrt{m}+1$ et son minimum local $-2m\sqrt{m}+1$.
5. Déterminer la valeur de $m$ pour laquelle $f'_m(1) = 0$. Pour cette valeur, préciser les deux extremums locaux de $f_m$.
6. Montrer que toutes les courbes des fonctions $f_m$ passent par un même point, dont on donnera les coordonnées.