EXERCICES – CHAPITRE 6

TRIGONOMÉTRIE

Radians et cercle trigonométrique

EXERCICE 1 ⋆

Convertir en radians les mesures suivantes, données en degrés. On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible de π.

a) $10°$ c) $180°$ e) $72°$ g) $45°$ i) $270°$

b) $59°$ d) $18°$ f) $112{,}5°$ h) $150°$ j) $15°$

EXERCICE 2 ⋆

Convertir en degrés les mesures suivantes, données en radians.

a) $\dfrac{\pi}{3}$ c) π e) $\dfrac{3\pi}{8}$ g) $\dfrac{3\pi}{2}$ i) $\dfrac{11\pi}{6}$

b) $\dfrac{2\pi}{3}$ d) $\dfrac{5\pi}{4}$ f) $\dfrac{5\pi}{12}$ h) $\dfrac{7\pi}{10}$ j) $-\dfrac{5\pi}{6}$

EXERCICE 3 ⋆

1. Recopier et compléter le tableau de conversion suivant :

Degrés	0	30		60		120	135		240	
Radians			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$			π		$\frac{7\pi}{4}$

2. Sur le cercle trigonométrique, quelle est la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de $\dfrac{\pi}{5}$? par un angle au centre de $108°$?
3. Sur le cercle trigonométrique, un angle au centre intercepte un arc de longueur 2,4. Quelle est sa mesure en radians ? en degrés, arrondie au dixième ?

EXERCICE 4 ⋆

1. Tracer un cercle trigonométrique de rayon 4 cm et y placer les points images des réels suivants :

$$A = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad B = \frac{3\pi}{2} \quad ; \quad C = \frac{\pi}{6} \quad ; \quad D = -\frac{\pi}{3} \quad ; \quad E = -\frac{3\pi}{4} \quad ; \quad F = \frac{5\pi}{6}$$

$$G = -\frac{3\pi}{2} \quad ; \quad H = \frac{7\pi}{4} \quad ; \quad K = \frac{11\pi}{6} \quad ; \quad L = -\frac{5\pi}{6}$$

2. Lire sur la figure les couples de points symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Quelle relation lie alors les deux réels correspondants ?
3. Quels sont les couples de points diamétralement opposés ?

EXERCICE 5 ⋆

1. Tracer un cercle trigonométrique et colorier l'arc de cercle correspondant à chacun des intervalles suivants. On fera un dessin par intervalle.

   a) $I = \left[-\frac{\pi}{4}\,;\frac{5\pi}{4}\right]$ b) $J = \left[\frac{4\pi}{3}\,;\frac{13\pi}{6}\right]$ c) $K = \left[-\frac{7\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{4}\right]$ d) $L = \left[-\pi\,;-\frac{\pi}{3}\right]$

2. Donner, pour chacun de ces intervalles, la longueur de l'arc colorié.
3. L'un de ces quatre intervalles doit faire l'objet d'une attention particulière. Lequel, et pourquoi ?

Enroulement de la droite numérique et mesure principale

EXERCICE 6 ⋆

1. Parmi les réels suivants, regrouper ceux qui ont le même point image sur le cercle trigonométrique :

   $$\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{7\pi}{3}\,;\,-\frac{5\pi}{3}\,;\,\frac{2\pi}{3}\,;\,\frac{8\pi}{3}\,;\,-\frac{4\pi}{3}\,;\,\frac{13\pi}{3}\,;\,-\frac{2\pi}{3}$$

2. Donner trois réels ayant le même point image que $\frac{3\pi}{4}$, dont un au moins est négatif.
3. Existe-t-il un entier relatif k tel que $\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{25\pi}{6}$? Même question avec $\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{13\pi}{2}$.

EXERCICE 7 ⋆

Dans chaque cas, donner la mesure principale de l'angle de mesure α, c'est-à-dire la mesure appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

a) $\alpha=\frac{7\pi}{2}$ c) $\alpha=\frac{35\pi}{6}$ e) $\alpha=\frac{202\pi}{3}$ g) $\alpha=-\frac{17\pi}{2}$ i) $\alpha=-\frac{123\pi}{4}$

b) $\alpha=-\frac{4\pi}{3}$ d) $\alpha=-\frac{21\pi}{4}$ f) $\alpha=\frac{53\pi}{6}$ h) $\alpha=\frac{100\pi}{3}$ j) $\alpha=\frac{2024\pi}{3}$

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. Un angle a pour mesure principale $\frac{\pi}{4}$. Parmi les mesures $\frac{17\pi}{4}$, $-\frac{31\pi}{4}$ et $\frac{23\pi}{4}$, lesquelles sont des mesures de ce même angle ?
2. Déterminer tous les réels de la forme $\frac{k\pi}{3}$, où k est un entier relatif, appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.
3. Un angle a pour mesure 100 radians. Combien de tours complets cela représente-t-il ? Donner sa mesure principale, arrondie au millième.

Cosinus, sinus et tangente d'un réel

EXERCICE 9 ⋆

1. Pour chacun des réels suivants, déterminer la valeur exacte de son cosinus et de son sinus, puis de sa tangente lorsqu'elle existe. On pourra s'aider en plaçant les points images correspondants sur le cercle trigonométrique.

a) $\frac{\pi}{6}$	d) $\frac{11\pi}{6}$	g) $\frac{9\pi}{4}$	j) $-\frac{108\pi}{4}$	m) $\frac{71\pi}{3}$
b) $\frac{5\pi}{6}$	e) $\frac{13\pi}{6}$	h) $\frac{5\pi}{4}$	k) $\frac{4\pi}{3}$	n) $\frac{97\pi}{3}$
c) $\frac{7\pi}{6}$	f) $\frac{\pi}{4}$	i) $\frac{81\pi}{4}$	l) $\frac{\pi}{3}$	o) $-\frac{54\pi}{3}$

2. Regrouper ces quinze réels selon leur point image. Combien de points distincts obtient-on finalement sur le cercle ?

EXERCICE 10 ⋆

1. Dans chaque cas, donner le signe de $\cos(x)$, de $\sin(x)$ et de $\tan(x)$:

a) $x \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$ b) $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;0\right[$ c) $x \in \left]-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right[$ d) $x \in \left]\frac{3\pi}{2}\,;2\pi\right[$

2. Un réel x vérifie $\cos(x) = -0{,}8$ et $\sin(x) > 0$. Dans quel quadrant se situe son point image ?

3. Existe-t-il un réel x tel que $\cos(x) = \frac{5}{4}$? tel que $\sin(x) = -\frac{3}{4}$?

EXERCICE 11 ⋆⋆

Donner la valeur exacte, simplifiée autant que possible, des expressions suivantes :

a) $12\cos(34\pi) - 35\sin(17\pi)$

b) $3\cos(15\pi) + 18\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)$

c) $\cos^2(2024\pi)$

d) $\dfrac{\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{3\sin\left(\frac{13\pi}{3}\right)}$

e) $2\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

f) $3\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 5\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

g) $-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + 3\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)$

h) $\left(3\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - 2\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)^2$

i) $\left(2\cos\left(\frac{-9\pi}{4}\right) - 3\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)^2$

j) $\dfrac{\left(-2\sin\left(\frac{-4\pi}{3}\right) + 5\sin\left(\frac{17\pi}{4}\right)\right)^2}{\sin^2\left(\frac{17\pi}{6}\right)}$

EXERCICE 12 ⋆

1. Dans chacun des cas suivants, calculer la valeur exacte de $\cos(x)$ ou de $\sin(x)$:

   (a) $\sin(x) = -\dfrac{1}{4}$ où $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right]$.

   (b) $\cos(x) = \dfrac{3}{5}$ où $x \in \left[\dfrac{3\pi}{2}\,;2\pi\right]$.

   (c) $\cos(x) = -\dfrac{1}{3}$ où $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

   (d) $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ où $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

   (e) $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ où $x \in \left[\pi\,;\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

2. Dans chaque cas, l'intervalle donné pour x était-il indispensable ? Que se serait-il passé sans lui ?
3. Existe-t-il un réel x tel que $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$? Et tel que $\cos(x) = -\dfrac{3}{5}$ et $\sin(x) = \dfrac{4}{5}$? Justifier.

EXERCICE 13 ⋆⋆

1. Démontrer que pour tout réel x tel que $\cos(x) \neq 0$:

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

2. On donne $\cos(x) = \dfrac{3}{5}$ et $x \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Calculer $\tan(x)$.
3. On donne $\tan(x) = 2$ et $x \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Calculer $\cos(x)$ puis $\sin(x)$.
4. On donne $\tan(x) = -3$ et $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right[$. Calculer $\cos(x)$ puis $\sin(x)$.

EXERCICE 14 ⋆

Démontrer que pour tout réel x :

1. $(\cos(x) + \sin(x))^2 + (\cos(x) - \sin(x))^2 = 2$
2. $(\cos(x) + \sin(x))^2 - (\cos(x) - \sin(x))^2 = 4\cos(x)\sin(x)$
3. $(1 - \cos(x))(1 + \cos(x)) = \sin^2(x)$
4. $\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1 - 2\cos^2(x)\sin^2(x)$

Application : on suppose désormais que x vérifie $\cos(x) + \sin(x) = \dfrac{1}{2}$.

5. À l'aide de la question 1, calculer $(\cos(x) - \sin(x))^2$.
6. À l'aide de la question 2, en déduire la valeur de $\cos(x)\sin(x)$.

EXERCICE 15 ⋆⋆

Simplifier au maximum les expressions suivantes, définies pour tout réel x :

a) $A(x) = \cos^4(x) - \sin^4(x)$

b) $B(x) = \cos^4(x) + \sin^4(x) + 2\cos^2(x)\sin^2(x)$

c) $C(x) = 3\cos^2(x) + 3\sin^2(x) - 2$

d) $D(x) = (2\cos(x) + \sin(x))^2 + (\cos(x) - 2\sin(x))^2$

e) $E(x) = \cos^4(x) + \sin^2(x)\cos^2(x) + \sin^2(x)$

f) $F(x) = \dfrac{1-\cos^2(x)}{1+\cos(x)} + \cos(x)$ (pour $\cos(x) \neq -1$)

Angles associés

EXERCICE 16 ⋆

Écrire chacun des réels suivants à l'aide d'une ou deux des transformations $-x$, $\pi - x$, $\pi + x$ ou $\dfrac{\pi}{2} - x$, où x est un réel du tableau des valeurs remarquables, puis en déduire son cosinus et son sinus.

a) $\dfrac{2\pi}{3}$ c) $-\dfrac{5\pi}{6}$ e) $\dfrac{5\pi}{4}$ g) $\dfrac{11\pi}{6}$

b) $\dfrac{3\pi}{4}$ d) $\dfrac{7\pi}{6}$ f) $-\dfrac{\pi}{3}$ h) $\dfrac{4\pi}{3}$

EXERCICE 17 ⋆

Pour tout réel x, exprimer les expressions suivantes en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$:

1. $\sin(-x) + \cos(-x)$
2. $\sin(-x) - \sin(\pi + x)$
3. $\cos(\pi - x) + \cos(3\pi + x)$
4. $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) - 3\cos\left(-\dfrac{\pi}{2} - x\right) - 4\sin(\pi - x)$
5. $\cos(\pi + x) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \cos(-x)$
6. $2\sin(\pi - x) - 3\sin(\pi + x) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

EXERCICE 18 ⋆⋆

En s'aidant du cercle trigonométrique ou du tableau des angles associés, démontrer que pour tout réel x :

1. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$.
   On pourra remarquer que $\dfrac{\pi}{2} + x = \pi - \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.
2. $\tan(-x) = -\tan(x)$ et $\tan(\pi + x) = \tan(x)$, lorsque ces tangentes existent.
3. Pour quelles valeurs de x l'égalité $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{\tan(x)}$ a-t-elle un sens ? La démontrer.

EXERCICE 19 ⋆⋆

Simplifier les expressions suivantes. On précisera celles qui ne dépendent pas de x.

a) $A(x) = \sin(\pi + x) + \sin(\pi - x)$

b) $B(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \sin(\pi - x)$

c) $C(x) = \cos^2(\pi - x) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

d) $D(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + \sin(\pi - x)$

e) $E(x) = \sin^2(\pi - x) + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \cos^2(\pi + x)$

f) $F(x) = \cos(\pi - x)\cos(-x) - \sin(\pi + x)\sin(\pi - x)$

Équations et inéquations trigonométriques

EXERCICE 20 ⋆

1. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$, puis dans l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$:

   a) $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   b) $\sin(x) = 0$

   c) $2\sin(x) + \sqrt{3} = 0$

   d) $2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$

   e) $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$

   f) $1 - \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = 0$

   g) $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

2. Représenter sur un cercle trigonométrique les points images des solutions des équations a), c) et g). Comment la lecture de la figure permet-elle de contrôler le nombre de solutions trouvées ?

EXERCICE 21 ⋆⋆

Résoudre les équations ou inéquations suivantes dans l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$:

a) $2\cos(x) + 3 = 4$

b) $3\sin(x) = 2\sqrt{3} - \sin(x)$

c) $\cos(x) \geqslant \sqrt{2} - \cos(x)$

d) $-2\sin(x) > \sin(x) - \dfrac{3}{2}$

e) $6\cos(x) + 3(\sqrt{3} - 1) < -3$

f) $\dfrac{4\cos(x)}{3} = \dfrac{2\cos(x) - 3\sqrt{2}}{6}$

g) $(\cos(x) - 1)^2 = \left(\dfrac{1}{2} - \cos(x)\right)^2 + \dfrac{1}{4}$

h) $\left(\cos(x) - \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2$

i) $-\cos^2(x) - 2\sin(x) + 2 = 0$

EXERCICE 22 ⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $]-\pi\,;\pi]$ par :

$$f(x) = 4\cos^2(x) + 2(\sqrt{2} - 1)\cos(x) - \sqrt{2}$$

Le but de l'exercice est de trouver les solutions de l'équation $f(x) = 0$ et de l'inéquation $f(x) > 0$. On pose $X = \cos(x)$.

1. (a) Justifier que X appartient nécessairement à l'intervalle $[-1\,;1]$.

   (b) Résoudre sur $[-1\,;1]$ l'équation $4X^2 + 2(\sqrt{2} - 1)X - \sqrt{2} = 0$. On notera X_1 et X_2 les solutions obtenues.

   (c) En déduire les solutions sur $]-\pi\,;\pi]$ de l'équation $f(x) = 0$.

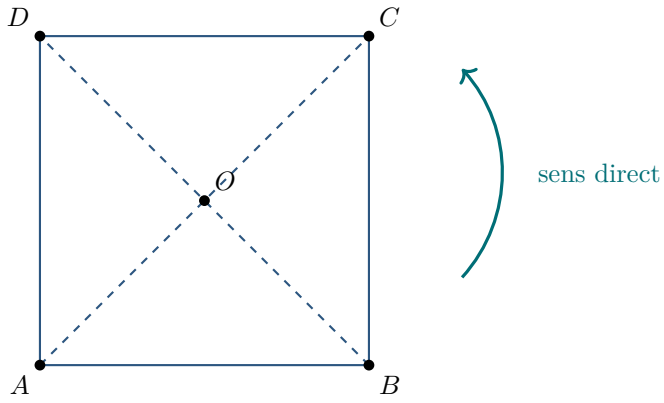
2. (a) Résoudre sur $[-1\,;1]$ l'inéquation $4X^2 + 2(\sqrt{2} - 1)X - \sqrt{2} > 0$.

   (b) En déduire les solutions sur $]-\pi\,;\pi]$ de l'inéquation $f(x) > 0$.

Angles orientés de vecteurs

EXERCICE 23 ⋆

$ABCD$ est un carré de centre O, orienté dans le sens direct, comme sur la figure ci-dessous.



Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

a) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ c) $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ e) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DB}\right)$ g) $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$

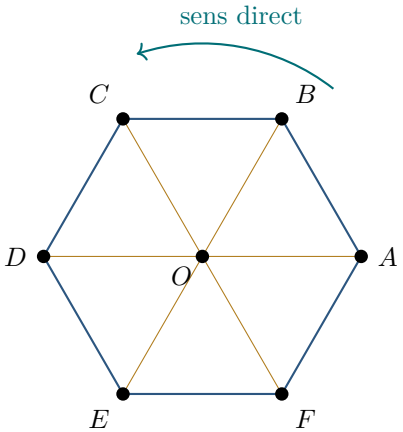
b) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ d) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ f) $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right)$ h) $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}\right)$

EXERCICE 24 ⋆

1. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls tels que $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{6}$ et $(\vec{v}, \vec{w}) = \dfrac{2\pi}{3}$.
   Déterminer la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{w})$, $(\vec{w}, \vec{u})$, $(\vec{v}, \vec{u})$ et $(\vec{w}, \vec{v})$.
2. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls tels que $(\vec{u}, \vec{v}) = -\dfrac{3\pi}{4}$ et $(\vec{u}, \vec{w}) = \dfrac{\pi}{2}$.
   Déterminer la mesure principale de $(\vec{v}, \vec{w})$.
3. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{5\pi}{7}$. Que vaut $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u})$?
   Interpréter ce résultat.

EXERCICE 25 ⋆⋆

$ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O, orienté dans le sens direct.



1. Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\ ;\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)\ ;\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}\right)\ ;\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE}\right)$$

2. Retrouver le résultat concernant $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}\right)$ à l'aide de la relation de Chasles.
3. Déterminer la mesure principale de $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right)$. Quel résultat connu sur les angles d'un hexagone régulier retrouve-t-on ainsi ?
4. Déterminer la mesure principale de $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{ED}\right)$. Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (ED) ?

Exercices de synthèse

EXERCICE 26 : QCM ⋆

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. La justifier.

Question	**Réponse A**	**Réponse B**	**Réponse C**
1. La mesure principale de $\frac{47\pi}{6}$ est :	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
2. En radians, 210° vaut :	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$
3. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ vaut :	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ vaut :	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
5. $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ vaut :	-1	1	$\sqrt{3}$
6. Si $\cos(x)=-\frac{2}{3}$ et $x\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$, alors $\sin(x)$ vaut :	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{5}{9}$
7. Pour tout réel x, $\cos(\pi+x)$ vaut :	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
8. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $\cos(x)=\frac{3}{2}$ admet :	aucune solution	deux solutions	une infinité de solutions
9. Les solutions de $\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$ sont :	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$
10. Si $(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{5}$ et $(\vec{v},\vec{w})=\frac{\pi}{3}$, alors $(\vec{w},\vec{u})$ vaut :	$\frac{8\pi}{15}$	$-\frac{8\pi}{15}$	$\frac{2\pi}{15}$

EXERCICE 27 : VRAI OU FAUX ⋆⋆

Chacune des affirmations suivantes est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse : par une démonstration si l'affirmation est vraie, par un contre-exemple sinon.

1. Pour tout réel x, $\cos(x) + \sin(x) = 1$.
2. Un angle de 1 radian mesure plus de 57 degrés.
3. Il existe un réel x tel que $\cos(x) = \sin(x)$.
4. Les réels $\dfrac{7\pi}{3}$ et $-\dfrac{5\pi}{3}$ ont le même point image.
5. La mesure principale d'un angle orienté appartient toujours à $[0\,;2\pi[$.
6. Pour tout réel x, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.
7. Si $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$, alors $x = \dfrac{\pi}{6}$.
8. Pour tout réel x, $\cos^4(x) + 2\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4(x) = 1$.
9. Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u})$.
10. Si $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right[$, alors $\tan(x) < 0$.

EXERCICE 28 : CALCUL DE $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ET $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ⋆⋆

Soit $(O; I, J)$ un repère orthonormé et M un point du cercle trigonométrique de ce repère tel que $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

1. Faire une figure.
2. Quelles sont les coordonnées du point M dans le repère $(O; I, J)$?
3. Calculer la distance IM. On donnera le résultat sous la forme $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.
4. (a) En considérant H, projeté orthogonal de O sur (IM), démontrer que :

$$IM = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

   (b) En déduire que : $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

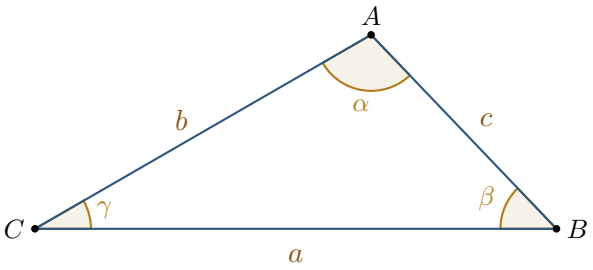
   On pourra vérifier que $\left(\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}$.

   (c) En utilisant la question précédente, montrer que : $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

5. En déduire le cosinus et le sinus des réels $\dfrac{11\pi}{12}$, $\dfrac{13\pi}{12}$, $\dfrac{5\pi}{12}$ et $\dfrac{7\pi}{12}$.
6. Démontrer enfin que $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$.

EXERCICE 29 : LA RELATION D'AL-KASHI ⋆⋆

On considère un triangle ABC quelconque non plat. On note a, b et c les longueurs de ses trois côtés, et α, β et γ les mesures de ses trois angles, comme indiqué sur le schéma ci-dessous. On suppose de plus que les angles β et γ sont aigus.

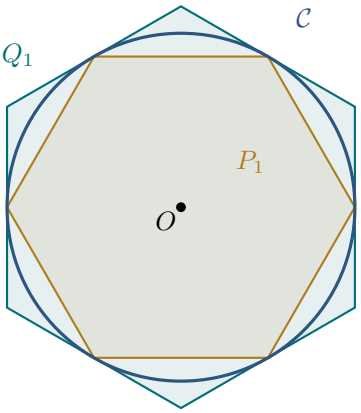


1. Tracer la hauteur issue de A dans le triangle ABC. On notera H le pied de cette hauteur.
2. (a) Exprimer AH en fonction de c et de $\sin(\beta)$.
   (b) En déduire la formule $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}ac\sin(\beta)$, où $\mathcal{A}$ désigne l'aire du triangle ABC.
   (c) En exprimant cette aire à l'aide des deux autres angles, en déduire la loi des sinus :
   $$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$
3. (a) Exprimer BH en fonction de c et de $\cos(\beta)$, puis CH en fonction de a, c et $\cos(\beta)$.
   (b) Écrire l'égalité de Pythagore dans le triangle AHC.
   (c) En déduire la formule d'Al-Kashi, aussi appelée théorème de Pythagore généralisé :
   $$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$
4. *Application :* on considère un triangle ABC tel que $a = BC = 8$, $c = AB = 3$ et $\widehat{BAC} = 83°$. Calculer la longueur AC, arrondie au centième, puis les mesures en degrés, arrondies au dixième, des angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ABC}$.
5. Que devient la formule d'Al-Kashi lorsque $\beta = \dfrac{\pi}{2}$? Quel théorème retrouve-t-on ainsi, et pourquoi parle-t-on de « théorème de Pythagore généralisé » ?

EXERCICE 30 : APPROXIMATION DE π PAR LA MÉTHODE D'ARCHIMÈDE ⋆⋆⋆

Dans un texte intitulé « De la mesure du cercle », Archimède imagine la première méthode jamais proposée permettant, en théorie, le calcul de π avec une précision aussi grande qu'on le souhaite.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon 1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on construit deux polygones réguliers P_n et Q_n ayant chacun 3×2^n côtés, P_n étant inscrit dans $\mathcal{C}$ et Q_n exinscrit à $\mathcal{C}$ (voir la figure ci-contre, tracée pour $n = 1$).



Le périmètre du cercle, égal à 2π, est encadré par ceux des deux polygones. On note p_n et q_n les demi-périmètres respectifs de P_n et Q_n, de sorte que :

$$p_n < \pi < q_n$$

1. **Le cas $n = 1$.**
   Montrer que $p_1 = 3$ et $q_1 = 2\sqrt{3}$. En déduire un premier encadrement de π.

2. **Expression de p_n et q_n.**
   (a) Déterminer, en fonction de n, la mesure α_n de l'angle au centre qui intercepte l'un des côtés de P_n.
   (b) En considérant un seul côté et le triangle isocèle qu'il forme avec le centre O, démontrer les relations :
   $$p_n = 3 \times 2^n \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \qquad \text{et} \qquad q_n = 3 \times 2^n \tan\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$$
   (c) Vérifier que ces formules redonnent bien les valeurs de la question 1.

3. **Relations de récurrence.**
   (a) On pose $\beta_n = \dfrac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}$. Exprimer p_n, q_n, p_{n+1} et q_{n+1} en fonction de n et de β_n.
   (b) On admet que pour tout réel a, $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$ et $1 + \cos(2a) = 2\cos^2(a)$. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $$\frac{1}{q_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n}\right) \qquad \text{et} \qquad p_{n+1} = \sqrt{p_n\, q_{n+1}}$$
   (c) Calculer q_2 puis p_2 à l'aide de ces relations. Quelle est alors la précision obtenue sur π ?
   (d) À l'aide de l'exercice 28, retrouver les valeurs exactes $p_2 = 3\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$ et $q_2 = 24 - 12\sqrt{3}$.

4. **Algorithme.**
   (a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous, qui calcule les valeurs successives de p_n et q_n jusqu'à obtenir un encadrement de π d'amplitude inférieure à un réel $e > 0$ donné.

   Entrée : un réel $e > 0$
   $p \leftarrow 3$
   $q \leftarrow 2\sqrt{3}$
   $n \leftarrow 1$
   Tant que ..... **faire**
   $q \leftarrow$ .....
   $p \leftarrow$ .....
   $n \leftarrow n + 1$
   Fin Tant que
   Sortie : n, p, q

   Attention à l'ordre des deux affectations : le calcul de p utilise la nouvelle valeur de q.
   (b) À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir un encadrement de π d'amplitude inférieure à 10^{-6}, puis donner cet encadrement.
   (c) Combien d'itérations supplémentaires faut-il pour gagner trois décimales, c'est-à-dire pour atteindre une amplitude inférieure à 10^{-9} ? Cet algorithme vous paraît-il efficace pour obtenir un grand nombre de décimales de π ?

5. **Retour au texte d'Archimède.**
   Archimède s'est arrêté aux polygones à 96 côtés et en a tiré l'encadrement célèbre :
   $$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$
   (a) À quelle valeur de n correspondent les polygones à 96 côtés ?

(b) Calculer p_n et q_n pour cette valeur de n, arrondis à 10^{-6}, et les comparer à l'encadrement d'Archimède. Lequel des deux encadrements est le meilleur ?

(c) Archimède ne disposait ni de la notation décimale, ni de la trigonométrie : il devait encadrer à la main chaque racine carrée apparaissant dans les calculs. Cela explique-t-il l'écart constaté ?