EXERCICES – CHAPITRE 5

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Tableaux à double entrée

EXERCICE 1 ⋆

Une entreprise compte 400 salariés, répartis selon le tableau suivant.

	Cadres	*Non-cadres*	*Total*
Femmes	48	132	180
Hommes	72	148	220
Total	120	280	400

On choisit un salarié au hasard et l'on considère les événements :

C : « le salarié est un cadre » $\qquad$ F : « le salarié est une femme »

1. Calculer $P(C)$, $P(F)$ et $P(C \cap F)$.
2. Calculer $P_C(F)$ et interpréter le résultat par une phrase.
3. Calculer $P_F(C)$. Pourquoi ce résultat est-il différent du précédent ?
4. Calculer $P_{\overline{C}}(F)$.
5. Les événements C et F sont-ils indépendants ? Justifier.

EXERCICE 2 ⋆

Un sondage a été mené auprès de 250 personnes sur leur usage du vélo.

	Usage régulier	*Usage rare*	*Total*
Habite en ville	84	66	150
Habite hors de la ville	26	74	100
Total	110	140	250

On interroge au hasard une des personnes sondées. On note V l'événement « la personne utilise régulièrement le vélo » et U l'événement « la personne habite en ville ».

1. Calculer $P(V)$, $P(U)$ et $P(U \cap V)$.
2. Calculer $P_U(V)$ et $P_{\overline{U}}(V)$. Comparer ces deux nombres et commenter.
3. Calculer $P_V(U)$.
4. Vérifier que $P(V) = P(U) \times P_U(V) + P(\overline{U}) \times P_{\overline{U}}(V)$.
5. Les événements U et V sont-ils indépendants ?

EXERCICE 3 ⋆

Une librairie a enregistré 500 achats. Le tableau ci-dessous, incomplet, croise le type d'ouvrage acheté et le moyen de paiement.

	Roman	*Autre*	*Total*
Paiement par carte		210	
Paiement en espèces	60		140
Total	210		500

1. Recopier et compléter le tableau.
2. On choisit un achat au hasard. On note R l'événement « l'ouvrage acheté est un roman » et C l'événement « le paiement a été fait par carte ». Calculer $P(R)$, $P(C)$ et $P(R \cap C)$.
3. Calculer $P_C(R)$ puis $P_R(C)$.
4. Un client vient de payer par carte. Est-il plus probable qu'il ait acheté un roman ou un autre ouvrage ?

EXERCICE 4 ⋆⋆

Une bibliothèque a enregistré 800 emprunts sur un mois.

	Roman	*Bande dessinée*	*Documentaire*	*Total*
Adulte	240	60	120	420
Jeune	100	210	70	380
Total	340	270	190	800

On choisit un emprunt au hasard. On note A l'événement « l'emprunteur est un adulte », J l'événement contraire, et R, D, B les événements « l'ouvrage emprunté est un roman », « un documentaire », « une bande dessinée ».

1. Calculer $P(A)$ et $P(R)$.
2. Calculer $P_A(R)$ et $P_J(R)$. Donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.
3. Vérifier que $P(R) = P(A) \times P_A(R) + P(J) \times P_J(R)$.
4. Calculer $P_R(A)$ et interpréter par une phrase.
5. Calculer $P_J(B)$ et $P_B(J)$.
6. Les événements A et D sont-ils indépendants ?

La formule des probabilités conditionnelles

EXERCICE 5 ⋆

On utilisera la formule $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$*, que l'on pourra aussi écrire sous la forme* $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Dans chaque cas, déterminer la probabilité demandée.

a) $P(A) = 0{,}4$ et $P(A \cap B) = 0{,}12$; calculer $P_A(B)$.

b) $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}35$; calculer $P_B(A)$.

c) $P(A) = 0{,}25$ et $P_A(B) = 0{,}8$; calculer $P(A \cap B)$.

d) $P(A \cap B) = 0{,}18$ et $P_A(B) = 0{,}6$; calculer $P(A)$.

e) $P(A) = \dfrac{1}{3}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{12}$; calculer $P_A(B)$.

f) $P(B) = \dfrac{3}{5}$ et $P_B(A) = \dfrac{2}{9}$; calculer $P(A \cap B)$.

EXERCICE 6 ⋆

On donne $P(A) = 0{,}7$ et $P_A(B) = 0{,}4$.

1. Déterminer $P_A(\overline{B})$. Quelle règle du cours permet de conclure immédiatement ?
2. Calculer $P(A \cap B)$ puis $P(A \cap \overline{B})$.
3. Vérifier que $P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A)$, et expliquer pourquoi c'était prévisible.
4. On donne de plus $P(B) = 0{,}55$. Calculer $P_B(A)$.
5. En déduire $P(\overline{A} \cap B)$.
6. Calculer enfin $P(\overline{A})$ puis $P_{\overline{A}}(B)$.

EXERCICE 7 ⋆⋆

L'objectif de cet exercice est la formule de Bayes, rencontrée dans l'introduction historique du cours.

1. Écrire de deux façons différentes la probabilité $P(A \cap B)$, à l'aide de la formule des probabilités conditionnelles.
2. En déduire que, si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$:
$$P_A(B) = \frac{P(B) \times P_B(A)}{P(A)}$$
3. Appliquer cette formule dans chacun des cas suivants :
   (a) $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$ et $P_B(A) = 0{,}6$; calculer $P_A(B)$.
   (b) $P(A) = 0{,}25$, $P(B) = 0{,}2$ et $P_B(A) = 0{,}5$; calculer $P_A(B)$.
   (c) $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}3$ et $P_A(B) = 0{,}4$; calculer $P_B(A)$.
4. Que devient cette formule lorsque A et B sont indépendants ?

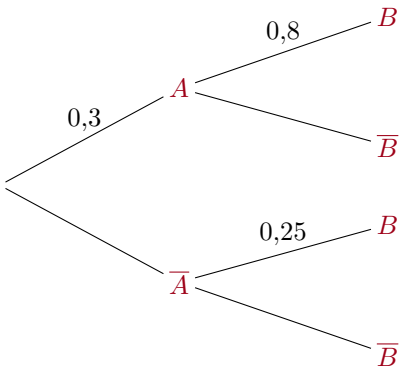
EXERCICE 8 ⋆⋆

1. Dans une classe de 30 élèves, 18 étudient l'allemand, 12 étudient le latin, et 7 étudient les deux. On choisit un élève au hasard, et l'on note A et L les événements correspondants.
   (a) Calculer $P(A)$, $P(L)$ et $P(A \cap L)$.
   (b) Calculer $P_A(L)$ et $P_L(A)$.
   (c) Calculer $P(A \cup L)$, puis la probabilité qu'un élève n'étudie aucune de ces deux matières.
2. Dans un groupe, 60 % des personnes possèdent un vélo, 35 % possèdent une voiture, et 20 % possèdent les deux.
   (a) Une personne possède un vélo. Quelle est la probabilité qu'elle possède aussi une voiture ?
   (b) Une personne possède une voiture. Quelle est la probabilité qu'elle possède aussi un vélo ?
   (c) Ces deux résultats sont-ils égaux ? Expliquer.

Arbres pondérés et probabilités totales

EXERCICE 9 ⋆

On considère l'arbre pondéré incomplet ci-dessous.



1. Recopier et compléter l'arbre. On justifiera chacune des trois probabilités manquantes.
2. Traduire par une phrase la probabilité $P_A(B) = 0{,}8$.
3. Calculer $P(A \cap B)$, $P(A \cap \overline{B})$, $P(\overline{A} \cap B)$ et $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.
4. Vérifier que la somme de ces quatre probabilités vaut 1. Pourquoi était-ce prévisible ?
5. En déduire $P(B)$.

EXERCICE 10 ⋆

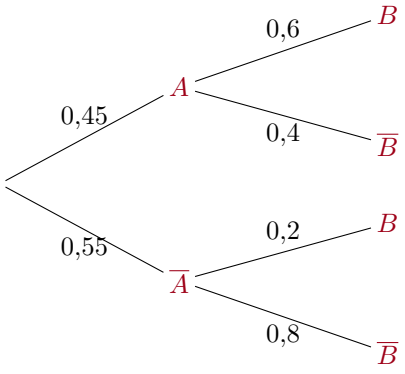
Dans une usine, 60 % des pièces produites proviennent de la machine A, le reste de la machine B. On constate que 3 % des pièces issues de A sont défectueuses, contre 5 % de celles issues de B.

On prélève une pièce au hasard dans la production. On note A l'événement « la pièce provient de la machine A » et D l'événement « la pièce est défectueuse ».

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide des notations du cours.
2. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
3. Calculer la probabilité qu'une pièce provienne de A et soit défectueuse.
4. Calculer $P(\overline{A} \cap D)$.
5. En déduire la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard soit défectueuse.

EXERCICE 11 ⋆

On considère l'arbre pondéré ci-dessous.



1. Calculer les probabilités des quatre chemins de l'arbre.
2. En déduire $P(B)$, puis $P(\overline{B})$ de deux façons différentes.
3. Calculer $P_B(A)$.
4. Comparer $P_A(B)$ et $P(B)$. Que peut-on en conclure sur les événements A et B ?

EXERCICE 12 ⋆⋆

Dans chacun des cas suivants, calculer $P(B)$ à l'aide de la formule des probabilités totales.

1. $P(A) = 0{,}3$, $P_A(B) = 0{,}5$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}2$.
2. $P(A) = 0{,}8$, $P_A(B) = 0{,}15$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}6$.
3. $P(A) = 0{,}25$, $P_A(B) = 0{,}4$ et $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}3$.
4. $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$ et $P_A(B) = 0{,}7$. On demande ici de calculer $P_{\overline{A}}(B)$.

EXERCICE 13 ⋆⋆

Une entreprise s'approvisionne en composants auprès de trois fournisseurs. Le fournisseur F_1 livre 50 % des composants, F_2 en livre 30 % et F_3 le reste. Les taux de pièces défectueuses sont respectivement de 2 %, 4 % et 6 %.

On prélève un composant au hasard et l'on note D l'événement « le composant est défectueux ».

1. Justifier que les événements F_1, F_2 et F_3 forment une partition de l'univers.
2. Construire un arbre pondéré décrivant la situation. *Il comportera trois branches au premier niveau.*
3. Calculer $P(F_1 \cap D)$, $P(F_2 \cap D)$ et $P(F_3 \cap D)$.
4. En déduire $P(D)$ à l'aide de la formule des probabilités totales.
5. Un composant prélevé se révèle défectueux. Calculer la probabilité qu'il provienne du fournisseur F_1, puis de F_2, puis de F_3.
6. Vérifier que la somme des trois probabilités précédentes vaut 1, et expliquer pourquoi.

EXERCICE 14 ⋆⋆

On reprend la situation de l'exercice 10 : $P(A) = 0{,}6$, $P_A(D) = 0{,}03$ et $P_{\overline{A}}(D) = 0{,}05$.

1. Rappeler la valeur de $P(D)$ obtenue à l'exercice 10.
2. Une pièce prélevée au hasard se révèle défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A. On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible, puis une valeur approchée au millième.
3. Calculer de même $P_D(\overline{A})$, et vérifier la cohérence des deux résultats.
4. Une pièce prélevée n'est pas défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.
5. Construire l'arbre « inversé », dont le premier niveau porte sur D et $\overline{D}$, et le second sur A et $\overline{A}$.
6. Comparer $P_D(A)$ et $P(A)$. Le fait de savoir qu'une pièce est défectueuse modifie-t-il l'opinion que l'on a sur sa provenance ?

EXERCICE 15 ⋆⋆

Dans une ville, 30 % des habitants sont abonnés au réseau de transports en commun. Parmi les abonnés, 85 % utilisent le bus au moins une fois par semaine ; parmi les non-abonnés, cette proportion n'est que de 20 %.

On interroge un habitant au hasard. On note A l'événement « l'habitant est abonné » et U l'événement « l'habitant utilise le bus au moins une fois par semaine ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'habitant interrogé soit abonné et utilise le bus.
3. Calculer $P(U)$.
4. L'habitant interrogé utilise le bus au moins une fois par semaine. Quelle est la probabilité qu'il soit abonné ?
5. L'habitant interrogé n'utilise pas le bus. Quelle est la probabilité qu'il soit tout de même abonné ?

Indépendance

EXERCICE 16 ⋆

Voici la répartition de 200 personnes selon deux caractères.

	B	$\overline{B}$	*Total*
A	20	60	80
$\overline{A}$	30	90	120
Total	50	150	200

1. Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.
2. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier par un calcul.
3. Vérifier votre réponse en comparant cette fois $P_A(B)$ et $P(B)$.
4. On remplace maintenant l'effectif 20 par 25, en ajustant les autres cases pour que les totaux des lignes et des colonnes soient inchangés. Recopier le nouveau tableau, puis dire si A et B sont encore indépendants.

EXERCICE 17 ⋆

Dans chaque cas, déterminer si les événements A et B sont indépendants.

1. $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$.
2. $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}6$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$.
3. $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}3$ et $P_A(B) = 0{,}3$.
4. $P(A) = 0{,}25$, $P(B) = 0{,}8$ et $P(A \cup B) = 0{,}85$.
5. $P(A) = \dfrac{1}{4}$, $P(B) = \dfrac{2}{3}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$.

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. On donne $P(A) = 0{,}4$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$. Déterminer la valeur de $P(B)$ pour laquelle les événements A et B sont indépendants.
2. On donne $P(B) = 0{,}6$ et $P(A \cap B) = 0{,}18$. Déterminer $P(A)$ pour que A et B soient indépendants.
3. Une urne contient 4 boules rouges et n boules vertes. On tire une boule au hasard. Un second tirage, indépendant du premier, est ensuite effectué après remise. Déterminer n pour que la probabilité d'obtenir deux boules rouges soit égale à $\dfrac{1}{9}$.

EXERCICE 19 ⋆⋆

Soient A et B deux événements **indépendants**, de probabilités non nulles.

1. Justifier que $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.
2. En déduire que $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P(\overline{B})$, puis conclure.
3. **Application.** On donne $P(A) = 0{,}3$ et $P(B) = 0{,}6$, les deux événements étant indépendants. Calculer $P(A \cap B)$, $P(A \cap \overline{B})$, $P(\overline{A} \cap B)$ et $P(\overline{A} \cap \overline{B})$, puis vérifier que la somme vaut 1.
4. Calculer enfin $P(A \cup B)$.

Variable aléatoire et loi de probabilité

EXERCICE 20 ⋆

Dans chacune des situations suivantes, déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X, que l'on présentera dans un tableau. On vérifiera à chaque fois que la somme des probabilités vaut 1.

1. On lance un dé équilibré à six faces et X désigne le numéro obtenu.
2. On lance un dé équilibré à six faces. Le joueur gagne 3 € s'il obtient un 6, gagne 1 € s'il obtient 2 ou 4, et perd 1 € sinon. X désigne le gain algébrique du joueur.
3. On lance deux fois une pièce équilibrée et X désigne le nombre de « Face » obtenus.
4. Une urne contient 3 boules rouges, 2 boules vertes et 1 boule bleue. On tire une boule au hasard. Le joueur gagne 2 € pour une rouge, 5 € pour une verte et 10 € pour la bleue. X désigne le gain.

EXERCICE 21 ⋆⋆

Un jeu consiste à lancer deux fois de suite une pièce équilibrée. Le joueur gagne 4 € pour chaque « Face » obtenue et perd 2 € pour chaque « Pile ». On note X le gain algébrique du joueur à l'issue des deux lancers.

1. Construire un arbre décrivant les quatre issues possibles, en indiquant le gain associé à chacune.
2. Quelles sont les valeurs prises par X ?
3. Déterminer la loi de probabilité de X et la présenter dans un tableau.
4. Calculer $P(X \geqslant 2)$, puis $P(X < 0)$.

EXERCICE 22 ⋆⋆

Voici la loi de probabilité, incomplète, d'une variable aléatoire X.

x_i	-2	0	1	4
$P(X = x_i)$	0,15	a	0,3	0,25

1. Déterminer la valeur du réel a. Quelle propriété permet de conclure ?
2. Calculer $P(X \leqslant 0)$ et $P(X > 0)$.
3. Une autre variable aléatoire Y prend les valeurs -1, 2 et x avec les probabilités respectives 0,5, 0,3 et 0,2. Déterminer x pour que l'on ait $E[Y] = 1$.

EXERCICE 23 ⋆⋆

Une urne contient 5 jetons numérotés 1, 1, 2, 3 et 3. On tire un jeton au hasard, on note son numéro, on le remet dans l'urne, puis on en tire un second. On note X la somme des deux numéros obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité du numéro obtenu lors d'un tirage.
2. Construire un arbre pondéré décrivant les deux tirages. *On pourra se limiter aux trois numéros possibles à chaque niveau.*
3. Quelles sont les valeurs prises par X ?
4. Déterminer la loi de probabilité de X.
5. Calculer $P(X = 4)$ de deux façons différentes.

Espérance, variance et écart-type

EXERCICE 24 ⋆

Pour chacune des lois de probabilité suivantes, calculer l'espérance $E[X]$.

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,2	0,5	0,3

x_i	-5	0	10
$P(X = x_i)$	0,4	0,35	0,25

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

x_i	-3	-1	2	6
$P(X = x_i)$	0,1	0,4	0,3	0,2

Interpréter le résultat obtenu pour la deuxième loi, en imaginant qu'il s'agit du gain d'un jeu.

EXERCICE 25 ⋆⋆

On reprend les quatre lois de l'exercice 24. Pour chacune d'elles :

1. calculer $E[X^2]$ en ajoutant une ligne au tableau de la loi ;
2. en déduire la variance $V(X)$ à l'aide de la formule de König-Huygens ;
3. calculer l'écart-type $\sigma(X)$, arrondi au centième si nécessaire.

Laquelle de ces quatre variables aléatoires est la plus « dispersée » autour de son espérance ?

EXERCICE 26 ⋆⋆

Soit X la variable aléatoire de loi :

x_i	-2	1	3
$P(X = x_i)$	0,3	0,5	0,2

1. Calculer $E[X]$.
2. Calculer $V(X)$ en utilisant la **définition**, c'est-à-dire en calculant les écarts $x_i - E[X]$, en les élevant au carré, puis en les pondérant.
3. Calculer $V(X)$ en utilisant cette fois la **formule de König-Huygens**.
4. Comparer les deux méthodes en termes de rapidité et de risque d'erreur.
5. En déduire $\sigma(X)$, arrondi au centième.

EXERCICE 27 ⋆⋆

Soit X une variable aléatoire telle que $E[X] = 4$ et $V(X) = 9$.

1. Calculer, sans reconstruire aucune loi de probabilité :

   a) $E[3X]$ c) $E[2X - 1]$ e) $E[0{,}5X + 3]$

   b) $E[X + 5]$ d) $E[-X]$ f) $E[10 - 2X]$

2. Quelle propriété du cours a-t-on utilisée ? Pourquoi fait-elle gagner beaucoup de temps ?
3. Un jeu de gain X a pour espérance $E[X] = 1{,}5$ €. L'organisateur décide de doubler tous les gains puis de prélever un droit d'entrée de 2 €. On note Y le nouveau gain. Exprimer Y en fonction de X, puis calculer $E[Y]$.
4. Quel droit d'entrée l'organisateur devrait-il prélever, après avoir doublé les gains, pour que le jeu soit **équitable**, c'est-à-dire d'espérance nulle ?
5. Un élève affirme que $E[X^2] = (E[X])^2 = 16$. Expliquer pourquoi c'est faux, et calculer la valeur exacte de $E[X^2]$.

EXERCICE 28 ⋆⋆

Un jeu de fête foraine se déroule ainsi : le joueur lance un dé équilibré à six faces. S'il obtient un 6, il gagne 10 € ; s'il obtient un 5, il gagne 4 € ; dans tous les autres cas, il perd 2 €. On note X le gain algébrique du joueur avant paiement de la mise.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E[X]$ et interpréter ce résultat par une phrase.
3. Calculer $V(X)$ puis $\sigma(X)$, arrondi au centième.

4. Le joueur doit verser une mise de m euros pour participer. On note $Y = X - m$ son gain net. Exprimer $E[Y]$ en fonction de m.
5. Déterminer la mise m pour que le jeu soit équitable.
6. L'organisateur fixe finalement la mise à 2 €. Quel bénéfice moyen par partie peut-il espérer réaliser sur un grand nombre de parties ?

Exercices de synthèse

EXERCICE 29 ⋆⋆

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Déterminer laquelle et justifier.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1. Si $P(A) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$, alors $P_A(B)$ vaut	0,1	0,4	2,5
2. Si $P(A) = 0{,}4$ et $P_A(B) = 0{,}3$, alors $P(A \cap B)$ vaut	0,12	0,7	0,75
3. Sur un arbre pondéré, la somme des probabilités portées par les branches issues d'un même nœud vaut	0	1	$P(A)$
4. Si A et B sont indépendants avec $P(A) = 0{,}3$ et $P(B) = 0{,}5$, alors $P(A \cap B)$ vaut	0,8	0,15	0,2
5. La formule des probabilités totales s'écrit $P(B) =$	$P(A) + P(\overline{A})$	$P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$	$P_A(B) + P_{\overline{A}}(B)$
6. Si $P_A(B) = 0{,}7$, alors $P_A(\overline{B})$ vaut	0,3	0,7	on ne peut pas savoir
7. Si $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}2$ et $P(A \cap B) = 0{,}12$, alors A et B sont	indépendants	incompatibles	ni l'un ni l'autre
8. Deux événements incompatibles de probabilités non nulles sont	toujours indépendants	jamais indépendants	parfois indépendants
9. Si $P(X = 0) = 0{,}4$ et $P(X = 2) = 0{,}6$, alors $E[X]$ vaut	1	1,2	2
10. Si $E[X] = 3$, alors $E[2X + 1]$ vaut	6	7	4

EXERCICE 30 ⋆⋆

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est fausse, donner un contre-exemple ou l'énoncé correct.

1. Pour tous événements A et B de probabilités non nulles, $P_A(B) = P_B(A)$.
2. Sur un arbre pondéré, le produit des probabilités portées par un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements de ce chemin.
3. Si A et B sont indépendants, alors $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.
4. Si A et B sont incompatibles, alors $P(A \cap B) = 0$.
5. Pour tout événement A de probabilité non nulle, $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$.
6. Pour tous événements A et B, $P_A(B) + P_{\overline{A}}(B) = 1$.
7. Si $P_A(B) = P(B)$, alors A et B sont indépendants.
8. Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont également.
9. La somme des probabilités figurant dans le tableau d'une loi de probabilité vaut 1.
10. Pour toute variable aléatoire X, on a $E\left[X^2\right] = (E[X])^2$.
11. Une espérance nulle signifie que le joueur ne peut rien gagner.

EXERCICE 31 ⋆⋆

Une maladie touche 2 % de la population. On dispose d'un test de dépistage dont les performances sont les suivantes :

- si une personne est malade, le test est positif dans 95 % des cas ;
- si une personne n'est pas malade, le test est négatif dans 97 % des cas.

On choisit une personne au hasard dans la population. On note M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ».

1. Traduire les données de l'énoncé, puis construire un arbre pondéré.
2. Calculer $P(M \cap T)$ et $P(\overline{M} \cap T)$.
3. En déduire $P(T)$.
4. Une personne a un test positif. Calculer la probabilité qu'elle soit réellement malade. On donnera une valeur approchée au millième.
5. Commenter ce résultat : il est bien inférieur à 95 %. Expliquer, à l'aide de la question 2, d'où vient ce phénomène.
6. Une personne a un test négatif. Calculer la probabilité qu'elle ne soit effectivement pas malade.

EXERCICE 32 ⋆⋆

On dispose d'un dé équilibré à six faces et de deux urnes :

- l'urne U_1 contient 3 boules rouges et 2 boules vertes ;
- l'urne U_2 contient 1 boule rouge et 4 boules vertes.

On lance le dé. Si l'on obtient un 6, on tire une boule dans U_1 ; sinon, on tire une boule dans U_2.

On note S l'événement « le dé donne un 6 » et R l'événement « la boule tirée est rouge ».

1. Déterminer $P(S)$, $P_S(R)$ et $P_{\overline{S}}(R)$.
2. Construire un arbre pondéré. On écrira toutes les probabilités sous forme fractionnaire.
3. Calculer $P(S \cap R)$ et $P(\overline{S} \cap R)$.

4. En déduire la probabilité de tirer une boule rouge.
5. La boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité que le dé ait donné un 6 ?
6. Les événements S et R sont-ils indépendants ? Justifier.
7. Le joueur gagne 5 € si la boule tirée est rouge, et perd 1 € sinon. On note X son gain algébrique. Déterminer la loi de probabilité de X, puis calculer $E[X]$.
8. Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$, arrondi au centième.

EXERCICE 33 ⋆⋆

Pour se rendre à son travail, un employé prend le train 4 jours sur 5, et sa voiture les autres jours. Lorsqu'il prend le train, il arrive en retard une fois sur dix ; lorsqu'il prend sa voiture, une fois sur quatre.

On choisit un jour au hasard. On note T l'événement « l'employé prend le train » et R l'événement « l'employé arrive en retard ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'employé prenne le train et arrive en retard.
3. Calculer la probabilité qu'il arrive en retard.
4. L'employé est arrivé en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait pris sa voiture ?
5. Sachant qu'il est arrivé à l'heure, quelle est la probabilité qu'il ait pris le train ?

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

Soient A et B deux événements d'un univers Ω tels que

$$P(A) = 0{,}4 \qquad P_A(B) = x \qquad P_{\overline{A}}(B) = 0{,}2$$

où x désigne un nombre réel de l'intervalle $[0\,;1]$.

1. Construire un arbre pondéré faisant apparaître x.
2. Démontrer que $P(B) = 0{,}4x + 0{,}12$.
3. Déterminer la valeur de x pour laquelle $P(B) = 0{,}3$.
4. Déterminer la valeur de x pour laquelle les événements A et B sont indépendants. Interpréter le résultat obtenu.
5. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $P(B) \geqslant 0{,}4$.
6. Lorsque x parcourt l'intervalle $[0\,;1]$, entre quelles valeurs $P(B)$ varie-t-il ?
7. Exprimer $P_B(A)$ en fonction de x, pour $x \neq 0$.

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

Une plateforme de streaming propose deux formules d'abonnement. On sait que 40 % des abonnés ont souscrit l'offre *Premium*. Parmi les abonnés Premium, 70 % regardent au moins un film par semaine ; cette proportion tombe à 45 % chez les autres abonnés.

On interroge un abonné au hasard. On note P l'événement « l'abonné a l'offre Premium » et F l'événement « l'abonné regarde au moins un film par semaine ».

Partie A : étude de la situation

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer $P(P \cap F)$ et $P(\overline{P} \cap F)$.

3. En déduire que $P(F) = 0{,}55$.
4. L'abonné interrogé regarde au moins un film par semaine. Calculer la probabilité qu'il ait l'offre Premium. On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.
5. L'abonné interrogé ne regarde pas de film chaque semaine. Calculer la probabilité qu'il ait tout de même l'offre Premium.
6. Les événements P et F sont-ils indépendants ? Justifier.

Partie B : deux abonnés

On interroge maintenant deux abonnés au hasard, de façon indépendante l'un de l'autre. On note F_1 et F_2 les événements « le premier abonné regarde au moins un film par semaine » et « le second abonné regarde au moins un film par semaine ».

7. Calculer la probabilité que les deux abonnés regardent au moins un film par semaine.
8. Calculer la probabilité qu'aucun des deux ne regarde de film chaque semaine.
9. En déduire la probabilité qu'au moins l'un des deux regarde au moins un film par semaine.

Partie C : une variable aléatoire

On note X le nombre d'abonnés, parmi les deux interrogés, qui regardent au moins un film par semaine.

10. Quelles sont les valeurs prises par X ?
11. Déterminer la loi de probabilité de X, en s'appuyant sur les résultats de la partie B.
12. Calculer $E[X]$ et interpréter le résultat par une phrase.
13. Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$, arrondi au centième.