CORRIGÉ – CHAPITRE 6

TRIGONOMÉTRIE

Radians et cercle trigonométrique

EXERCICE 1 ⋆

Les deux unités étant proportionnelles, on part de la relation du cours :

$$\frac{\alpha_{\text{rad}}}{\pi} = \frac{\alpha_{\text{deg}}}{180} \qquad \text{d'où} \qquad \alpha_{\text{rad}} = \frac{\pi \times \alpha_{\text{deg}}}{180}$$

a) $\dfrac{10\pi}{180} = \boxed{\dfrac{\pi}{18}}$

b) $\dfrac{59\pi}{180} = \boxed{\dfrac{59\pi}{180}}$ (59 est premier)

c) $\dfrac{180\pi}{180} = \boxed{\pi}$

d) $\dfrac{18\pi}{180} = \boxed{\dfrac{\pi}{10}}$

e) $\dfrac{72\pi}{180} = \boxed{\dfrac{2\pi}{5}}$

f) $\dfrac{112{,}5\pi}{180} = \dfrac{225\pi}{360} = \boxed{\dfrac{5\pi}{8}}$

g) $\dfrac{45\pi}{180} = \boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

h) $\dfrac{150\pi}{180} = \boxed{\dfrac{5\pi}{6}}$

i) $\dfrac{270\pi}{180} = \boxed{\dfrac{3\pi}{2}}$

j) $\dfrac{15\pi}{180} = \boxed{\dfrac{\pi}{12}}$

On remarque en f) qu'il est plus commode de chasser d'abord la virgule en multipliant numérateur et dénominateur par 2 : $\dfrac{112{,}5}{180} = \dfrac{225}{360} = \dfrac{5}{8}$.

EXERCICE 2 ⋆

On utilise cette fois la relation dans l'autre sens :

$$\alpha_{\text{deg}} = \frac{180 \times \alpha_{\text{rad}}}{\pi}$$

Le π se simplifie systématiquement : il ne doit jamais rester dans le résultat.

a) $\dfrac{180}{3} = \boxed{60°}$

b) $\dfrac{2 \times 180}{3} = \boxed{120°}$

c) $\dfrac{180 \times \pi}{\pi} = \boxed{180°}$

d) $\dfrac{5 \times 180}{4} = \boxed{225°}$

e) $\dfrac{3 \times 180}{8} = \boxed{67{,}5°}$

f) $\dfrac{5 \times 180}{12} = \boxed{75°}$

g) $\dfrac{3 \times 180}{2} = \boxed{270°}$

h) $\dfrac{7 \times 180}{10} = \boxed{126°}$

i) $\dfrac{11 \times 180}{6} = \boxed{330°}$

j) $\dfrac{-5 \times 180}{6} = \boxed{-150°}$

EXERCICE 3 ⋆

1. En appliquant la même proportionnalité case par case, on obtient :

Degrés	0	30	45	60	90	120	135	180	240	315
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$

2. C'est exactement la définition du radian : **sur le cercle trigonométrique, la longueur de l'arc intercepté est égale à la mesure de l'angle en radians**. L'arc intercepté par un angle de $\frac{\pi}{5}$ a donc pour longueur :

$$\boxed{\frac{\pi}{5} \approx 0{,}63}$$

Pour 108°, il faut d'abord convertir : $\alpha_{\text{rad}} = \dfrac{108\pi}{180} = \dfrac{3\pi}{5}$, d'où une longueur de :

$$\boxed{\frac{3\pi}{5} \approx 1{,}88}$$

3. Toujours par définition du radian, la mesure de l'angle est égale à la longueur de l'arc :

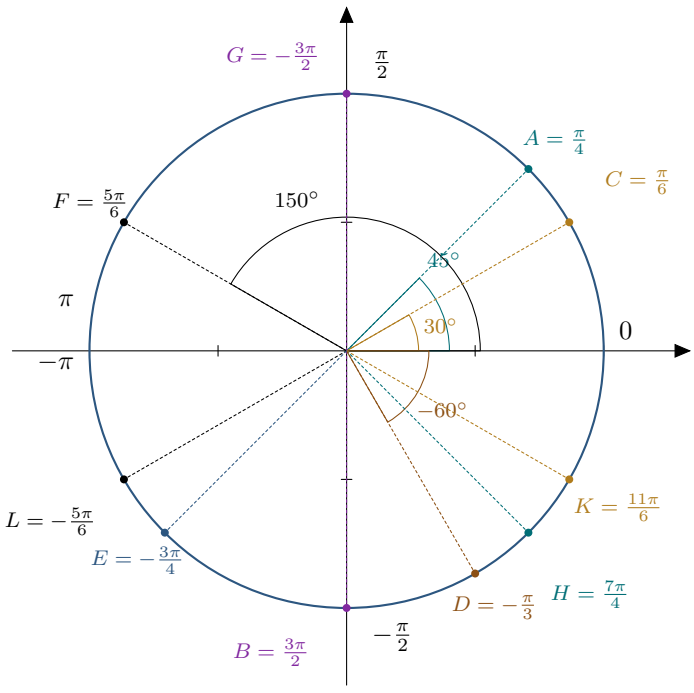
$$\boxed{\alpha_{\text{rad}} = 2{,}4}$$

On convertit ensuite en degrés :

$$\alpha_{\text{deg}} = \frac{180 \times 2{,}4}{\pi} = \frac{432}{\pi} \approx \boxed{137{,}5°}$$

EXERCICE 4 ⋆

1. Chaque réel se place en partant de I et en parcourant sur le cercle une longueur égale à sa valeur absolue, dans le sens direct s'il est positif, indirect sinon.



Les points ont été coloriés **par couples symétriques par rapport à l'axe des abscisses**, ce qui rend la question 2 immédiate.
Il est commode de noter à côté de chaque point la **mesure principale** du réel correspondant : c'est elle qui rend les deux questions suivantes immédiates.

Point	A	B	C	D	E	F	G	H	K	L
Réel	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$
Mes. princ.	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$

2. On lit sur la figure quatre couples de points symétriques par rapport à l'axe des abscisses :

$$\boxed{(A\,;H) \quad ; \quad (C\,;K) \quad ; \quad (F\,;L) \quad ; \quad (B\,;G)}$$

Une telle symétrie change l'ordonnée en son opposée et conserve l'abscisse : les deux réels correspondants sont donc **opposés**, à un nombre entier de tours près. On vérifie par exemple que $\frac{7\pi}{4}$ a pour mesure principale $-\frac{\pi}{4}$, opposée de celle de A, et que $\frac{11\pi}{6}$ a pour mesure principale $-\frac{\pi}{6}$, opposée de celle de C.

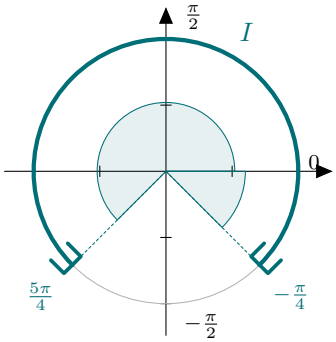
3. Deux points sont diamétralement opposés lorsque les réels correspondants diffèrent de π. En comparant les mesures principales, on trouve là encore quatre couples :

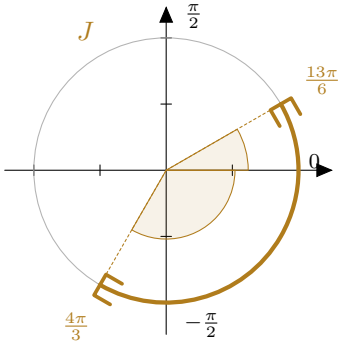
$$\boxed{(A\,;E) \quad ; \quad (C\,;L) \quad ; \quad (F\,;K) \quad ; \quad (B\,;G)}$$

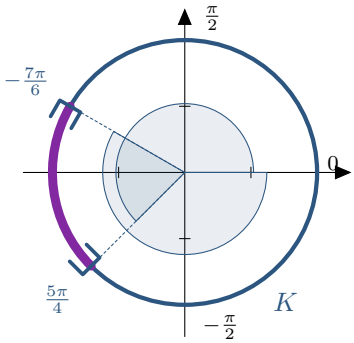
Le couple $(B\,;G)$ apparaît dans les deux questions : c'est le seul cas où cela est possible, puisque ces deux points sont situés sur l'axe des ordonnées.

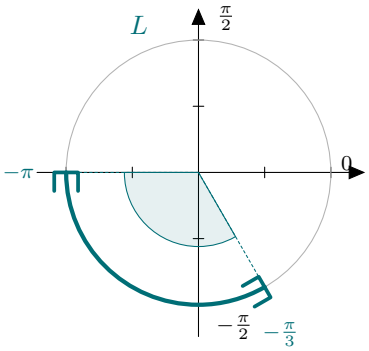
EXERCICE 5 ⋆

1. On parcourt le cercle dans le **sens direct**, en partant de la borne inférieure de l'intervalle et en s'arrêtant à la borne supérieure.









Sur chaque figure, le secteur grisé au centre matérialise le **balayage** effectué depuis la borne inférieure jusqu'à la borne supérieure, dans le sens direct. Les quatre intervalles étant fermés, chaque crochet est tourné *vers* l'arc colorié : il l'englobe, signe que la borne est incluse. Pour K, ce balayage dépasse le tour complet : tout le cercle est colorié, et l'arc tracé en violet, de $\frac{5\pi}{6}$ à $\frac{5\pi}{4}$, est même parcouru **deux fois**.

2. La longueur de l'arc colorié est l'amplitude de l'intervalle, c'est-à-dire la différence de ses bornes :

$$I : \ \frac{5\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{6\pi}{4} = \boxed{\frac{3\pi}{2}}$$

$$J : \ \frac{13\pi}{6} - \frac{4\pi}{3} = \frac{13\pi}{6} - \frac{8\pi}{6} = \boxed{\frac{5\pi}{6}}$$

$$L : \ -\frac{\pi}{3} - (-\pi) = \frac{2\pi}{3} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{2\pi}{3}}$$

Le cas de K est traité à la question suivante.

3. C'est l'intervalle $\boxed{K = \left[-\frac{7\pi}{6} ; \frac{5\pi}{4}\right]}$. Son amplitude vaut en effet :

$$\frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{6} = \frac{15\pi}{12} + \frac{14\pi}{12} = \frac{29\pi}{12} \approx 7{,}59 \ > \ 2\pi \approx 6{,}28$$

L'enroulement fait donc **plus d'un tour complet** : l'arc colorié est le cercle tout entier, de longueur 2π, et certains points du cercle sont même atteints deux fois. C'est le piège classique : on ne peut pas colorier « de $-\frac{7\pi}{6}$ à $\frac{5\pi}{4}$ » sans vérifier au préalable que l'amplitude ne dépasse pas 2π.

Enroulement de la droite numérique et mesure principale

EXERCICE 6 ⋆

1. D'après la proposition 1 du cours, deux réels ont le même point image si et seulement s'ils diffèrent d'un multiple entier de 2π. On calcule donc la mesure principale de chacun :

$$\frac{7\pi}{3} - 2\pi = \frac{\pi}{3} \quad ; \quad -\frac{5\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi}{3} \quad ; \quad \frac{13\pi}{3} - 4\pi = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{8\pi}{3} - 2\pi = \frac{2\pi}{3} \quad ; \quad -\frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{2\pi}{3}$$

On en déduit donc trois groupes :

$$\boxed{\left\{\frac{\pi}{3} ; \frac{7\pi}{3} ; -\frac{5\pi}{3} ; \frac{13\pi}{3}\right\} \quad ; \quad \left\{\frac{2\pi}{3} ; \frac{8\pi}{3} ; -\frac{4\pi}{3}\right\} \quad ; \quad \left\{-\frac{2\pi}{3}\right\}}$$

Attention : $-\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ sont bien deux points *distincts*, symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

2. Il suffit d'ajouter ou de retrancher des multiples de 2π :

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4} \quad ; \quad \frac{3\pi}{4} + 4\pi = \frac{19\pi}{4} \quad ; \quad \frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4}$$

d'où par exemple :

$$\boxed{\frac{11\pi}{4} \quad ; \quad \frac{19\pi}{4} \quad ; \quad -\frac{5\pi}{4}}$$

3. Pour le premier, on cherche k tel que $2k\pi = \dfrac{25\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6}$:

$$\frac{25\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} = 4\pi = 2 \times 2\pi$$

donc $\boxed{k = 2 \text{ convient}}$: les deux réels ont bien le même point image.

Pour le second :

$$\frac{13\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{39\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{38\pi}{6} = \frac{19\pi}{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{19\pi}{3} \div 2\pi = \frac{19}{6}$$

Or $\dfrac{19}{6}$ n'est pas un entier. On en déduit donc qu' $\boxed{\text{il n'existe aucun entier } k}$ convenant : ces deux réels ont des points images différents.

EXERCICE 7 ⋆

Pour chaque angle, on calcule d'abord le nombre de tours $\dfrac{\alpha}{2\pi}$, puis on retranche le nombre de tours entiers nécessaire pour atterrir dans $]-\pi\,;\pi]$.

a) $\dfrac{7\pi}{2} - 2 \times 2\pi = \dfrac{7\pi}{2} - \dfrac{8\pi}{2} = \boxed{-\dfrac{\pi}{2}}$

b) $-\dfrac{4\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{-4\pi + 6\pi}{3} = \boxed{\dfrac{2\pi}{3}}$

c) $\dfrac{35\pi}{6} - 3 \times 2\pi = \dfrac{35\pi - 36\pi}{6} = \boxed{-\dfrac{\pi}{6}}$

d) $-\dfrac{21\pi}{4} + 3 \times 2\pi = \dfrac{-21\pi + 24\pi}{4} = \boxed{\dfrac{3\pi}{4}}$

e) $\dfrac{202\pi}{3} - 34\pi = \dfrac{202\pi - 204\pi}{3} = \boxed{-\dfrac{2\pi}{3}}$

f) $\dfrac{53\pi}{6} - 4 \times 2\pi = \dfrac{53\pi - 48\pi}{6} = \boxed{\dfrac{5\pi}{6}}$

g) $-\dfrac{17\pi}{2} + 4 \times 2\pi = \dfrac{-17\pi + 16\pi}{2} = \boxed{-\dfrac{\pi}{2}}$

h) $\dfrac{100\pi}{3} - 17 \times 2\pi = \dfrac{100\pi - 102\pi}{3} = \boxed{-\dfrac{2\pi}{3}}$

i) $-\dfrac{123\pi}{4} + 15 \times 2\pi = \dfrac{-123\pi + 120\pi}{4} = \boxed{-\dfrac{3\pi}{4}}$

j) $\dfrac{2024\pi}{3} - 337 \times 2\pi = \dfrac{2024\pi - 2022\pi}{3} = \boxed{\dfrac{2\pi}{3}}$

Le piège consiste à s'arrêter trop tôt. En a) par exemple, retrancher un seul tour donne $\dfrac{7\pi}{2} - 2\pi = \dfrac{3\pi}{2}$, qui est *supérieur* à π : il faut en retrancher un second. On contrôle toujours le résultat final en vérifiant qu'il appartient bien à $]-\pi\,;\pi]$.

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. On ramène chaque mesure dans $]-\pi\,;\pi]$:

$$\frac{17\pi}{4} - 4\pi = \frac{17\pi - 16\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad -\frac{31\pi}{4} + 8\pi = \frac{-31\pi + 32\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{23\pi}{4} - 4\pi = \frac{23\pi - 16\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \quad \text{puis} \quad \frac{7\pi}{4} - 2\pi = -\frac{\pi}{4}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{17\pi}{4} \text{ et } -\dfrac{31\pi}{4} \text{ sont des mesures de cet angle} \\ \dfrac{23\pi}{4} \text{ n'en est pas une} \end{array}}$$

2. On cherche les entiers k tels que $-\pi < \dfrac{k\pi}{3} \leqslant \pi$. En divisant par π puis en multipliant par 3 :

$$-\pi < \frac{k\pi}{3} \leqslant \pi \iff -1 < \frac{k}{3} \leqslant 1 \iff -3 < k \leqslant 3$$

Les entiers convenables sont donc $k \in \{-2\,;-1\,;0\,;1\,;2\,;3\}$, ce qui donne :

$$\boxed{-\frac{2\pi}{3}\ ;\ -\frac{\pi}{3}\ ;\ 0\ ;\ \frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{2\pi}{3}\ ;\ \pi}$$

On remarque que $k = -3$ est exclu (il donnerait $-\pi$, borne ouverte) alors que $k = 3$ est accepté : c'est toute l'asymétrie de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

3. On calcule le nombre de tours :

$$\frac{100}{2\pi} \approx 15{,}915$$

L'angle représente donc $\boxed{\text{15 tours complets}}$. En retranchant ces 15 tours :

$$100 - 15 \times 2\pi = 100 - 30\pi \approx 5{,}752$$

Ce résultat dépasse $\pi \approx 3{,}14$: on retranche donc un tour de plus.

$$100 - 32\pi \approx -0{,}531$$

Cette fois $-\pi < -0{,}531 \leqslant \pi$, et la mesure principale cherchée est :

$$\boxed{100 - 32\pi \approx -0{,}531 \text{ rad}}$$

Cosinus, sinus et tangente d'un réel

EXERCICE 9 ⋆

1. On commence par ramener chaque réel à sa mesure principale, puis on lit ses coordonnées sur le cercle. La tangente s'obtient enfin par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Réel	**Mesure principale**	cos	sin	tan
a) $\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
b) $\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
c) $\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
d) $\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
e) $\frac{13\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
f) $\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
g) $\frac{9\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
h) $\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Réel	**Mesure principale**	cos	sin	tan
i) $\dfrac{81\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1
j) $-\dfrac{108\pi}{4} = -27\pi$	π	-1	0	0
k) $\dfrac{4\pi}{3}$	$-\dfrac{2\pi}{3}$	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
l) $\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
m) $\dfrac{71\pi}{3}$	$-\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
n) $\dfrac{97\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
o) $-\dfrac{54\pi}{3} = -18\pi$	0	1	0	0

Deux remarques. En j), le calcul $-\dfrac{108\pi}{4} = -27\pi$ conduit à $-27\pi + 28\pi = \pi$: c'est bien π, et non $-\pi$, car seule la borne π appartient à $]-\pi\,;\pi]$. Par ailleurs $\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, que l'on rend rationnel au dénominateur : $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2. En regroupant les réels ayant la même mesure principale :

$$\begin{array}{lll} \{a\,;e\} \to \dfrac{\pi}{6} & \{b\} \to \dfrac{5\pi}{6} & \{c\} \to -\dfrac{5\pi}{6} \\ \{d\} \to -\dfrac{\pi}{6} & \{f\,;g\,;i\} \to \dfrac{\pi}{4} & \{h\} \to -\dfrac{3\pi}{4} \\ \{j\} \to \pi & \{k\} \to -\dfrac{2\pi}{3} & \{l\,;n\} \to \dfrac{\pi}{3} \\ \{m\} \to -\dfrac{\pi}{3} & \{o\} \to 0 & \end{array}$$

Les quinze réels proposés ne fournissent donc que $\boxed{\text{11 points distincts}}$ sur le cercle.

EXERCICE 10 ⋆

1. Le cosinus est l'abscisse du point image, le sinus son ordonnée : le signe se lit donc directement sur le quadrant. Celui de la tangente s'en déduit par la règle des signes d'un quotient.

	Quadrant	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\tan(x)$
a) $\left]\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right[$	2e	<0	>0	<0
b) $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right[$	4e	>0	<0	<0
c) $\left]-\pi\,;-\dfrac{\pi}{2}\right[$	3e	<0	<0	>0
d) $\left]\dfrac{3\pi}{2}\,;2\pi\right[$	4e	>0	<0	<0

On remarque que b) et d) décrivent le **même** arc de cercle : en retranchant un tour, $\left]\dfrac{3\pi}{2}\,;2\pi\right[$ devient $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right[$.

2. L'abscisse du point image est négative et son ordonnée positive : le point se situe donc dans le $\boxed{2^{\text{e}}\text{ quadrant}}$, c'est-à-dire que la mesure principale de x appartient à $\left]\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right[$.

3. Le point image appartenant au cercle de rayon 1, ses coordonnées vérifient toujours $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$. Or $\dfrac{5}{4} = 1{,}25 > 1$, donc :

$$\boxed{\text{il n'existe aucun réel } x \text{ tel que } \cos(x) = \tfrac{5}{4}}$$

En revanche $-1 \leqslant -\dfrac{3}{4} \leqslant 1$, donc :

$$\boxed{\text{il existe une infinité de réels } x \text{ tels que } \sin(x) = -\tfrac{3}{4}}$$

Ils correspondent aux deux points du cercle d'ordonnée $-\dfrac{3}{4}$, chacun à un nombre entier de tours près.

EXERCICE 11 ⋆⋆

On ramène systématiquement chaque angle à sa mesure principale avant de lire sa valeur remarquable.

a) $34\pi = 17 \times 2\pi$ et $17\pi = \pi + 8 \times 2\pi$, donc $\cos(34\pi) = \cos(0) = 1$ et $\sin(17\pi) = \sin(\pi) = 0$:

$$12\cos(34\pi) - 35\sin(17\pi) = 12 \times 1 - 35 \times 0 = \boxed{12}$$

b) $15\pi = \pi + 7 \times 2\pi$, donc $\cos(15\pi) = \cos(\pi) = -1$, et $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$:

$$3\cos(15\pi) + 18\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 3 \times (-1) + 18 \times (-1) = \boxed{-21}$$

c) $2024\pi = 1012 \times 2\pi$, donc $\cos(2024\pi) = \cos(0) = 1$:

$$\cos^2(2024\pi) = 1^2 = \boxed{1}$$

d) $\dfrac{13\pi}{3} - 4\pi = \dfrac{\pi}{3}$, donc $\sin\left(\dfrac{13\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{3\sin\left(\frac{13\pi}{3}\right)} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3\sqrt{3}} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

e) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$:

$$2\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

f) $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$:

$$3\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 5\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = \boxed{-\sqrt{3}}$$

g) $\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{7\pi}{3} - 2\pi = \dfrac{\pi}{3}$:

$$-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + 3\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \boxed{\frac{7}{4}}$$

h) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\left(3\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - 2\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)^2 = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\right)^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

i) $-\dfrac{9\pi}{4} + 2\pi = -\dfrac{\pi}{4}$ donc $\cos\left(-\dfrac{9\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, et $\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$:

$$\left(2\cos\left(\frac{-9\pi}{4}\right) - 3\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)^2 = \left(\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right)^2 = 2 - 2 \times \sqrt{2} \times \frac{3}{2} + \frac{9}{4} = \boxed{\frac{17}{4} - 3\sqrt{2}}$$

Le piège est ici de « distribuer le carré » : $\left(\sqrt{2} - \dfrac{3}{2}\right)^2$ ne vaut **pas** $2 - \dfrac{9}{4}$. Le double produit est indispensable.

j) $-\dfrac{4\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{17\pi}{4} - 4\pi = \dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{17\pi}{6} - 2\pi = \dfrac{5\pi}{6}$, d'où $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$. Le numérateur vaut :

$$\left(-2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(-\sqrt{3} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$$
$$= 3 - 2 \times \sqrt{3} \times \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{25 \times 2}{4} = 3 - 5\sqrt{6} + \frac{25}{2} = \frac{31}{2} - 5\sqrt{6}$$

et le dénominateur $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$. Diviser par $\dfrac{1}{4}$ revient à multiplier par 4 :

$$\frac{\frac{31}{2} - 5\sqrt{6}}{\frac{1}{4}} = 4\left(\frac{31}{2} - 5\sqrt{6}\right) = \boxed{62 - 20\sqrt{6}}$$

EXERCICE 12 ⋆

1. Dans chaque cas, on part de la relation fondamentale $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, qui donne le *carré* de la valeur cherchée ; l'intervalle proposé permet ensuite de choisir le bon signe.

   (a) $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$, donc $\cos(x) = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Or $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right]$: le point image est dans le 4e quadrant, où l'abscisse est positive.

   $$\boxed{\cos(x) = \frac{\sqrt{15}}{4}}$$

   (b) $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$, donc $\sin(x) = \pm\dfrac{4}{5}$. Or $x \in \left[\dfrac{3\pi}{2}\,;2\pi\right]$, soit encore le 4e quadrant, où l'ordonnée est négative.

   $$\boxed{\sin(x) = -\frac{4}{5}}$$

(c) $\sin^2(x) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$, donc $\sin(x) = \pm\frac{\sqrt{8}}{3} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Or $x \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$: l'ordonnée est positive.

$$\boxed{\sin(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

(d) $\cos^2(x) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, donc $\cos(x) = \pm\frac{1}{2}$. Or $x \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$: l'abscisse est négative.

$$\boxed{\cos(x) = -\frac{1}{2}}$$

(e) $\sin^2(x) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$, donc $\sin(x) = \pm\frac{2}{3}$. Or $x \in \left[\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right]$: l'ordonnée est négative.

$$\boxed{\sin(x) = -\frac{2}{3}}$$

2. Oui, l'intervalle est **indispensable**. La relation fondamentale ne fournit que le carré de la valeur cherchée, donc deux valeurs opposées possibles. Sans l'intervalle, on ne pourrait pas trancher entre les deux : les deux points du cercle ayant le cosinus donné sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, et leurs ordonnées sont opposées.

3. Si un tel réel existait, ses coordonnées vérifieraient la relation fondamentale. Or :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \neq 1$$

soit :

$$\boxed{\text{un tel réel n'existe pas}}$$

Le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ n'est en effet pas situé sur le cercle trigonométrique.

En revanche :

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

donc $\boxed{\text{un tel réel existe}}$, et son point image se situe dans le 2$^{\text{e}}$ quadrant.

EXERCICE 13 ⋆⋆

1. Soit x un réel tel que $\cos(x) \neq 0$. Par définition de la tangente :

$$1 + \tan^2(x) = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \boxed{\frac{1}{\cos^2(x)}}$$

la dernière égalité venant de la relation fondamentale.

2. On sait déjà (exercice 12) que $\sin(x) = \frac{4}{5}$ pour x dans le premier quadrant. On en déduit :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

3. La formule de la question 1 donne :

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + 2^2 = 5 \qquad \text{d'où} \qquad \cos^2(x) = \frac{1}{5}$$

Or $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos(x) > 0$:

$$\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

On obtient alors le sinus en écrivant $\sin(x) = \tan(x) \times \cos(x)$:

$$\sin(x) = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

4. On procède de la même manière :

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + (-3)^2 = 10 \qquad \text{d'où} \qquad \cos^2(x) = \frac{1}{10}$$

Cette fois $x \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$, donc $\cos(x) < 0$:

$$\cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{10}} = \boxed{-\frac{\sqrt{10}}{10}} \qquad \text{puis} \qquad \sin(x) = (-3) \times \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = \boxed{\frac{3\sqrt{10}}{10}}$$

On contrôle la cohérence : dans le 2e quadrant, le cosinus doit bien être négatif et le sinus positif.

EXERCICE 14 ⋆

Soit x un réel quelconque. On développe à chaque fois, puis on utilise la relation fondamentale $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

1.

$$\begin{aligned}(\cos(x) + \sin(x))^2 + (\cos(x) - \sin(x))^2 &= \cos^2(x) + 2\cos(x)\sin(x) + \sin^2(x) \\ &\quad + \cos^2(x) - 2\cos(x)\sin(x) + \sin^2(x) \\ &= 2\cos^2(x) + 2\sin^2(x) \\ &= 2\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right) = \boxed{2}\end{aligned}$$

Les doubles produits, de signes contraires, se sont éliminés.

2. Cette fois ce sont les carrés qui s'éliminent :

$$\begin{aligned}(\cos(x) + \sin(x))^2 - (\cos(x) - \sin(x))^2 &= \left(\cos^2(x) + 2\cos(x)\sin(x) + \sin^2(x)\right) \\ &\quad - \left(\cos^2(x) - 2\cos(x)\sin(x) + \sin^2(x)\right) \\ &= 2\cos(x)\sin(x) + 2\cos(x)\sin(x) = \boxed{4\cos(x)\sin(x)}\end{aligned}$$

Attention au signe $-$ devant la seconde parenthèse : il change le signe de *tous* ses termes.

3. On reconnaît une différence de deux carrés :

$$(1 - \cos(x))(1 + \cos(x)) = 1 - \cos^2(x) = \boxed{\sin^2(x)}$$

4. On fait apparaître le carré de la somme $\cos^2(x) + \sin^2(x)$:

$$\begin{aligned}\cos^4(x) + \sin^4(x) &= \left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)^2 - 2\cos^2(x)\sin^2(x) \\ &= 1^2 - 2\cos^2(x)\sin^2(x) = \boxed{1 - 2\cos^2(x)\sin^2(x)}\end{aligned}$$

Application. On suppose désormais $\cos(x) + \sin(x) = \dfrac{1}{2}$.

5. D'après la question 1, la somme des deux carrés vaut 2, donc :

$$(\cos(x) - \sin(x))^2 = 2 - (\cos(x) + \sin(x))^2 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{7}{4}}$$

6. D'après la question 2 :

$$4\cos(x)\sin(x) = (\cos(x) + \sin(x))^2 - (\cos(x) - \sin(x))^2 = \frac{1}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\cos(x)\sin(x) = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \boxed{-\frac{3}{8}}$$

Ce résultat est cohérent : le produit étant négatif, le cosinus et le sinus de x sont de signes contraires.

EXERCICE 15 ⋆⋆

a) On reconnaît une différence de deux carrés :

$$A(x) = \cos^4(x) - \sin^4(x) = \left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right)\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right) = \boxed{\cos^2(x) - \sin^2(x)}$$

et l'on peut encore écrire, en remplaçant $\sin^2(x)$ par $1 - \cos^2(x)$: $A(x) = 2\cos^2(x) - 1$.

b) On reconnaît cette fois le développement d'un carré :

$$B(x) = \cos^4(x) + 2\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4(x) = \left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)^2 = 1^2 = \boxed{1}$$

c)

$$C(x) = 3\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right) - 2 = 3 \times 1 - 2 = \boxed{1}$$

d) On développe les deux carrés :

$$\begin{aligned} D(x) &= 4\cos^2(x) + 4\cos(x)\sin(x) + \sin^2(x) + \cos^2(x) - 4\cos(x)\sin(x) + 4\sin^2(x) \\ &= 5\cos^2(x) + 5\sin^2(x) = 5\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right) = \boxed{5} \end{aligned}$$

e) On factorise les deux premiers termes par $\cos^2(x)$:

$$E(x) = \cos^2(x)\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right) + \sin^2(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x) = \boxed{1}$$

f) Le numérateur vaut $1 - \cos^2(x) = (1 - \cos(x))(1 + \cos(x))$, ce qui permet de simplifier par $1 + \cos(x)$, non nul par hypothèse :

$$F(x) = \frac{(1 - \cos(x))(1 + \cos(x))}{1 + \cos(x)} + \cos(x) = 1 - \cos(x) + \cos(x) = \boxed{1}$$

EXERCICE 16 ⋆

a) $\dfrac{2\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{3}$, on utilise donc la colonne « $\pi - x$ » :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

b) $\dfrac{3\pi}{4} = \pi - \dfrac{\pi}{4}$, même colonne :

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

c) $-\dfrac{5\pi}{6} = -\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right)$: il faut ici **deux** transformations successives, d'abord « $-x$ », puis « $\pi - x$ ».

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

d) $\dfrac{7\pi}{6} = \pi + \dfrac{\pi}{6}$, on utilise la colonne « $\pi + x$ » :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

e) $\dfrac{5\pi}{4} = \pi + \dfrac{\pi}{4}$, même colonne :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

f) $-\dfrac{\pi}{3}$ est déjà de la forme « $-x$ » :

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

g) $\dfrac{11\pi}{6} - 2\pi = -\dfrac{\pi}{6}$: on retire d'abord un tour, ce qui ramène à la forme « $-x$ ».

$$\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

h) $\dfrac{4\pi}{3} = \pi + \dfrac{\pi}{3}$, colonne « $\pi + x$ » :

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

On constate que c) et d) donnent le même résultat : c'est normal, puisque $-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{7\pi}{6}$, ces deux réels ont le même point image.

EXERCICE 17 ⋆

On utilise à chaque fois le tableau des angles associés. Les termes se regroupent ensuite.

1. $\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\cos(-x) = \cos(x)$, donc :

$$\sin(-x) + \cos(-x) = -\sin(x) + \cos(x) = \boxed{\cos(x) - \sin(x)}$$

2. $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$, donc :

$$\sin(-x) - \sin(\pi + x) = -\sin(x) - (-\sin(x)) = -\sin(x) + \sin(x) = \boxed{0}$$

3. On remarque que $3\pi + x = (\pi + x) + 2\pi$, donc $\cos(3\pi + x) = \cos(\pi + x) = -\cos(x)$:

$$\cos(\pi - x) + \cos(3\pi + x) = -\cos(x) - \cos(x) = \boxed{-2\cos(x)}$$

4. On traite les trois termes séparément. D'abord $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ (exercice 18). Ensuite, la fonction cosinus étant inchangée par $u \mapsto -u$:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$

Enfin $\sin(\pi - x) = \sin(x)$. En rassemblant :

$$\cos(x) - 3 \times (-\sin(x)) - 4\sin(x) = \cos(x) + 3\sin(x) - 4\sin(x) = \boxed{\cos(x) - \sin(x)}$$

5. $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ et $\cos(-x) = \cos(x)$:

$$-\cos(x) + \cos(x) + \cos(x) = \boxed{\cos(x)}$$

6. $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$:

$$2\sin(x) - 3 \times (-\sin(x)) + \sin(x) = 2\sin(x) + 3\sin(x) + \sin(x) = \boxed{6\sin(x)}$$

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. En suivant l'indication, on écrit $\dfrac{\pi}{2}+x=\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ et l'on applique la colonne « $\pi-x$ » du tableau, avec ici $\dfrac{\pi}{2}-x$ dans le rôle de x :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos\left(\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\boxed{-\sin(x)}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\boxed{\cos(x)}$$

la dernière égalité de chaque ligne provenant de la colonne « $\dfrac{\pi}{2}-x$ ».

2. Par définition de la tangente, et à condition que les dénominateurs soient non nuls :

$$\tan(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}=\boxed{-\tan(x)}$$

$$\tan(\pi+x)=\frac{\sin(\pi+x)}{\cos(\pi+x)}=\frac{-\sin(x)}{-\cos(x)}=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\boxed{\tan(x)}$$

Les deux signes « moins » se compensent dans le second calcul : la tangente est donc inchangée par un demi-tour, alors que le cosinus et le sinus changent tous deux de signe.

3. Il faut que les deux membres existent, ce qui impose trois conditions :
   - $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)\neq 0$ pour le membre de gauche ;
   - $\cos(x)\neq 0$ pour que $\tan(x)$ existe ;
   - $\tan(x)\neq 0$, c'est-à-dire $\sin(x)\neq 0$, pour pouvoir écrire $\dfrac{1}{\tan(x)}$.

   Ces conditions reviennent à $\cos(x)\neq 0$ *et* $\sin(x)\neq 0$, soit :

$$\boxed{x\neq\frac{k\pi}{2}\quad\text{avec}\quad k\in\mathbb{Z}}$$

   Sous ces conditions, la démonstration est immédiate :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}=\frac{1}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}=\boxed{\frac{1}{\tan(x)}}$$

EXERCICE 19 ⋆⋆

a) $A(x)=-\sin(x)+\sin(x)=\boxed{0}$: expression **constante**.

b) $B(x)=\sin(x)-\sin(x)=\boxed{0}$: expression **constante**.

c) $\cos(\pi-x)=-\cos(x)$, dont le carré vaut $\cos^2(x)$ — le signe disparaît en élevant au carré. De même $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$:

$$C(x)=\cos^2(x)+\sin^2(x)=\boxed{1}\ :\ \text{expression } \textbf{constante}$$

d) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x)$ (exercice 18) et $\sin(\pi-x)=\sin(x)$:

$$D(x)=-\sin(x)+\sin(x)=\boxed{0}\ :\ \text{expression } \textbf{constante}$$

e) $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ et $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$:

$$\begin{aligned} E(x) &= \sin^2(x) + \cos^2(x) + \cos^2(x) \\ &= 1 + \cos^2(x) \end{aligned}$$

$\boxed{E(x) = 1 + \cos^2(x)}$: expression qui **dépend** de x

On le vérifie sur deux valeurs : $E(0) = 2$ alors que $E\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

f) $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$:

$$\begin{aligned} F(x) &= (-\cos(x)) \times \cos(x) - (-\sin(x)) \times \sin(x) \\ &= -\cos^2(x) + \sin^2(x) \end{aligned}$$

et, en remplaçant $\sin^2(x)$ par $1 - \cos^2(x)$:

$\boxed{F(x) = 1 - 2\cos^2(x)}$: expression qui **dépend** de x

Équations et inéquations trigonométriques

EXERCICE 20 ⋆

1. On utilise à chaque fois les deux règles de lecture du cercle, pour a réel donné :

$$\cos(X) = \cos(a) \iff X = a + 2k\pi \text{ ou } X = -a + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin(X) = \sin(a) \iff X = a + 2k\pi \text{ ou } X = \pi - a + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, donc :

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \left\{\pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$ $\boxed{S_{[-\pi;\pi]} = \left\{-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{4}\right\}}$

b) $\sin(x) = 0$ correspond aux points d'ordonnée nulle, c'est-à-dire aux deux points I et son opposé : les solutions se succèdent donc de π en π.

$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}}$ $\boxed{S_{[-\pi;\pi]} = \{-\pi\,;0\,;\pi\}}$

c) $2\sin(x) + \sqrt{3} = 0 \iff \sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$, donc :

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \left\{-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right\} \cup \left\{\dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi\right\}}$ $\boxed{S_{[-\pi;\pi]} = \left\{-\dfrac{2\pi}{3}\,;-\dfrac{\pi}{3}\right\}}$

car $\dfrac{4\pi}{3} - 2\pi = -\dfrac{2\pi}{3}$.

d) $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-1=0 \iff \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, donc :

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \text{ou} \quad x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$$

En retranchant $\dfrac{\pi}{4}$: $x=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{12}$ ou $x=\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{10\pi-3\pi}{12}=\dfrac{7\pi}{12}$.

$$\boxed{S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{12}+2k\pi\right\}\cup\left\{\frac{7\pi}{12}+2k\pi\right\}} \qquad \boxed{S_{[-\pi;\pi]}=\left\{-\frac{\pi}{12}\,;\frac{7\pi}{12}\right\}}$$

e) $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$:

$$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$$

$$2x=\frac{5\pi}{12}+2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x=\frac{13\pi}{12}+2k\pi$$

On divise ensuite **tout** par 2, y compris le terme $2k\pi$ — c'est le piège de l'exercice :

$$\boxed{S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{5\pi}{24}+k\pi\right\}\cup\left\{\frac{13\pi}{24}+k\pi\right\}}$$

Les solutions se succèdent donc de π en π, et non de 2π en 2π : l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ en contient quatre.

$$\boxed{S_{[-\pi;\pi]}=\left\{-\frac{19\pi}{24}\,;-\frac{11\pi}{24}\,;\frac{5\pi}{24}\,;\frac{13\pi}{24}\right\}}$$

f) $1-\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)=0 \iff \cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, donc :

$$\frac{\pi}{3}-x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{3}-x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$$

d'où $x=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{12}$ ou $x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7\pi}{12}$ (le signe de $2k\pi$ est sans importance, k décrivant $\mathbb{Z}$).

$$\boxed{S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{12}+2k\pi\right\}\cup\left\{\frac{7\pi}{12}+2k\pi\right\}} \qquad \boxed{S_{[-\pi;\pi]}=\left\{\frac{\pi}{12}\,;\frac{7\pi}{12}\right\}}$$

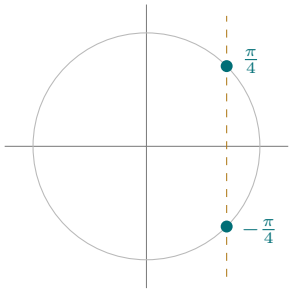
g) $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$:

$$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

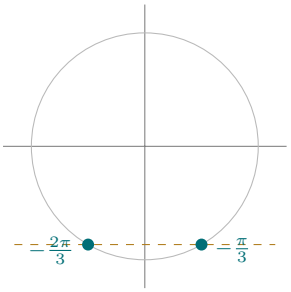
$$2x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x=2k\pi$$

$$\boxed{S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi\right\}\cup\{k\pi\}} \qquad \boxed{S_{[-\pi;\pi]}=\left\{-\pi\,;-\frac{2\pi}{3}\,;0\,;\frac{\pi}{3}\,;\pi\right\}}$$

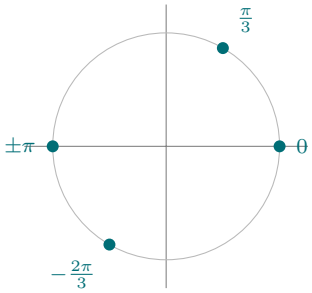
2. Voici les trois figures demandées.



équation a)



équation c)



équation g)

La figure sert de contrôle. Pour a), résoudre $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ revient à couper le cercle par la droite verticale d'équation $X = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: elle le coupe en **exactement deux points**, symétriques par rapport à l'axe des abscisses. De même en c), la droite *horizontale* d'ordonnée $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ fournit deux points symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Une équation en $\cos(x)$ ou $\sin(x)$ dont le second membre est strictement compris entre -1 et 1 admet donc toujours deux solutions par tour.

Le cas g) est différent : la présence de $2x$ double le nombre de solutions par tour, et l'on attend donc quatre points. On n'en compte pourtant que **quatre points pour cinq solutions** : c'est que $-\pi$ et π, tous deux solutions, ont le *même* point image. C'est exactement ce que la figure permet de repérer.

EXERCICE 21 ⋆⋆

Chaque énoncé se ramène d'abord à une équation ou une inéquation de la forme $\cos(x) = k$, $\sin(x) = k$, $\cos(x) \geqslant k\ldots$

a) $2\cos(x) + 3 = 4 \iff 2\cos(x) = 1 \iff \cos(x) = \dfrac{1}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$:

$$\boxed{S = \left\{-\frac{\pi}{3}\,;\frac{\pi}{3}\right\}}$$

b) $3\sin(x) = 2\sqrt{3} - \sin(x) \iff 4\sin(x) = 2\sqrt{3} \iff \sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, d'où $x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$:

$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{3}\,;\frac{2\pi}{3}\right\}}$$

c) $\cos(x) \geqslant \sqrt{2} - \cos(x) \iff 2\cos(x) \geqslant \sqrt{2} \iff \cos(x) \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Sur le cercle, les points d'abscisse supérieure ou égale à $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ forment l'arc compris entre $-\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4}$:

$$\boxed{S = \left[-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right]}$$

d) $-2\sin(x) > \sin(x) - \dfrac{3}{2} \iff -3\sin(x) > -\dfrac{3}{2}$. En divisant par -3, **le sens de l'inégalité change** :

$$\sin(x) < \frac{1}{2}$$

Les points d'ordonnée strictement inférieure à $\frac{1}{2}$ sont ceux situés *en dehors* de l'arc joignant $\frac{\pi}{6}$ à $\frac{5\pi}{6}$:

$$\boxed{S = \left[-\pi\,;\frac{\pi}{6}\right[\,\cup\, \left]\frac{5\pi}{6}\,;\pi\right]}$$

e) $6\cos(x) + 3\sqrt{3} - 3 < -3 \iff 6\cos(x) < -3\sqrt{3} \iff \cos(x) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les points d'abscisse strictement inférieure à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ entourent le point π :

$$\boxed{S = \left[-\pi\,;-\frac{5\pi}{6}\right[\,\cup\, \left]\frac{5\pi}{6}\,;\pi\right]}$$

f) On multiplie les deux membres par 6 :

$$\frac{4\cos(x)}{3} = \frac{2\cos(x) - 3\sqrt{2}}{6} \iff 8\cos(x) = 2\cos(x) - 3\sqrt{2} \iff 6\cos(x) = -3\sqrt{2}$$

d'où $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$:

$$\boxed{S = \left\{-\frac{3\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\right\}}$$

g) On développe les deux membres :

$$\cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 = \frac{1}{4} - \cos(x) + \cos^2(x) + \frac{1}{4}$$

Les termes en $\cos^2(x)$ se simplifient — c'est tout l'intérêt de l'énoncé :

$$-2\cos(x) + 1 = -\cos(x) + \frac{1}{2} \iff -\cos(x) = -\frac{1}{2} \iff \cos(x) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{S = \left\{-\frac{\pi}{3}\,;\frac{\pi}{3}\right\}}$$

h) En remarquant que $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, l'équation $\left(\cos(x) - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2$ équivaut à :

$$\cos(x) - \frac{3\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad \cos(x) - \frac{3\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

soit $\cos(x) = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}54$, à rejeter car strictement supérieur à 1, ou bien $\cos(x) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\boxed{S = \left\{-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right\}}$$

i) On remplace $\cos^2(x)$ par $1 - \sin^2(x)$ pour n'avoir qu'une seule fonction trigonométrique :

$$-\left(1 - \sin^2(x)\right) - 2\sin(x) + 2 = 0 \iff \sin^2(x) - 2\sin(x) + 1 = 0 \iff (\sin(x) - 1)^2 = 0$$

d'où $\sin(x) = 1$, qui n'admet qu'un seul point image sur le cercle :

$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}}$$

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. (a) $X = \cos(x)$ est l'abscisse d'un point du cercle de centre O et de rayon 1 : elle est donc nécessairement comprise entre -1 et 1, soit $\boxed{X \in [-1\,;1]}$.

   (b) Le discriminant du trinôme $4X^2 + 2(\sqrt{2}-1)X - \sqrt{2}$ vaut :

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(2(\sqrt{2}-1)\right)^2 - 4\times 4\times(-\sqrt{2}) \\ &= 4\left(2-2\sqrt{2}+1\right) + 16\sqrt{2} \\ &= 12 - 8\sqrt{2} + 16\sqrt{2} = 12 + 8\sqrt{2}\end{aligned}$$

   On constate que ce nombre est un carré parfait, car $(2+2\sqrt{2})^2 = 4+8\sqrt{2}+8 = 12+8\sqrt{2}$. Donc $\sqrt{\Delta} = 2+2\sqrt{2}$ et :

$$X_1 = \frac{-2(\sqrt{2}-1)+2+2\sqrt{2}}{8} = \frac{-2\sqrt{2}+2+2+2\sqrt{2}}{8} = \frac{4}{8} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$X_2 = \frac{-2(\sqrt{2}-1)-2-2\sqrt{2}}{8} = \frac{-2\sqrt{2}+2-2-2\sqrt{2}}{8} = \frac{-4\sqrt{2}}{8} = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

   Ces deux valeurs appartiennent bien à $[-1\,;1]$: elles sont donc toutes deux exploitables.

   (c) $f(x) = 0$ équivaut à $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ ou $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Sur $]-\pi\,;\pi]$, la première donne $\pm\dfrac{\pi}{3}$ et la seconde $\pm\dfrac{3\pi}{4}$:

$$\boxed{S = \left\{-\frac{3\pi}{4}\,;-\frac{\pi}{3}\,;\frac{\pi}{3}\,;\frac{3\pi}{4}\right\}}$$

2. (a) Le coefficient de X^2 étant positif, le trinôme est strictement positif **à l'extérieur** de ses racines, c'est-à-dire pour $X < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $X > \dfrac{1}{2}$. En intersectant avec $[-1\,;1]$:

$$\boxed{S_X = \left[-1\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}\,;1\right]}$$

   (b) Il reste à traduire ces deux conditions sur x.

   D'une part $\cos(x) < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$: sur $]-\pi\,;\pi]$, cela correspond aux points entourant π, soit $x \in \left]-\pi\,;-\dfrac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{4}\,;\pi\right]$. On prendra garde à ce que π soit *inclus* ($\cos(\pi) = -1$ convient) mais que $-\pi$ soit exclu, car il n'appartient pas à l'ensemble de définition.

   D'autre part $\cos(x) > \dfrac{1}{2}$ correspond à l'arc entourant 0, soit $x \in \left]-\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{\pi}{3}\right[$. Finalement :

$$\boxed{S = \left]-\pi\,;-\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{3}\,;\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}\,;\pi\right]}$$

EXERCICE 23 ⋆

Le carré est orienté dans le sens direct, c'est-à-dire le sens inverse des aiguilles d'une montre. L'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ vaut donc $+\frac{\pi}{2}$, et non $-\frac{\pi}{2}$. Toutes les mesures se lisent alors sur la figure, les diagonales étant les bissectrices des angles du carré.

a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ portent deux côtés consécutifs, dans le sens direct :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

b) $[AC]$ est la diagonale issue de A, donc la bissectrice de l'angle précédent :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

c) Par la relation de Chasles, $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$:

$$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

d) $\overrightarrow{CD}$ est le vecteur *opposé* de $\overrightarrow{AB}$:

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \boxed{\pi}$$

e) $\overrightarrow{DB}$ est dirigé vers le bas et vers la droite, à $-\frac{\pi}{4}$ de $\overrightarrow{AB}$:

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DB}\right) = \boxed{-\frac{\pi}{4}}$$

f) $[BD]$ est la diagonale issue de B :

$$\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

g) $[CA]$ est la diagonale issue de C :

$$\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

h) $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont deux vecteurs opposés :

$$\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}\right) = \boxed{\pi}$$

On remarque en h) que $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont même direction et même norme mais des sens contraires : c'est bien un angle plat, dont l'unique mesure principale est π (et non $-\pi$, exclu de $]-\pi\,;\pi]$).

EXERCICE 24 ⋆

1. La relation de Chasles donne directement :

$$(\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{6} = \boxed{\frac{5\pi}{6}}$$

Les trois autres s'obtiennent en changeant l'ordre des vecteurs, ce qui change le signe :

$$(\vec{w}, \vec{u}) = \boxed{-\frac{5\pi}{6}} \qquad (\vec{v}, \vec{u}) = \boxed{-\frac{\pi}{6}} \qquad (\vec{w}, \vec{v}) = \boxed{-\frac{2\pi}{3}}$$

Ces quatre mesures appartiennent bien à $]-\pi\,;\pi]$.

2. Ici c'est $(\vec{v}, \vec{w})$ qui est cherché : on passe par $\vec{u}$.

$$(\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{w}) = -(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}, \vec{w}) = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

Ce résultat n'appartient pas à $]-\pi\,;\pi]$: on retranche un tour.

$$\frac{5\pi}{4} - 2\pi = \boxed{-\frac{3\pi}{4}}$$

3. Puisque $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = -(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$:

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = \frac{5\pi}{7} - \frac{5\pi}{7} = \boxed{0}$$

On l'interprète ainsi : **aller de $\overrightarrow{u}$ à $\overrightarrow{v}$, puis revenir de $\overrightarrow{v}$ à $\overrightarrow{u}$, ramène à la direction de départ**. C'est d'ailleurs le cas particulier de la relation de Chasles avec $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}$, puisque $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = 0$.

EXERCICE 25 ⋆⋆

1. Les six rayons partagent le tour complet en six angles égaux, chacun de mesure $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. En parcourant dans le sens direct :

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \boxed{\frac{\pi}{3}} \qquad \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) = \boxed{\frac{2\pi}{3}} \qquad \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}\right) = \boxed{\pi}$$

Pour le dernier, le parcours direct donne $\frac{4\pi}{3}$, qui dépasse π : on retranche un tour.

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}\right) = \frac{4\pi}{3} - 2\pi = \boxed{-\frac{2\pi}{3}}$$

2. En décomposant le trajet de $\overrightarrow{OA}$ à $\overrightarrow{OD}$ en trois étapes :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}\right) &= \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right) \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \boxed{\pi}\end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat précédent : A, O et D sont alignés, $[AD]$ étant un diamètre du cercle circonscrit.

3. Le triangle OAB est isocèle en O avec un angle au sommet de $\frac{\pi}{3}$: il est donc équilatéral, et l'angle $\widehat{OAB}$ mesure $\frac{\pi}{3}$. Il en va de même pour $\widehat{OAF}$, d'où :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right) + \left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AF}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$$

On retrouve ainsi que **chaque angle intérieur d'un hexagone régulier mesure** $\frac{2\pi}{3}$, c'est-à-dire 120°.

4. Le côté $[ED]$ se déduit du côté $[AB]$ par la symétrie de centre O, qui envoie A sur D et B sur E. Une symétrie centrale transformant tout vecteur en son opposé, elle envoie $\overrightarrow{AB}$ sur $\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{AB}$, et donc $\overrightarrow{ED} = -\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB}$. Les deux vecteurs sont égaux :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}\right) = \boxed{0}$$

Un angle nul signifie que les deux vecteurs ont même direction *et* même sens. On en déduit donc que $\boxed{(AB) \text{ et } (ED) \text{ sont parallèles}}$; plus précisément, $ABDE$ est un parallélogramme.

Exercices de synthèse

EXERCICE 26 : QCM ⋆

Question	Réponse	Justification
1	**B**	$\frac{47\pi}{6} - 4\times 2\pi = \frac{47\pi - 48\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$. La réponse A, $\frac{11\pi}{6}$, est bien une mesure de cet angle, mais elle n'appartient pas à $]-\pi\,;\pi]$.
2	**C**	$\frac{210\pi}{180} = \frac{7\pi}{6}$.
3	**A**	$\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, donc $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.
4	**B**	$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.
5	**B**	$\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$: le cosinus et le sinus valent tous deux $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, et leur quotient vaut 1.
6	**A**	$\sin^2(x) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ donc $\sin(x) = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$; le point image étant dans le 2e quadrant, son ordonnée est positive. La réponse C confond $\sin(x)$ et $\sin^2(x)$.
7	**C**	Colonne « $\pi + x$ » du tableau des angles associés.
8	**A**	$\frac{3}{2} > 1$, or le cosinus d'un réel est toujours compris entre -1 et 1.
9	**C**	$\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ donne $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. La réponse B est le piège du cosinus : pour un sinus, les deux points sont symétriques par rapport à l'axe des *ordonnées*.
10	**B**	Chasles donne $(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi + 5\pi}{15} = \frac{8\pi}{15}$, et l'angle cherché en est l'opposé.

EXERCICE 27 : VRAI OU FAUX ⋆⋆

1. **Fausse**. Il suffit d'un contre-exemple :
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \neq 1$$
On prendra garde à ne pas choisir $x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{2}$, pour lesquels l'égalité est justement vérifiée : ce ne sont pas des contre-exemples.

2. **Vraie**. La conversion donne :
$$1 \text{ rad} = \frac{180 \times 1}{\pi} = \frac{180}{\pi} \approx 57{,}30° \ > \ 57°$$

3. **Vraie**. Le réel $x = \frac{\pi}{4}$ convient, puisque $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Géométriquement, son point image est sur la bissectrice du premier quadrant, où abscisse et ordonnée sont égales.

4. **Vraie**. On calcule la différence des deux réels :
$$\frac{7\pi}{3} - \left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{12\pi}{3} = 4\pi = 2 \times 2\pi$$
Cette différence est un multiple entier de 2π : les deux réels ont donc bien le même point image.

5. **Fausse.** La mesure principale appartient par définition à $]-\pi\,;\pi]$. Par exemple, la mesure principale de $\dfrac{3\pi}{2}$ est $-\dfrac{\pi}{2}$, qui n'appartient pas à $[0\,;2\pi[$.

6. **Fausse.** La bonne formule est $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$. Contre-exemple avec $x=0$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \qquad \text{alors que} \qquad \cos(0)=1$$

7. **Fausse.** L'équation $\sin(x)=\dfrac{1}{2}$ admet deux points images sur le cercle, et donc une infinité de solutions. Le réel $x=\dfrac{5\pi}{6}$ en est une autre, puisque $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$.

8. **Vraie.** On reconnaît l'identité remarquable :

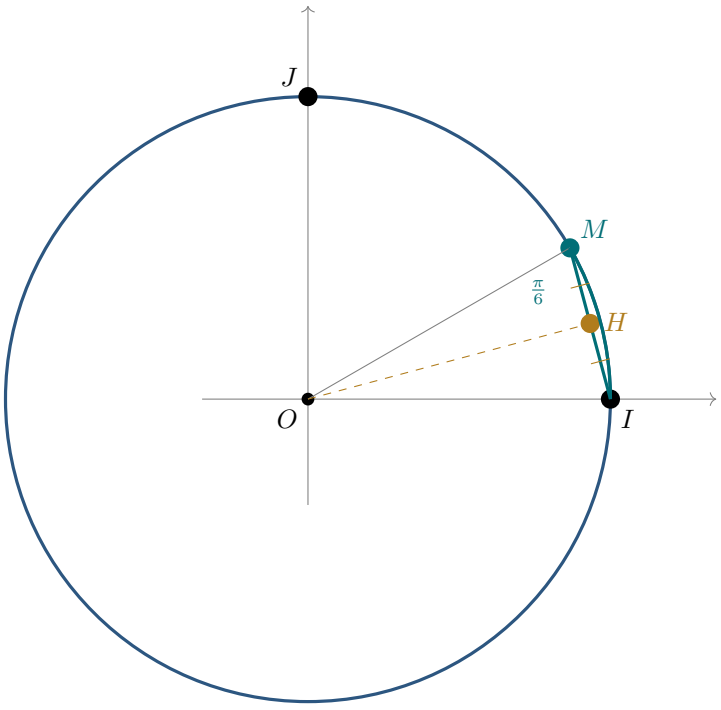
$$\cos^4(x)+2\cos^2(x)\sin^2(x)+\sin^4(x)=\left(\cos^2(x)+\sin^2(x)\right)^2=1^2=1$$

9. **Fausse.** La proposition 4 du cours affirme au contraire que $(\vec{u},\vec{v})=-(\vec{v},\vec{u})$. Contre-exemple : si $(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\pi}{2}$, alors $(\vec{v},\vec{u})=-\dfrac{\pi}{2}$, qui en diffère. L'égalité n'a lieu que lorsque l'angle vaut 0 ou π.

10. **Vraie.** Si $x\in\left]\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right[$, le point image est dans le 2e quadrant : son abscisse $\cos(x)$ est strictement négative et son ordonnée $\sin(x)$ strictement positive. Le quotient $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est donc strictement négatif.

EXERCICE 28 : CALCUL DE $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ET $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ⋆⋆

1. Voici la figure, complétée du point H utilisé à la question 4.



2. Par définition, le point image d'un réel x a pour coordonnées $(\cos(x)\,;\sin(x))$. Ici $x=\dfrac{\pi}{6}$, d'où :

$$\boxed{M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{1}{2}\right)}$$

3. Le repère étant orthonormé, on peut appliquer la formule de la distance avec $I(1\,;0)$:

$$\begin{aligned} IM &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+1-\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\boxed{IM=\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

On vérifie au passage que $2-\sqrt{3}\approx 0{,}27$ est bien positif.

4. (a) Le triangle OIM est **isocèle en** O, car $OI = OM = 1$ (rayons du cercle). Le projeté orthogonal H de O sur (IM) est donc le pied de la hauteur issue du sommet principal : c'est aussi le **milieu** de $[IM]$, et (OH) est la bissectrice de l'angle $\widehat{IOM}$. On en déduit :

$$\widehat{IOH}=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$$

Le triangle OHI étant rectangle en H, la trigonométrie du triangle rectangle donne :

$$\sin\left(\widehat{IOH}\right)=\frac{IH}{OI}=\frac{IH}{1}=IH \qquad \text{d'où} \qquad IH=\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Comme H est le milieu de $[IM]$, on obtient enfin :

$$\boxed{IM=2\,IH=2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

(b) En rapprochant les questions 3 et 4a :

$$2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2-\sqrt{3}} \qquad \text{d'où} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Vérifions à présent l'égalité proposée :

$$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{6-2\sqrt{6}\sqrt{2}+2}{16}=\frac{8-2\sqrt{12}}{16}=\frac{8-4\sqrt{3}}{16}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

Les deux nombres $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ sont positifs et ont le même carré $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$: ils sont donc égaux.

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

(c) La relation fondamentale donne :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)=1-\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)=1-\frac{2-\sqrt{3}}{4}=\frac{4-2+\sqrt{3}}{4}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

Or, par le même calcul qu'en 4b :

$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{6+2\sqrt{12}+2}{16}=\frac{8+4\sqrt{3}}{16}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

Comme $\frac{\pi}{12}$ appartient à $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, son cosinus est positif :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

5. Chacun de ces quatre réels s'écrit à l'aide de $\dfrac{\pi}{12}$:

$$\frac{11\pi}{12} = \pi - \frac{\pi}{12} \quad ; \quad \frac{13\pi}{12} = \pi + \frac{\pi}{12} \quad ; \quad \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \quad ; \quad \frac{7\pi}{12} = \pi - \frac{5\pi}{12}$$

Le tableau des angles associés donne alors :

	cos	sin
$\dfrac{11\pi}{12}$	$-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
$\dfrac{13\pi}{12}$	$-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
$\dfrac{5\pi}{12}$	$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$\dfrac{7\pi}{12}$	$-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Pour $\dfrac{5\pi}{12}$, la colonne « $\dfrac{\pi}{2} - x$ » échange le cosinus et le sinus : c'est ce qui explique que les deux valeurs soient permutées par rapport à celles de $\dfrac{\pi}{12}$.

6. Par définition de la tangente :

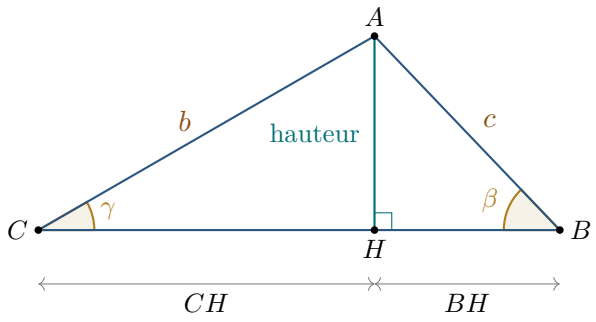
$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

On rend le dénominateur rationnel en multipliant haut et bas par $\sqrt{6}-\sqrt{2}$:

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)} = \frac{8-4\sqrt{3}}{6-2} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = \boxed{2-\sqrt{3}}$$

EXERCICE 29 : LA RELATION D'AL-KASHI ⋆⋆

1. La hauteur issue de A coupe perpendiculairement (BC) en H. Les angles β et γ étant aigus, le point H appartient bien au *segment* $[BC]$.



2. (a) Le triangle ABH est rectangle en H. Dans ce triangle, l'angle en B vaut β, le côté opposé est $[AH]$ et l'hypoténuse est $[AB]$, de longueur c. Donc :

$$\sin(\beta) = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{c} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{AH = c\sin(\beta)}$$

(b) L'aire d'un triangle vaut la moitié du produit d'un côté par la hauteur associée. En prenant $[BC]$ comme base, de longueur a, et AH comme hauteur :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times a \times c\sin(\beta) = \boxed{\frac{1}{2}ac\sin(\beta)}$$

(c) On procède de la même manière avec les hauteurs issues de B puis de C, ce qui fait intervenir les deux autres angles :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha)$$

Ces trois expressions désignent la même aire, donc :

$$\frac{1}{2}ac\sin(\beta) = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha)$$

Il suffit alors de diviser les trois membres par $\frac{1}{2}abc$, qui est non nul puisque le triangle n'est pas plat :

$$\boxed{\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}}$$

3. (a) Toujours dans le triangle ABH rectangle en H, le côté adjacent à β est $[BH]$:

$$\cos(\beta) = \frac{BH}{AB} = \frac{BH}{c} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{BH = c\cos(\beta)}$$

Comme H appartient au segment $[BC]$, on a $CH = BC - BH$, soit :

$$\boxed{CH = a - c\cos(\beta)}$$

(b) Le triangle AHC est rectangle en H, d'hypoténuse $[AC]$ de longueur b :

$$\boxed{AC^2 = AH^2 + CH^2} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad b^2 = AH^2 + CH^2$$

(c) On remplace AH et CH par les expressions obtenues :

$$\begin{aligned} b^2 &= (c\sin(\beta))^2 + (a - c\cos(\beta))^2 \\ &= c^2\sin^2(\beta) + a^2 - 2ac\cos(\beta) + c^2\cos^2(\beta) \\ &= c^2\underbrace{\left(\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta)\right)}_{=1} + a^2 - 2ac\cos(\beta) \end{aligned}$$

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)}$$

C'est la relation fondamentale du chapitre qui fait disparaître d'un coup les deux termes en c^2.

4. On connaît $a = 8$, $c = 3$ et l'angle $\alpha = \widehat{BAC} = 83°$. La formule d'Al-Kashi, écrite cette fois *relativement au sommet* A, s'écrit :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

soit, en remplaçant :

$$64 = b^2 + 9 - 6b\cos(83°) \iff b^2 - 6\cos(83°)\,b - 55 = 0$$

C'est une équation du second degré en b, avec $6\cos(83°) \approx 0{,}7312$:

$$\Delta \approx 0{,}7312^2 + 4 \times 55 \approx 220{,}53 \qquad \text{d'où} \qquad \sqrt{\Delta} \approx 14{,}850$$

$$b \approx \frac{0{,}7312 + 14{,}850}{2} \approx 7{,}79 \qquad \text{(la seconde racine est négative, donc rejetée)}$$

$$\boxed{AC \approx 7{,}79}$$

On détermine ensuite les angles par la loi des sinus :

$$\frac{\sin(\gamma)}{c} = \frac{\sin(\alpha)}{a} \quad \Longrightarrow \quad \sin(\gamma) = \frac{3\sin(83°)}{8} \approx 0{,}3722$$

Le côté $a = 8$ étant le plus grand, l'angle α est le plus grand du triangle : γ est donc aigu, et la calculatrice donne directement :

$$\boxed{\widehat{ACB} \approx 21{,}9°}$$

Enfin, la somme des angles d'un triangle vaut 180° :

$$\widehat{ABC} \approx 180 - 83 - 21{,}9 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\widehat{ABC} \approx 75{,}1°}$$

5. Si $\beta = \dfrac{\pi}{2}$, alors $\cos(\beta) = 0$ et le dernier terme disparaît :

$$b^2 = a^2 + c^2$$

On retrouve exactement le **théorème de Pythagore** dans le triangle ABC rectangle en B, l'hypoténuse étant alors $[AC]$. C'est ce qui justifie le nom de « théorème de Pythagore généralisé » : le terme $-2ac\cos(\beta)$ mesure précisément *l'écart à l'angle droit*. Il est négatif si β est aigu (et alors $b^2 < a^2 + c^2$), positif si β est obtus.

EXERCICE 30 : APPROXIMATION DE π PAR LA MÉTHODE D'ARCHIMÈDE ⋆⋆⋆

1. Pour $n = 1$, les deux polygones ont $3 \times 2^1 = 6$ côtés : ce sont des hexagones réguliers.

   Pour P_1, chacun des six triangles formés par le centre et un côté est isocèle avec un angle au sommet de $\dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$: il est donc **équilatéral**, et chaque côté mesure 1, comme le rayon. Le périmètre vaut 6, donc :

   $$\boxed{p_1 = \frac{6}{2} = 3}$$

   Pour Q_1, chaque côté est tangent au cercle en son milieu, à la distance 1 du centre. La demi-longueur d'un côté vaut $\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, donc un côté mesure $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ et le périmètre $6 \times \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$:

   $$\boxed{q_1 = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}}$$

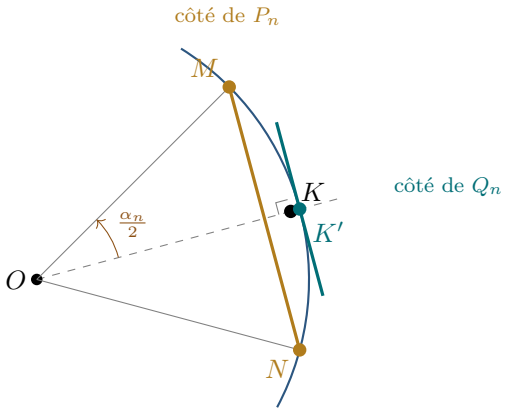
   On en déduit le premier encadrement :

   $$\boxed{3 < \pi < 2\sqrt{3} \approx 3{,}464}$$

2. (a) Les 3×2^n côtés de P_n interceptent des angles au centre égaux, dont la somme est un tour complet. Donc :

   $$\boxed{\alpha_n = \frac{2\pi}{3 \times 2^n}}$$

(b) Notons $[MN]$ un côté de P_n et K le milieu de $[MN]$. Le triangle OMN est isocèle en O (avec $OM = ON = 1$), donc (OK) en est à la fois la hauteur et la bissectrice :



Dans le triangle OKM, rectangle en K :

$$\sin\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) = \frac{MK}{OM} = MK \qquad \text{donc} \qquad MN = 2MK = 2\sin\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)$$

Or $\dfrac{\alpha_n}{2} = \dfrac{\pi}{3\times 2^n}$. Le périmètre de P_n est la somme de ses 3×2^n côtés, et p_n en est la moitié :

$$p_n = \frac{1}{2}\times 3\times 2^n \times 2\sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) = \boxed{3\times 2^n \sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right)}$$

Le côté correspondant de Q_n est porté par la tangente au cercle en K', point du cercle situé sur (OK), et il est vu du centre sous le même angle α_n. La demi-longueur de ce côté est le côté opposé à l'angle $\dfrac{\alpha_n}{2}$ dans un triangle rectangle dont le côté adjacent vaut $OK' = 1$:

$$\tan\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) = \frac{\text{demi-côté}}{1}$$

d'où, par le même décompte :

$$q_n = \frac{1}{2}\times 3\times 2^n \times 2\tan\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) = \boxed{3\times 2^n \tan\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right)}$$

(c) Pour $n = 1$, $3\times 2^1 = 6$ et $\dfrac{\pi}{6}$:

$$p_1 = 6\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6\times\frac{1}{2} = 3 \qquad ; \qquad q_1 = 6\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6\times\frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

On retrouve bien les valeurs de la question 1.

3. (a) Posons $N = 3\times 2^n$, de sorte que $\beta_n = \dfrac{\pi}{2N}$ et $\dfrac{\pi}{N} = 2\beta_n$. Alors :

$$\boxed{p_n = N\sin(2\beta_n) \quad ; \quad q_n = N\tan(2\beta_n)}$$

Au rang suivant, le nombre de côtés double : $3\times 2^{n+1} = 2N$, et l'angle correspondant est $\dfrac{\pi}{2N} = \beta_n$, d'où :

$$\boxed{p_{n+1} = 2N\sin(\beta_n) \quad ; \quad q_{n+1} = 2N\tan(\beta_n)}$$

(b) Écrivons β au lieu de β_n pour alléger. D'une part :

$$\frac{1}{q_{n+1}} = \frac{1}{2N\tan(\beta)} = \frac{\cos(\beta)}{2N\sin(\beta)}$$

D'autre part, en utilisant $\sin(2\beta) = 2\sin(\beta)\cos(\beta)$ puis $1+\cos(2\beta) = 2\cos^2(\beta)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_n}+\frac{1}{q_n}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N\sin(2\beta)}+\frac{\cos(2\beta)}{N\sin(2\beta)}\right) = \frac{1+\cos(2\beta)}{2N\sin(2\beta)} \\ &= \frac{2\cos^2(\beta)}{2N\times 2\sin(\beta)\cos(\beta)} = \frac{\cos(\beta)}{2N\sin(\beta)}\end{aligned}$$

Les deux quantités sont égales, ce qui démontre la première relation :

$$\boxed{\frac{1}{q_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_n}+\frac{1}{q_n}\right)}$$

Pour la seconde, on calcule le produit $p_n\, q_{n+1}$:

$$p_n\, q_{n+1} = N\sin(2\beta)\times 2N\tan(\beta) = N\times 2\sin(\beta)\cos(\beta)\times 2N\times\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} = 4N^2\sin^2(\beta)$$

Or $p_{n+1}^2 = (2N\sin(\beta))^2 = 4N^2\sin^2(\beta)$. Ces deux nombres ont donc le même carré, et p_{n+1} étant positif :

$$\boxed{p_{n+1} = \sqrt{p_n\, q_{n+1}}}$$

On remarque au passage la structure du procédé : q_{n+1} est la *moyenne harmonique* de p_n et q_n, et p_{n+1} la *moyenne géométrique* de p_n et q_{n+1}.

(c) Avec $p_1 = 3$ et $q_1 = 2\sqrt{3}$:

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{12}$$

$$q_2 = \frac{12}{2+\sqrt{3}} \approx \boxed{3{,}215390}$$

puis :

$$p_2 = \sqrt{p_1 q_2} = \sqrt{3\times 3{,}215390} \approx \boxed{3{,}105829}$$

L'encadrement obtenu est donc $3{,}105829 < \pi < 3{,}215390$, d'amplitude :

$$q_2 - p_2 \approx \boxed{0{,}110}$$

Autrement dit, après deux étapes, on ne connaît encore π qu'à un dixième près : on peut seulement affirmer que $\pi \approx 3{,}1$.

(d) L'exercice 28 a donné $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}$. Or pour $n=2$, $3\times 2^2 = 12$ et $\frac{\pi}{3\times 2^2} = \frac{\pi}{12}$, donc :

$$p_2 = 12\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = 12\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \boxed{3\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}$$

$$q_2 = 12\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 12\left(2-\sqrt{3}\right) = \boxed{24-12\sqrt{3}}$$

On vérifie que $12\left(2-\sqrt{3}\right) = \frac{12}{2+\sqrt{3}}$, puisque $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right) = 4-3 = 1$.

4. (a) La boucle doit se poursuivre tant que l'amplitude $q - p$ reste supérieure à e. Quant aux deux affectations, la première relation donne $\dfrac{1}{q_{n+1}} = \dfrac{p+q}{2pq}$, donc $q_{n+1} = \dfrac{2pq}{p+q}$:

Entrée : un réel $e > 0$
$p \leftarrow 3$
$q \leftarrow 2\sqrt{3}$
$n \leftarrow 1$
Tant que $\boxed{q - p > e}$ **faire**
$q \leftarrow \boxed{\dfrac{2pq}{p+q}}$
$p \leftarrow \boxed{\sqrt{p\,q}}$
$n \leftarrow n + 1$
Fin Tant que
Sortie : n, p, q

L'ordre des deux affectations est essentiel : lorsqu'on calcule $p \leftarrow \sqrt{pq}$, la variable q contient déjà la *nouvelle* valeur q_{n+1}, conformément à la relation $p_{n+1} = \sqrt{p_n\, q_{n+1}}$. En les intervertissant, on calculerait $\sqrt{p_n q_n}$, qui n'est pas p_{n+1}.

(b) En itérant à la calculatrice ou au tableur, on obtient :

n	p_n	q_n	$q_n - p_n$
1	3,000000	3,464102	$4{,}6 \times 10^{-1}$
2	3,105829	3,215390	$1{,}1 \times 10^{-1}$
5	3,141032	3,142715	$1{,}7 \times 10^{-3}$
10	3,141592	3,141594	$1{,}6 \times 10^{-6}$
11	3,1415925	3,1415929	$4{,}1 \times 10^{-7}$

L'amplitude passe sous 10^{-6} au rang $\boxed{n = 11}$, et l'encadrement obtenu est :

$$\boxed{3{,}1415925 < \pi < 3{,}1415930}$$

On y lit six décimales exactes : $\pi \approx 3{,}141592$.

(c) En poursuivant, l'amplitude passe sous 10^{-9} au rang $n = 16$. Il faut donc, pour gagner trois décimales :

$$\boxed{\text{5 itérations supplémentaires}}$$

On observe en effet que l'amplitude est divisée par 4 environ à chaque étape, ce qui fait gagner $\log_{10}(4) \approx 0{,}6$ décimale par itération. Cet algorithme est donc **peu efficace** pour obtenir un grand nombre de décimales : atteindre les 100 premières décimales de π demanderait plus de 160 itérations, et donc des polygones à 3×2^{160} côtés. Les méthodes modernes, fondées sur des séries, convergent infiniment plus vite.

5. (a) On résout $3 \times 2^n = 96$, soit $2^n = 32 = 2^5$:

$$\boxed{n = 5}$$

(b) Le tableau de la question 4b donne :

$$\boxed{p_5 \approx 3{,}141032 \qquad ; \qquad q_5 \approx 3{,}142715}$$

tandis que l'encadrement d'Archimède vaut :

$$3+\frac{10}{71}\approx 3{,}140845 \qquad ; \qquad 3+\frac{1}{7}\approx 3{,}142857$$

On constate que $3+\dfrac{10}{71} < p_5$ et $q_5 < 3+\dfrac{1}{7}$: l'encadrement d'Archimède **contient** celui que fournissent ses propres polygones. Son amplitude vaut $2{,}0\times 10^{-3}$ contre $1{,}7\times 10^{-3}$ pour $[p_5\,;q_5]$:

$$\boxed{\text{l'encadrement } p_5<\pi<q_5 \text{ est le meilleur des deux}}$$

(c) Oui. À chaque étape, Archimède devait remplacer une racine carrée par une fraction, en arrondissant *par défaut* pour la borne inférieure et *par excès* pour la borne supérieure, afin de ne pas risquer de perdre l'encadrement. Chacun de ces arrondis élargit très légèrement l'intervalle, et ces pertes s'accumulent au fil des cinq étapes. L'écart constaté, de l'ordre de 2×10^{-4} sur chaque borne, est donc exactement le prix de cette prudence : la méthode d'Archimède est exacte, seuls ses calculs numériques sont approchés.