CORRIGÉ – CHAPITRE 5

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Tableaux à double entrée

EXERCICE 1 ⋆

Dans un tableau d'effectifs, une probabilité conditionnelle se lit comme une proportion : on se restreint à la ligne (ou à la colonne) correspondant à l'événement qui conditionne, et c'est son effectif qui devient le dénominateur.

1. On divise l'effectif concerné par l'effectif total, qui vaut 400 :

$$P(C) = \frac{120}{400} = \boxed{0{,}3} \qquad P(F) = \frac{180}{400} = \boxed{0{,}45} \qquad P(C \cap F) = \frac{48}{400} = \boxed{0{,}12}$$

2. On se restreint à la colonne des cadres, qui compte 120 salariés :

$$P_C(F) = \frac{48}{120} = \boxed{0{,}4}$$

Parmi les cadres de l'entreprise, 40 % sont des femmes.

3. On se restreint cette fois à la ligne des femmes, qui compte 180 salariées :

$$P_F(C) = \frac{48}{180} = \boxed{\frac{4}{15} \approx 0{,}267}$$

Les deux résultats diffèrent car ils ne portent pas sur la même population de référence : le premier compare 48 femmes cadres aux 120 cadres, le second aux 180 femmes.

En général, $P_C(F) \neq P_F(C)$.

4. On se restreint à la colonne des non-cadres, qui compte 280 salariés :

$$P_{\overline{C}}(F) = \frac{132}{280} = \boxed{\frac{33}{70} \approx 0{,}471}$$

5. On compare $P(C \cap F)$ et $P(C) \times P(F)$:

$$P(C) \times P(F) = 0{,}3 \times 0{,}45 = 0{,}135 \qquad \text{alors que} \qquad P(C \cap F) = 0{,}12$$

$0{,}135 \neq 0{,}12$: les événements C et F ne sont pas indépendants.

On le voyait déjà aux questions 2 et 4 : la proportion de femmes n'est pas la même chez les cadres (40 %) et chez les non-cadres (47,1 %).

EXERCICE 2 ⋆

1. $P(V) = \frac{110}{250} = \boxed{0{,}44}$ $\qquad P(U) = \frac{150}{250} = \boxed{0{,}6}$ $\qquad P(U \cap V) = \frac{84}{250} = \boxed{0{,}336}$
2. $P_U(V) = \frac{84}{150} = \boxed{0{,}56}$ et $P_{\overline{U}}(V) = \frac{26}{100} = \boxed{0{,}26}$

Les citadins sont bien plus nombreux, en proportion, à utiliser régulièrement le vélo.

3. $P_V(U) = \dfrac{84}{110} = \boxed{\dfrac{42}{55} \approx 0{,}764}$

4. $P(U) \times P_U(V) + P(\overline{U}) \times P_{\overline{U}}(V) = 0{,}6 \times 0{,}56 + 0{,}4 \times 0{,}26 = 0{,}336 + 0{,}104 = 0{,}44$

$$\boxed{\text{On retrouve bien } P(V) = 0{,}44.}$$

C'est la formule des probabilités totales, que l'on démontrera au paragraphe suivant : la population se partage entre citadins et non-citadins.

5. $P(U) \times P(V) = 0{,}6 \times 0{,}44 = 0{,}264$, alors que $P(U \cap V) = 0{,}336$:

$$\boxed{\text{les événements ne sont pas indépendants.}}$$

EXERCICE 3 ⋆

1. On complète en utilisant les totaux, ligne par ligne et colonne par colonne.

	Roman	*Autre*	*Total*
Paiement par carte	**150**	210	**360**
Paiement en espèces	60	**80**	140
Total	210	**290**	500

Ordre de remplissage : le total « carte » vaut $500 - 140 = 360$; la case « carte et roman » vaut $210 - 60 = 150$; la case « espèces et autre » vaut $140 - 60 = 80$; le total « autre » vaut $500 - 210 = 290$, ce que confirme $210 + 80 = 290$.

2. $P(R) = \dfrac{210}{500} = \boxed{0{,}42}$ $\quad P(C) = \dfrac{360}{500} = \boxed{0{,}72}$ $\quad P(R \cap C) = \dfrac{150}{500} = \boxed{0{,}3}$

3. $P_C(R) = \dfrac{150}{360} = \boxed{\dfrac{5}{12} \approx 0{,}417}$ et $P_R(C) = \dfrac{150}{210} = \boxed{\dfrac{5}{7} \approx 0{,}714}$

4. Parmi les 360 paiements par carte, 150 concernent un roman et 210 un autre ouvrage :

$$\boxed{\text{il est plus probable qu'il ait acheté un autre ouvrage } \left(\tfrac{7}{12} \text{ contre } \tfrac{5}{12}\right).}$$

EXERCICE 4 ⋆⋆

1. $P(A) = \dfrac{420}{800} = \boxed{0{,}525}$ et $P(R) = \dfrac{340}{800} = \boxed{0{,}425}$

2. $P_A(R) = \dfrac{240}{420} = \boxed{\dfrac{4}{7}}$ et $P_J(R) = \dfrac{100}{380} = \boxed{\dfrac{5}{19}}$

3. $P(A) \times P_A(R) + P(J) \times P_J(R) = \dfrac{21}{40} \times \dfrac{4}{7} + \dfrac{19}{40} \times \dfrac{5}{19} = \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{12+5}{40} = \dfrac{17}{40}$

$$\boxed{\dfrac{17}{40} = 0{,}425 = P(R)}$$

4. $P_R(A) = \dfrac{240}{340} = \boxed{\dfrac{12}{17} \approx 0{,}706}$

$$\boxed{\text{Parmi les emprunts de romans, environ } 70{,}6\,\% \text{ sont le fait d'adultes.}}$$

5. $P_J(B) = \dfrac{210}{380} = \boxed{\dfrac{21}{38} \approx 0{,}553}$ et $P_B(J) = \dfrac{210}{270} = \boxed{\dfrac{7}{9} \approx 0{,}778}$

6. $P(D) = \dfrac{190}{800} = 0{,}2375$ et $P(A \cap D) = \dfrac{120}{800} = 0{,}15$, alors que

$$P(A) \times P(D) = 0{,}525 \times 0{,}2375 \approx 0{,}1247$$

$\boxed{0{,}1247 \neq 0{,}15}$: les événements A et D ne sont pas indépendants.

La formule des probabilités conditionnelles

EXERCICE 5 ⋆

a) $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}4} = \boxed{0{,}3}$

b) $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}35}{0{,}5} = \boxed{0{,}7}$

c) $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}25 \times 0{,}8 = \boxed{0{,}2}$

d) $P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P_A(B)} = \dfrac{0{,}18}{0{,}6} = \boxed{0{,}3}$

e) $P_A(B) = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{12} \times 3 = \boxed{\dfrac{1}{4}}$

f) $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{9} = \boxed{\dfrac{2}{15}}$

Attention à ne pas confondre les deux écritures : dans $P_A(B)$, c'est $P(A)$ qui figure au dénominateur — l'événement qui conditionne est celui qui sert de référence.

EXERCICE 6 ⋆

1. Les deux branches issues du nœud A mènent à B et à $\overline{B}$, et la somme des probabilités issues d'un même nœud vaut 1 :

$$P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - 0{,}4 = \boxed{0{,}6}$$

2. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}7 \times 0{,}4 = \boxed{0{,}28}$

   $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P_A(\overline{B}) = 0{,}7 \times 0{,}6 = \boxed{0{,}42}$

3. $0{,}28 + 0{,}42 = 0{,}7 = P(A)$. C'était prévisible : les événements $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ sont incompatibles et leur réunion est exactement A, puisque B est réalisé ou ne l'est pas.

4. $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}28}{0{,}55} = \boxed{\dfrac{28}{55} \approx 0{,}509}$

5. $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}55 - 0{,}28 = \boxed{0{,}27}$

6. $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$, donc $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{0{,}27}{0{,}3} = \boxed{0{,}9}$

EXERCICE 7 ⋆⋆

1. En appliquant la formule dans les deux sens :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) \qquad \text{et} \qquad P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$

2. Ces deux expressions désignent le même nombre, donc

$$P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

et en divisant les deux membres par $P(A)$, qui est non nul :

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(B) \times P_B(A)}{P(A)}}$$

3. (a) $P_A(B) = \dfrac{0{,}5 \times 0{,}6}{0{,}4} = \dfrac{0{,}3}{0{,}4} = \boxed{0{,}75}$

(b) $P_A(B) = \dfrac{0{,}2 \times 0{,}5}{0{,}25} = \dfrac{0{,}1}{0{,}25} = \boxed{0{,}4}$

(c) $P_B(A) = \dfrac{0{,}6 \times 0{,}4}{0{,}3} = \dfrac{0{,}24}{0{,}3} = \boxed{0{,}8}$

4. Si A et B sont indépendants, alors $P_B(A) = P(A)$ et la formule devient

$$P_A(B) = \frac{P(B) \times P(A)}{P(A)} = P(B)$$

$\boxed{\text{On retrouve la caractérisation de l'indépendance : } P_A(B) = P(B).}$

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. (a) $P(A) = \dfrac{18}{30} = \boxed{\dfrac{3}{5}}$ $\qquad P(L) = \dfrac{12}{30} = \boxed{\dfrac{2}{5}}$ $\qquad P(A \cap L) = \boxed{\dfrac{7}{30}}$

(b) $P_A(L) = \dfrac{\frac{7}{30}}{\frac{18}{30}} = \boxed{\dfrac{7}{18}}$ $\qquad$ et $\qquad P_L(A) = \dfrac{\frac{7}{30}}{\frac{12}{30}} = \boxed{\dfrac{7}{12}}$

(c) $P(A \cup L) = P(A) + P(L) - P(A \cap L) = \dfrac{18}{30} + \dfrac{12}{30} - \dfrac{7}{30} = \boxed{\dfrac{23}{30}}$

La probabilité de n'étudier aucune des deux matières est alors $1 - \dfrac{23}{30} = \boxed{\dfrac{7}{30}}$.

2. On note V « posséder un vélo » et C « posséder une voiture », avec $P(V) = 0{,}6$, $P(C) = 0{,}35$ et $P(V \cap C) = 0{,}2$.

(a) $P_V(C) = \dfrac{0{,}2}{0{,}6} = \boxed{\dfrac{1}{3} \approx 0{,}333}$

(b) $P_C(V) = \dfrac{0{,}2}{0{,}35} = \boxed{\dfrac{4}{7} \approx 0{,}571}$

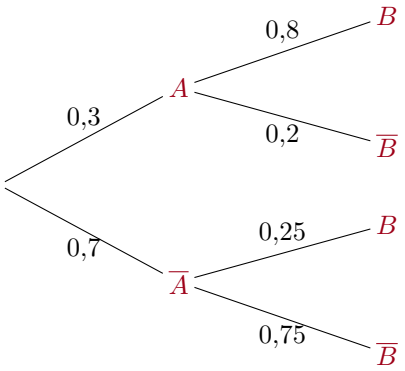
(c) Non, ces deux résultats sont différents. Ils portent sur le même effectif d'intersection (20 % de la population), mais rapporté à deux ensembles de tailles différentes : les possesseurs de vélo sont plus nombreux que les possesseurs de voiture, donc la proportion y est plus faible.

Arbres pondérés et probabilités totales

EXERCICE 9 ⋆

1. Les trois probabilités manquantes s'obtiennent par la **loi des nœuds** : la somme des probabilités portées par les branches issues d'un même nœud vaut 1.

$$P(\overline{A}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7 \qquad P_A(\overline{B}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2 \qquad P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$



2. $P_A(B) = 0{,}8$ signifie : $\boxed{\text{sachant que } A \text{ est réalisé, la probabilité que } B \text{ le soit aussi vaut } 0{,}8.}$

3. Le produit des probabilités portées par un chemin donne la probabilité de l'intersection :

$$P(A \cap B) = 0{,}3 \times 0{,}8 = \boxed{0{,}24} \qquad P(A \cap \overline{B}) = 0{,}3 \times 0{,}2 = \boxed{0{,}06}$$

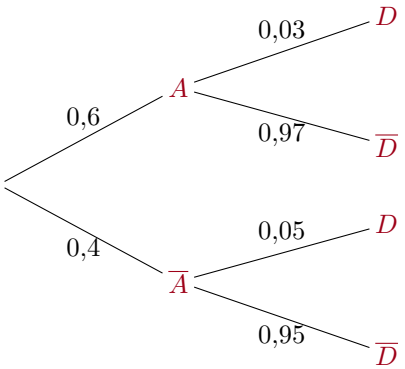
$$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}7 \times 0{,}25 = \boxed{0{,}175} \qquad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}7 \times 0{,}75 = \boxed{0{,}525}$$

4. $0{,}24 + 0{,}06 + 0{,}175 + 0{,}525 = 1$.
C'était prévisible : les quatre chemins correspondent à quatre événements incompatibles deux à deux, dont la réunion est l'univers tout entier — l'une des quatre situations se produit nécessairement.

5. $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0{,}24 + 0{,}175 = \boxed{0{,}415}$

EXERCICE 10 ⋆

1. $\boxed{P(A) = 0{,}6 \qquad P_A(D) = 0{,}03 \qquad P_{\overline{A}}(D) = 0{,}05}$
Attention : les taux de 3 % et 5 % portent sur les pièces *d'une machine donnée* : ce sont bien des probabilités conditionnelles, et non $P(A \cap D)$.



2.

3. $P(A \cap D) = 0{,}6 \times 0{,}03 = \boxed{0{,}018}$

4. $P(\overline{A} \cap D) = 0{,}4 \times 0{,}05 = \boxed{0{,}02}$

5. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(A \cap D) + P(\overline{A} \cap D) = 0{,}018 + 0{,}02 = \boxed{0{,}038}$$

$\boxed{\text{Environ } 3{,}8\,\% \text{ des pièces produites sont défectueuses.}}$

On remarque que ce taux global est compris entre $3\,\%$ et $5\,\%$: c'est une moyenne des deux taux, pondérée par les parts de production.

EXERCICE 11 ⋆

1. On multiplie le long de chaque chemin :

$$P(A \cap B) = 0{,}45 \times 0{,}6 = \boxed{0{,}27} \qquad P(A \cap \overline{B}) = 0{,}45 \times 0{,}4 = \boxed{0{,}18}$$

$$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}55 \times 0{,}2 = \boxed{0{,}11} \qquad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}55 \times 0{,}8 = \boxed{0{,}44}$$

2. $P(B) = 0{,}27 + 0{,}11 = \boxed{0{,}38}$
   Première méthode : $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}38 = 0{,}62$.
   Seconde méthode : $P(\overline{B}) = 0{,}18 + 0{,}44 = 0{,}62$. Les deux méthodes concordent.
3. $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}27}{0{,}38} = \boxed{\dfrac{27}{38} \approx 0{,}711}$
4. $P_A(B) = 0{,}6$ tandis que $P(B) = 0{,}38$:

   $\boxed{P_A(B) \neq P(B) \text{ : les événements } A \text{ et } B \text{ ne sont pas indépendants.}}$

   Savoir que A est réalisé augmente nettement la probabilité de B.

EXERCICE 12 ⋆⋆

On utilise $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$.

1. $P(B) = 0{,}3 \times 0{,}5 + 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}15 + 0{,}14 = \boxed{0{,}29}$
2. $P(B) = 0{,}8 \times 0{,}15 + 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}12 + 0{,}12 = \boxed{0{,}24}$
3. Ici le second terme est fourni directement :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0{,}25 \times 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}1 + 0{,}3 = \boxed{0{,}4}$$

4. On calcule d'abord $P(A \cap B) = 0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}42$, puis

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}42 = 0{,}08$$

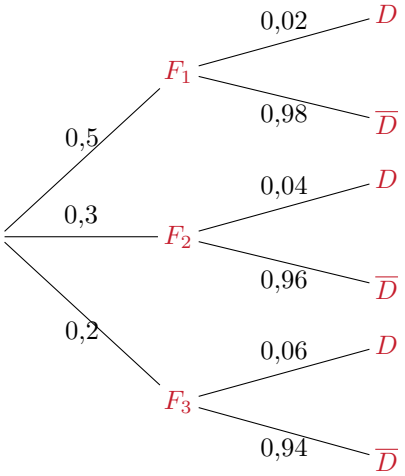
   et enfin, comme $P(\overline{A}) = 0{,}4$:

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{0{,}08}{0{,}4} = \boxed{0{,}2}$$

EXERCICE 13 ⋆⋆

1. Tout composant provient d'exactement un des trois fournisseurs : les événements F_1, F_2 et F_3 sont deux à deux incompatibles et leur réunion est l'univers. De plus $0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}2 = 1$.

   Ils forment bien une partition de Ω.

2. 

3. $P(F_1 \cap D) = 0{,}5 \times 0{,}02 = \boxed{0{,}01}$ $\quad P(F_2 \cap D) = 0{,}3 \times 0{,}04 = \boxed{0{,}012}$

   $P(F_3 \cap D) = 0{,}2 \times 0{,}06 = \boxed{0{,}012}$

4. $P(D) = 0{,}01 + 0{,}012 + 0{,}012 = \boxed{0{,}034}$

5. On applique la formule des probabilités conditionnelles avec $P(D) = 0{,}034$:

$$P_D(F_1) = \frac{0{,}01}{0{,}034} = \boxed{\frac{5}{17} \approx 0{,}294}$$

$$P_D(F_2) = \frac{0{,}012}{0{,}034} = \boxed{\frac{6}{17} \approx 0{,}353} \qquad P_D(F_3) = \frac{0{,}012}{0{,}034} = \boxed{\frac{6}{17} \approx 0{,}353}$$

6. $\dfrac{5}{17} + \dfrac{6}{17} + \dfrac{6}{17} = \dfrac{17}{17} = 1$.
   C'est logique : sachant que le composant est défectueux, il provient nécessairement de l'un des trois fournisseurs. Les trois probabilités conditionnelles forment donc, elles aussi, une loi de probabilité.

   le fournisseur F_1 livre la moitié des composants,
   mais n'est responsable que de 29,4 % des défauts.

EXERCICE 14 ⋆⋆

1. L'exercice 10 a donné $\boxed{P(D) = 0{,}038}$.

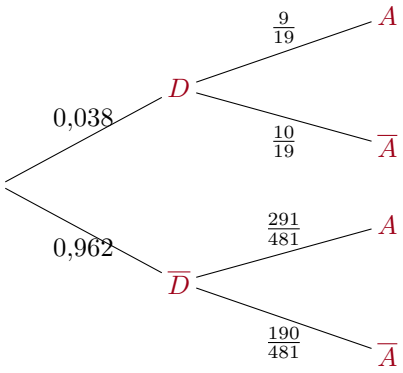
2. $P_D(A) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}018}{0{,}038} = \boxed{\dfrac{9}{19} \approx 0{,}474}$

3. $P_D(\overline{A}) = \dfrac{0{,}02}{0{,}038} = \dfrac{10}{19} \approx 0{,}526$, et l'on vérifie que $\dfrac{9}{19} + \dfrac{10}{19} = 1$: une pièce défectueuse provient nécessairement de A ou de B.

4. $P(\overline{D}) = 1 - 0{,}038 = 0{,}962$ et $P(A \cap \overline{D}) = 0{,}6 \times 0{,}97 = 0{,}582$, donc

$$P_{\overline{D}}(A) = \frac{0{,}582}{0{,}962} = \boxed{\frac{291}{481} \approx 0{,}605}$$

5. L'arbre inversé porte D et $\overline{D}$ au premier niveau :

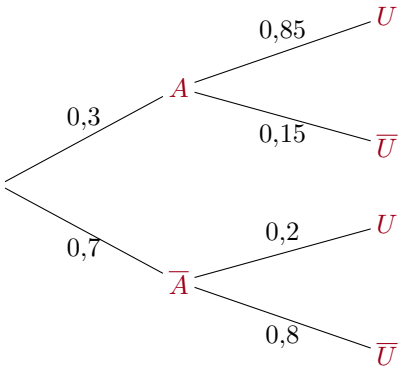


6. $P_D(A) \approx 0{,}474$ alors que $P(A) = 0{,}6$:

Oui : savoir que la pièce est défectueuse rend la machine A moins probable.

C'est cohérent, puisque A est la machine la plus fiable des deux. On passe de « six chances sur dix » à « un peu moins d'une sur deux ».

EXERCICE 15 ⋆⋆



1.

2. $P(A \cap U) = 0{,}3 \times 0{,}85 = \boxed{0{,}255}$

3. $P(U) = 0{,}255 + 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}255 + 0{,}14 = \boxed{0{,}395}$

4. $P_U(A) = \dfrac{0{,}255}{0{,}395} = \boxed{\dfrac{51}{79} \approx 0{,}646}$

5. $P(\overline{U}) = 1 - 0{,}395 = 0{,}605$ et $P(A \cap \overline{U}) = 0{,}3 \times 0{,}15 = 0{,}045$, donc

$$P_{\overline{U}}(A) = \frac{0{,}045}{0{,}605} = \boxed{\frac{9}{121} \approx 0{,}074}$$

Interprétation : parmi ceux qui n'utilisent pas le bus, moins de 8 % sont pourtant abonnés — un abonnement qu'ils n'utilisent guère.

Indépendance

EXERCICE 16 ⋆

1. $P(A) = \dfrac{80}{200} = \boxed{0{,}4}$ $\qquad$ $P(B) = \dfrac{50}{200} = \boxed{0{,}25}$ $\qquad$ $P(A \cap B) = \dfrac{20}{200} = \boxed{0{,}1}$
2. $P(A) \times P(B) = 0{,}4 \times 0{,}25 = 0{,}1 = P(A \cap B)$:

   $\boxed{\text{les événements } A \text{ et } B \text{ sont indépendants.}}$

3. $P_A(B) = \dfrac{20}{80} = 0{,}25 = P(B)$: on retrouve bien la même conclusion.
   Autrement dit : la proportion de B est la même dans la ligne A (20 sur 80) que dans la population entière (50 sur 200).
4. En conservant les totaux, le nouveau tableau est :

	B	$\overline{B}$	*Total*
A	25	55	80
$\overline{A}$	25	95	120
Total	50	150	200

   Cette fois $P(A \cap B) = \dfrac{25}{200} = 0{,}125$, alors que $P(A) \times P(B) = 0{,}1$:

   $\boxed{\text{les événements ne sont plus indépendants.}}$

   Il a suffi de déplacer cinq personnes pour rompre l'indépendance : celle-ci est une égalité exacte, et non une tendance.

EXERCICE 17 ⋆

1. $P(A) \times P(B) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2 = P(A \cap B)$: $\boxed{\text{indépendants}}$
2. $P(A) \times P(B) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18 \neq 0{,}2$: $\boxed{\text{non indépendants}}$
3. $P_A(B) = 0{,}3 = P(B)$: $\boxed{\text{indépendants}}$
4. On calcule d'abord l'intersection :

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}25 + 0{,}8 - 0{,}85 = 0{,}2$$

   et $P(A) \times P(B) = 0{,}25 \times 0{,}8 = 0{,}2$: $\boxed{\text{indépendants}}$
5. $P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{6} = P(A \cap B)$: $\boxed{\text{indépendants}}$

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. L'indépendance s'écrit $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$, soit

$$0{,}4 \times P(B) = 0{,}1 \iff \boxed{P(B) = 0{,}25}$$

2. De même $P(A) \times 0{,}6 = 0{,}18$, d'où $\boxed{P(A) = 0{,}3}$.

3. L'urne contient $4+n$ boules, dont 4 rouges. La probabilité de tirer une rouge vaut $\dfrac{4}{4+n}$. Les deux tirages étant indépendants, la probabilité d'obtenir deux rouges est le produit des deux probabilités :

$$\left(\frac{4}{4+n}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

Les deux membres étant positifs, on peut passer à la racine :

$$\frac{4}{4+n} = \frac{1}{3} \iff 12 = 4+n \iff \boxed{n = 8}$$

Vérification : l'urne contient alors 12 boules dont 4 rouges, soit une probabilité de $\frac{1}{3}$, et $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

EXERCICE 19 ⋆⋆

1. Les événements $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ sont incompatibles, et leur réunion est A tout entier. Donc $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$, d'où

$$\boxed{P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)}$$

2. Comme A et B sont indépendants, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, donc

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A) \times P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A) \times P(\overline{B})$$

$$\boxed{\text{Les événements } A \text{ et } \overline{B} \text{ sont donc indépendants eux aussi.}}$$

En appliquant deux fois ce résultat, on obtient également l'indépendance de $\overline{A}$ et B, puis celle de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

3. Avec $P(A) = 0{,}3$ et $P(B) = 0{,}6$:

$$P(A \cap B) = 0{,}3 \times 0{,}6 = \boxed{0{,}18} \qquad P(A \cap \overline{B}) = 0{,}3 \times 0{,}4 = \boxed{0{,}12}$$

$$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}7 \times 0{,}6 = \boxed{0{,}42} \qquad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}7 \times 0{,}4 = \boxed{0{,}28}$$

et la somme vaut $0{,}18 + 0{,}12 + 0{,}42 + 0{,}28 = 1$.

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}6 - 0{,}18 = \boxed{0{,}72}$

EXERCICE 20 ⋆

1. Le dé étant équilibré, chacune des six faces a la même probabilité $\frac{1}{6}$:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

   La somme vaut $6 \times \frac{1}{6} = 1$.

2. Le gain vaut 3 pour une seule face, 1 pour deux faces (2 et 4), et -1 pour les trois autres (1, 3 et 5) :

x_i	-1	1	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

   La somme vaut $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = 1$.

3. Les quatre issues PP, PF, FP, FF sont équiprobables, de probabilité $\frac{1}{4}$, et X vaut respectivement 0, 1, 1 et 2 :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

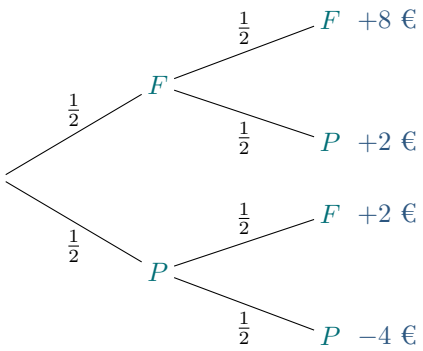
4. L'urne contient 6 boules : 3 rouges, 2 vertes et 1 bleue.

x_i	2	5	10
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

   On remarque que cette loi et celle de la question 2 portent les mêmes probabilités : seules les valeurs changent.

EXERCICE 21 ⋆⋆

1. Chaque lancer donne F ou P avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$, et l'on inscrit au bout de chaque chemin le gain correspondant :



2. Deux « Face » rapportent 8 €, une seule rapporte $4-2=2$ €, et deux « Pile » font perdre 4 € :

$$\boxed{X \text{ prend les valeurs } -4,\ 2 \text{ et } 8.}$$

3. Un seul chemin mène à 8, un seul à -4, mais deux mènent à 2 :

x_i	-4	2	8
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

4. $P(X \geqslant 2) = P(X=2) + P(X=8) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \boxed{\dfrac{3}{4}}$

   $P(X<0) = P(X=-4) = \boxed{\dfrac{1}{4}}$

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. La somme des probabilités d'une loi vaut 1 :

$$0{,}15 + a + 0{,}3 + 0{,}25 = 1 \iff a + 0{,}7 = 1 \iff \boxed{a = 0{,}3}$$

2. $P(X \leqslant 0) = P(X=-2) + P(X=0) = 0{,}15 + 0{,}3 = \boxed{0{,}45}$

   $P(X>0) = P(X=1) + P(X=4) = 0{,}3 + 0{,}25 = \boxed{0{,}55}$, ce qui vérifie bien $0{,}45 + 0{,}55 = 1$.

3. On écrit l'espérance de Y en fonction de x :

$$E[Y] = (-1) \times 0{,}5 + 2 \times 0{,}3 + x \times 0{,}2 = -0{,}5 + 0{,}6 + 0{,}2x = 0{,}1 + 0{,}2x$$

   La condition $E[Y]=1$ donne :

$$0{,}1 + 0{,}2x = 1 \iff 0{,}2x = 0{,}9 \iff \boxed{x = 4{,}5}$$

EXERCICE 23 ⋆⋆

1. L'urne contient 5 jetons : deux portent le 1, un le 2, deux le 3.

Numéro	1	2	3
Probabilité	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

2. Le jeton étant remis, le second tirage suit exactement la même loi que le premier : les neuf chemins portent, au second niveau, les mêmes probabilités $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$ et $\frac{2}{5}$ qu'au premier.

3. La somme de deux numéros compris entre 1 et 3 vaut au minimum 2 et au maximum 6 :

$$\boxed{X \text{ prend les valeurs } 2,\ 3,\ 4,\ 5 \text{ et } 6.}$$

4. On additionne les probabilités des chemins conduisant à chaque valeur :

$$P(X=2) = \tfrac{2}{5}\times\tfrac{2}{5} = \tfrac{4}{25} \qquad P(X=3) = 2\times\tfrac{2}{5}\times\tfrac{1}{5} = \tfrac{4}{25}$$
$$P(X=4) = 2\times\tfrac{2}{5}\times\tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{5}\times\tfrac{1}{5} = \tfrac{8}{25} + \tfrac{1}{25} = \tfrac{9}{25}$$
$$P(X=5) = 2\times\tfrac{1}{5}\times\tfrac{2}{5} = \tfrac{4}{25} \qquad P(X=6) = \tfrac{2}{5}\times\tfrac{2}{5} = \tfrac{4}{25}$$

x_i	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$

La somme vaut $\dfrac{4+4+9+4+4}{25} = \dfrac{25}{25} = 1$.

5. **Première méthode :** en additionnant les chemins, comme ci-dessus, on trouve $\dfrac{9}{25}$.
Seconde méthode : par événement contraire, $P(X=4) = 1-(P(X=2)+P(X=3)+P(X=5)+P(X=6)) = 1-\dfrac{16}{25} = \dfrac{9}{25}$.

$$\boxed{P(X=4) = \frac{9}{25}}$$

Espérance, variance et écart-type

EXERCICE 24 ⋆

On applique $E[X] = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$: on multiplie entre elles les deux valeurs de chaque colonne, puis on additionne le tout.

1. $E[X] = 1\times 0{,}2 + 2\times 0{,}5 + 3\times 0{,}3 = 0{,}2 + 1 + 0{,}9 = \boxed{2{,}1}$
2. $E[X] = -5\times 0{,}4 + 0\times 0{,}35 + 10\times 0{,}25 = -2 + 0 + 2{,}5 = \boxed{0{,}5}$
3. $E[X] = 0\times\dfrac{1}{8} + 1\times\dfrac{3}{8} + 2\times\dfrac{3}{8} + 3\times\dfrac{1}{8} = \dfrac{0+3+6+3}{8} = \dfrac{12}{8} = \boxed{1{,}5}$
4. $E[X] = -3\times 0{,}1 - 1\times 0{,}4 + 2\times 0{,}3 + 6\times 0{,}2 = -0{,}3 - 0{,}4 + 0{,}6 + 1{,}2 = \boxed{1{,}1}$

Interprétation de la deuxième loi. Si X représentait le gain d'un jeu, l'espérance 0,5 signifierait qu'en répétant l'expérience un très grand nombre de fois, le joueur peut espérer gagner en moyenne 0,5 € par partie. Le jeu serait donc favorable au joueur — et non à l'organisateur.

EXERCICE 25 ⋆⋆

On ajoute une ligne x_i^2 au tableau, puis on applique $V(X) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2$.

1. $E\left[X^2\right] = 1 \times 0{,}2 + 4 \times 0{,}5 + 9 \times 0{,}3 = 0{,}2 + 2 + 2{,}7 = 4{,}9$

$$V(X) = 4{,}9 - 2{,}1^2 = 4{,}9 - 4{,}41 = \boxed{0{,}49} \qquad \text{d'où} \qquad \sigma(X) = \sqrt{0{,}49} = \boxed{0{,}7}$$

2. $E\left[X^2\right] = 25 \times 0{,}4 + 0 + 100 \times 0{,}25 = 10 + 25 = 35$

$$V(X) = 35 - 0{,}5^2 = \boxed{34{,}75} \qquad \text{d'où} \qquad \sigma(X) = \sqrt{34{,}75} \approx \boxed{5{,}89}$$

3. $E\left[X^2\right] = 0 + 1 \times \dfrac{3}{8} + 4 \times \dfrac{3}{8} + 9 \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{0 + 3 + 12 + 9}{8} = 3$

$$V(X) = 3 - 1{,}5^2 = 3 - 2{,}25 = \boxed{0{,}75} \qquad \text{d'où} \qquad \sigma(X) = \sqrt{0{,}75} \approx \boxed{0{,}87}$$

4. $E\left[X^2\right] = 9 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}4 + 4 \times 0{,}3 + 36 \times 0{,}2 = 0{,}9 + 0{,}4 + 1{,}2 + 7{,}2 = 9{,}7$

$$V(X) = 9{,}7 - 1{,}1^2 = 9{,}7 - 1{,}21 = \boxed{8{,}49} \qquad \text{d'où} \qquad \sigma(X) = \sqrt{8{,}49} \approx \boxed{2{,}91}$$

$$\boxed{\text{La deuxième loi est de loin la plus dispersée : } \sigma \approx 5{,}89.}$$

C'est cohérent avec ses valeurs, qui s'étalent de -5 à 10, alors que la première ne prend que les valeurs 1, 2 et 3.

EXERCICE 26 ⋆⋆

1. $E[X] = -2 \times 0{,}3 + 1 \times 0{,}5 + 3 \times 0{,}2 = -0{,}6 + 0{,}5 + 0{,}6 = \boxed{0{,}5}$
2. **Par la définition.** On calcule d'abord les écarts $x_i - E[X]$, puis leurs carrés :

$$-2 - 0{,}5 = -2{,}5 \qquad 1 - 0{,}5 = 0{,}5 \qquad 3 - 0{,}5 = 2{,}5$$

$$V(X) = 0{,}3 \times (-2{,}5)^2 + 0{,}5 \times 0{,}5^2 + 0{,}2 \times 2{,}5^2$$
$$= 0{,}3 \times 6{,}25 + 0{,}5 \times 0{,}25 + 0{,}2 \times 6{,}25 = 1{,}875 + 0{,}125 + 1{,}25 = \boxed{3{,}25}$$

3. **Par König-Huygens.**

$$E\left[X^2\right] = 4 \times 0{,}3 + 1 \times 0{,}5 + 9 \times 0{,}2 = 1{,}2 + 0{,}5 + 1{,}8 = 3{,}5$$

$$V(X) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = 3{,}5 - 0{,}5^2 = 3{,}5 - 0{,}25 = \boxed{3{,}25}$$

Les deux méthodes donnent bien le même résultat.

4. La seconde méthode ne demande qu'une ligne supplémentaire au tableau, celle des x_i^2, alors que la première impose de soustraire l'espérance à chaque valeur puis d'élever au carré — soit trois soustractions et trois carrés de nombres décimaux.

$$\boxed{\text{König-Huygens est plus rapide et moins propice aux erreurs de signe.}}$$

5. $\sigma(X) = \sqrt{3{,}25} \approx \boxed{1{,}80}$

EXERCICE 27 ⋆⋆

1. On applique $E[aX+b] = a\,E[X] + b$ avec $E[X] = 4$:

   a) $E[3X] = 3 \times 4 = \boxed{12}$
   b) $E[X+5] = 4+5 = \boxed{9}$
   c) $E[2X-1] = 8-1 = \boxed{7}$
   d) $E[-X] = -4 = \boxed{-4}$
   e) $E[0{,}5X+3] = 2+3 = \boxed{5}$
   f) $E[10-2X] = 10-8 = \boxed{2}$

2. C'est la **linéarité de l'espérance**, démontrée dans le cours. Elle évite de reconstruire entièrement le tableau de la loi de $aX+b$: les valeurs changent, mais les probabilités restent les mêmes, ce qui permet de factoriser.

3. Doubler les gains puis prélever 2 € conduit à $\boxed{Y = 2X-2}$, d'où

$$E[Y] = 2 \times E[X] - 2 = 2 \times 1{,}5 - 2 = \boxed{1}$$

   Le joueur peut espérer gagner en moyenne 1 € par partie.

4. Avec un droit d'entrée d, le gain est $Y = 2X - d$ et

$$E[Y] = 2 \times 1{,}5 - d = 3 - d$$

   Le jeu est équitable lorsque $E[Y] = 0$, soit $\boxed{d = 3 \text{ €}}$.

5. C'est faux : la formule de König-Huygens montre précisément que ces deux nombres diffèrent, et que leur écart est la variance :

$$V(X) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 \iff E\left[X^2\right] = V(X) + (E[X])^2$$

$$\boxed{E\left[X^2\right] = 9 + 16 = 25}$$

   L'égalité $E\left[X^2\right] = (E[X])^2$ ne vaudrait que si $V(X) = 0$, c'est-à-dire si X ne prenait qu'une seule valeur.

EXERCICE 28 ⋆⋆

1. Une seule face donne 10, une seule donne 4, et les quatre autres font perdre 2 :

x_i	-2	4	10
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. $E[X] = -2 \times \dfrac{4}{6} + 4 \times \dfrac{1}{6} + 10 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{-8+4+10}{6} = \dfrac{6}{6} = \boxed{1}$

   Avant paiement de la mise, le joueur gagne en moyenne 1 € par partie.

3. $E\left[X^2\right] = 4 \times \dfrac{4}{6} + 16 \times \dfrac{1}{6} + 100 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{16+16+100}{6} = \dfrac{132}{6} = 22$

$$V(X) = 22 - 1^2 = \boxed{21} \qquad \text{d'où} \qquad \sigma(X) = \sqrt{21} \approx \boxed{4{,}58}$$

   L'écart-type est bien plus grand que l'espérance : les gains sont très dispersés, le jeu est risqué à court terme.

4. Par linéarité, $E[Y] = E[X-m] = E[X] - m$, soit

$$\boxed{E[Y] = 1 - m}$$

5. Le jeu est équitable lorsque $E[Y] = 0$, c'est-à-dire $\boxed{m = 1 \text{ €}}$.
6. Avec $m = 2$, on obtient $E[Y] = 1 - 2 = -1$: le joueur perd en moyenne 1 € par partie.

L'organisateur peut espérer gagner 1 € par partie.

Exercices de synthèse

EXERCICE 29 ⋆⋆

1. **Réponse B.** $P_A(B) = \dfrac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4$. La réponse A multiplie au lieu de diviser, la réponse C inverse le quotient.
2. **Réponse A.** $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$.
3. **Réponse B.** C'est la loi des nœuds : depuis un nœud, l'une des branches est nécessairement empruntée.
4. **Réponse B.** L'indépendance donne $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}3 \times 0{,}5 = 0{,}15$. La réponse C confondrait avec la réunion.
5. **Réponse B.** B se décompose selon que A est réalisé ou non, et ces deux morceaux sont incompatibles. La réponse C additionne des probabilités conditionnelles, ce qui n'a pas de sens ici.
6. **Réponse A.** Les branches B et $\overline{B}$ partent du même nœud, donc $P_A(\overline{B}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.
7. **Réponse A.** $P(A) \times P(B) = 0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}12 = P(A \cap B)$. Ils ne sont pas incompatibles, puisque $P(A \cap B) \neq 0$.
8. **Réponse B.** Si A et B sont incompatibles, $P(A \cap B) = 0$, alors que $P(A) \times P(B) > 0$: l'égalité ne peut jamais être vérifiée.
9. **Réponse B.** $E[X] = 0 \times 0{,}4 + 2 \times 0{,}6 = 1{,}2$.
10. **Réponse B.** $E[2X + 1] = 2 \times 3 + 1 = 7$, par linéarité de l'espérance.

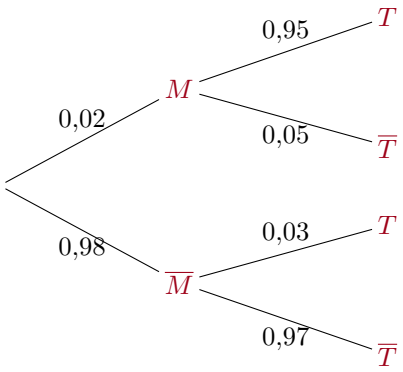
EXERCICE 30 ⋆⋆

1. **Fausse**. *Contre-exemple :* à l'exercice 1, $P_C(F) = 0{,}4$ alors que $P_F(C) = \frac{4}{15} \approx 0{,}267$. Les deux quotients n'ont pas le même dénominateur.
2. **Vraie**. C'est la seconde règle des arbres pondérés.
3. **Fausse**. L'indépendance donne $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ — un **produit**, non une somme. *Contre-exemple :* avec $P(A) = P(B) = 0{,}5$ indépendants, $P(A \cap B) = 0{,}25$ et non 1.
4. **Vraie**. Deux événements incompatibles ne peuvent pas se réaliser en même temps : leur intersection est vide.
5. **Vraie**. Les événements B et $\overline{B}$ partagent l'univers en deux, et cela reste vrai « sachant A ». C'est la loi des nœuds.
6. **Fausse**. Ces deux nombres portent sur des univers de référence différents et n'ont aucune raison de s'additionner à 1. *Contre-exemple :* à l'exercice 9, $P_A(B) = 0{,}8$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}25$, dont la somme vaut 1,05.
7. **Vraie**. C'est la caractérisation de l'indépendance donnée par le cours : savoir que A est réalisé ne change rien à la probabilité de B.

8. **Vraie**. C'est le résultat démontré à l'exercice 19, appliqué deux fois.
9. **Vraie**. C'est la définition même d'une loi de probabilité : l'une des valeurs est nécessairement prise.
10. **Fausse**. Ces deux nombres diffèrent de la variance, d'après König-Huygens. *Contre-exemple :* à l'exercice 27, $E\left[X^2\right] = 25$ alors que $(E[X])^2 = 16$.
11. **Fausse**. Une espérance nulle signifie que les gains et les pertes se compensent *en moyenne* sur un grand nombre de parties. *Contre-exemple :* un jeu où l'on gagne 10 € avec probabilité $\frac{1}{2}$ et où l'on en perd 10 avec probabilité $\frac{1}{2}$ a une espérance nulle, et le joueur peut pourtant gagner.

EXERCICE 31 ⋆⋆

1. Les données se traduisent par $P(M) = 0{,}02$, $P_M(T) = 0{,}95$ et $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0{,}97$, d'où $P_{\overline{M}}(T) = 1 - 0{,}97 = 0{,}03$.



2. $P(M \cap T) = 0{,}02 \times 0{,}95 = \boxed{0{,}019}$ et $P(\overline{M} \cap T) = 0{,}98 \times 0{,}03 = \boxed{0{,}0294}$
3. $P(T) = 0{,}019 + 0{,}0294 = \boxed{0{,}0484}$
4. $P_T(M) = \dfrac{0{,}019}{0{,}0484} = \boxed{\dfrac{95}{242} \approx 0{,}393}$
5. Le test est pourtant fiable à 95 % pour les malades. Mais la question 2 montre que les **faux positifs sont plus nombreux que les vrais positifs** : 0,0294 contre 0,019.

   > La maladie est rare (2 %), donc les 3 % d'erreurs commises sur les 98 % de bien portants représentent davantage de cas que les vrais malades détectés.

   Un test positif doit donc toujours être confirmé par un second examen.
6. $P(\overline{T}) = 1 - 0{,}0484 = 0{,}9516$ et $P(\overline{M} \cap \overline{T}) = 0{,}98 \times 0{,}97 = 0{,}9506$, donc

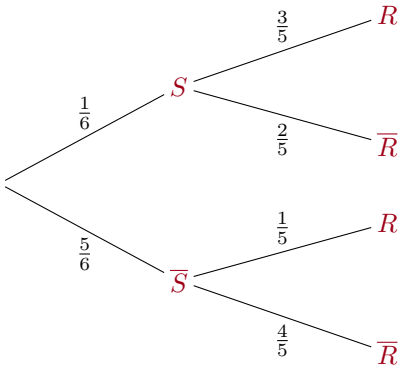
$$P_{\overline{T}}(\overline{M}) = \frac{0{,}9506}{0{,}9516} \approx \boxed{0{,}999}$$

   Un test négatif est en revanche très fiable : c'est la situation inverse de la précédente.

EXERCICE 32 ⋆⋆

1. Le dé est équilibré, donc $P(S) = \dfrac{1}{6}$. Si le dé donne 6, on tire dans U_1 qui contient 3 rouges sur 5 boules ; sinon dans U_2 qui en contient 1 sur 5 :

$$\boxed{P(S) = \frac{1}{6} \qquad P_S(R) = \frac{3}{5} \qquad P_{\overline{S}}(R) = \frac{1}{5}}$$



2.

3. $P(S \cap R) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} = \boxed{\frac{1}{10}}$ et $P(\overline{S} \cap R) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} = \boxed{\frac{1}{6}}$

4. $P(R) = \frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{3}{30} + \frac{5}{30} = \frac{8}{30} = \boxed{\frac{4}{15}}$

5. $P_R(S) = \frac{P(S \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{15}} = \frac{1}{10} \times \frac{15}{4} = \boxed{\frac{3}{8}}$

6. $P(S) \times P(R) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{15} = \frac{4}{90} = \frac{2}{45}$, alors que $P(S \cap R) = \frac{1}{10} = \frac{4{,}5}{45}$:

   $\boxed{\text{les événements ne sont pas indépendants.}}$

   C'est logique : la couleur dépend de l'urne, donc du résultat du dé.

7. Le gain vaut 5 si la boule est rouge, -1 sinon :

x_i	-1	5
$P(X = x_i)$	$\frac{11}{15}$	$\frac{4}{15}$

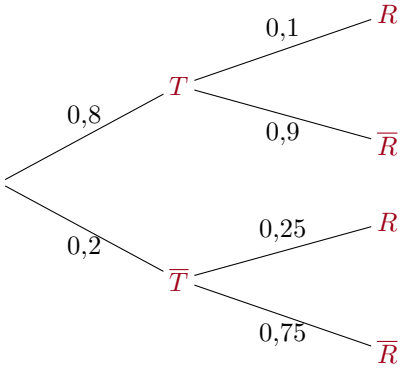
$$E[X] = -1 \times \frac{11}{15} + 5 \times \frac{4}{15} = \frac{-11+20}{15} = \frac{9}{15} = \boxed{\frac{3}{5} = 0{,}6}$$

8. $E\left[X^2\right] = 1 \times \frac{11}{15} + 25 \times \frac{4}{15} = \frac{111}{15} = \frac{37}{5} = 7{,}4$, donc

$$V(X) = 7{,}4 - 0{,}6^2 = 7{,}4 - 0{,}36 = \boxed{7{,}04} \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{7{,}04} \approx \boxed{2{,}65}$$

EXERCICE 33 ⋆⋆

1. Prendre le train 4 jours sur 5 donne $P(T) = 0{,}8$:



2. $P(T \cap R) = 0{,}8 \times 0{,}1 = \boxed{0{,}08}$

3. $P(R) = 0{,}08 + 0{,}2 \times 0{,}25 = 0{,}08 + 0{,}05 = \boxed{0{,}13}$

4. $P_R(\overline{T}) = \dfrac{0{,}05}{0{,}13} = \boxed{\dfrac{5}{13} \approx 0{,}385}$

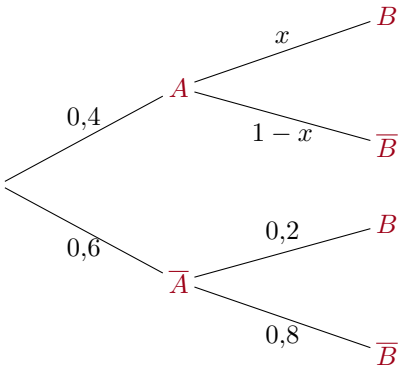
   bien qu'il ne prenne la voiture qu'un jour sur cinq, elle est responsable de près de 38 % des retards.

5. $P(\overline{R}) = 1 - 0{,}13 = 0{,}87$ et $P(T \cap \overline{R}) = 0{,}8 \times 0{,}9 = 0{,}72$, donc

$$P_{\overline{R}}(T) = \frac{0{,}72}{0{,}87} = \boxed{\frac{24}{29} \approx 0{,}828}$$

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

1.



2. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) = 0{,}4\,x + 0{,}6 \times 0{,}2$$

$$\boxed{P(B) = 0{,}4\,x + 0{,}12}$$

3. $0{,}4x + 0{,}12 = 0{,}3 \iff 0{,}4x = 0{,}18 \iff \boxed{x = 0{,}45}$

4. Les événements sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$, soit

$$x = 0{,}4x + 0{,}12 \iff 0{,}6x = 0{,}12 \iff \boxed{x = 0{,}2}$$

   Interprétation : on retrouve $x = P_{\overline{A}}(B) = 0{,}2$. L'indépendance signifie exactement que la probabilité de B est la même selon que A est réalisé ou non — les deux branches de l'arbre portent alors la même valeur.

5. $0{,}4x + 0{,}12 \geqslant 0{,}4 \iff 0{,}4x \geqslant 0{,}28 \iff \boxed{x \geqslant 0{,}7}$

6. La fonction $x \mapsto 0{,}4x + 0{,}12$ est affine de coefficient directeur $0{,}4 > 0$, donc croissante. Ses valeurs extrêmes sur $[0\,;1]$ sont atteintes aux bornes :

$$P(B) = 0{,}12 \text{ pour } x = 0 \qquad \text{et} \qquad P(B) = 0{,}52 \text{ pour } x = 1$$

$$\boxed{P(B) \text{ varie dans l'intervalle } [0{,}12\,;0{,}52].}$$

   On remarque que $P(B)$ ne peut jamais dépasser 0,52 : même si B était certain sachant A, les 60 % de cas où A n'est pas réalisé limiteraient le total.

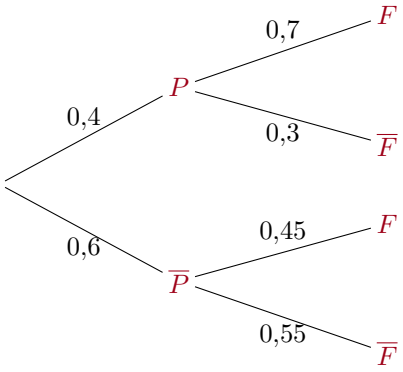
7. $P(A \cap B) = 0{,}4x$, donc pour $x \neq 0$:

$$\boxed{P_B(A) = \frac{0{,}4\,x}{0{,}4\,x + 0{,}12}}$$

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

Partie A

1.



2. $P(P \cap F) = 0{,}4 \times 0{,}7 = \boxed{0{,}28}$ et $P(\overline{P} \cap F) = 0{,}6 \times 0{,}45 = \boxed{0{,}27}$
3. $P(F) = 0{,}28 + 0{,}27 = \boxed{0{,}55}$
4. $P_F(P) = \dfrac{0{,}28}{0{,}55} = \boxed{\dfrac{28}{55} \approx 0{,}509}$
5. $P(\overline{F}) = 0{,}45$ et $P(P \cap \overline{F}) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$, donc

$$P_{\overline{F}}(P) = \frac{0{,}12}{0{,}45} = \boxed{\frac{4}{15} \approx 0{,}267}$$

6. $P(P) \times P(F) = 0{,}4 \times 0{,}55 = 0{,}22$, alors que $P(P \cap F) = 0{,}28$:

$$\boxed{\text{les événements ne sont pas indépendants.}}$$

Partie B

7. Les deux abonnés étant interrogés de façon indépendante :

$$P(F_1 \cap F_2) = 0{,}55 \times 0{,}55 = \boxed{0{,}3025}$$

8. $P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) = 0{,}45 \times 0{,}45 = \boxed{0{,}2025}$
9. L'événement « au moins l'un des deux » est le contraire de « aucun des deux » :

$$1 - 0{,}2025 = \boxed{0{,}7975}$$

Partie C

10. $\boxed{X \text{ prend les valeurs } 0,\ 1 \text{ et } 2.}$
11. Les cas $X = 0$ et $X = 2$ ont déjà été calculés. Pour $X = 1$, deux situations sont possibles — le premier seulement, ou le second seulement :

$$P(X = 1) = 2 \times 0{,}55 \times 0{,}45 = 0{,}495$$

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,2025	0,495	0,3025

La somme vaut $0{,}2025 + 0{,}495 + 0{,}3025 = 1$.

12. $E[X] = 0 \times 0{,}2025 + 1 \times 0{,}495 + 2 \times 0{,}3025 = 0{,}495 + 0{,}605 = \boxed{1{,}1}$

> sur un grand nombre de sondages de deux abonnés,
> on en trouve en moyenne 1,1 qui regardent un film.

On remarque que $1{,}1 = 2 \times 0{,}55$: l'espérance est le double de la probabilité individuelle, ce qui est très intuitif.

13. $E\left[X^2\right] = 0 + 1 \times 0{,}495 + 4 \times 0{,}3025 = 0{,}495 + 1{,}21 = 1{,}705$, donc

$$V(X) = 1{,}705 - 1{,}1^2 = 1{,}705 - 1{,}21 = \boxed{0{,}495} \qquad \text{et} \qquad \sigma(X) = \sqrt{0{,}495} \approx \boxed{0{,}70}$$