CORRIGÉ – CHAPITRE 7

PRODUIT SCALAIRE

Définition géométrique

EXERCICE 1 ⋆

On applique la définition $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

a) $3 \times 5 \times \dfrac{1}{2} = \boxed{\dfrac{15}{2}}$

b) $2 \times 7 \times (-1) = \boxed{-14}$

c) $4 \times 6 \times 0 = \boxed{0}$

d) $1 \times 8 \times 1 = \boxed{8}$

e) $5 \times 2 \times \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{-5\sqrt{2}}$

f) $3 \times 4 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{6\sqrt{3}}$

g) $2 \times 3 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \boxed{-3}$

h) Par convention, si l'un des vecteurs est nul : $\boxed{0}$

En e) l'angle est obtus et le produit est négatif ; en f) l'angle est aigu et le produit positif. Le signe ne dépend donc **pas** du signe de l'angle, mais de celui de son cosinus : cos étant une fonction paire, $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

$$\boxed{\text{Le signe de } \vec{u} \cdot \vec{v} \text{ est celui de } \cos(\vec{u}, \vec{v})}$$

EXERCICE 2 ⋆

1. Avec la remarque du cours, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 20 \times \frac{1}{2} = \boxed{10}$$

2. Dans le carré $ABCD$ de côté 3, la diagonale mesure $AC = 3\sqrt{2}$.

   (a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ portent deux côtés consécutifs : ils sont orthogonaux.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \boxed{0}$$

   (b) La diagonale $[AC]$ est bissectrice de l'angle droit, donc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{4}$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9 \times 2}{2} = \boxed{9}$$

   (c) $\overrightarrow{CD}$ est l'opposé de $\overrightarrow{AB}$: ces vecteurs sont colinéaires de sens contraires.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -3 \times 3 = \boxed{-9}$$

   (d) Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \boxed{0}$$

3. Dans le triangle équilatéral, tous les angles valent $\frac{\pi}{3}$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 6 \times \frac{1}{2} = \boxed{18}$$

Pour le second, attention : l'angle du triangle en B est celui entre $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$, alors qu'ici le premier vecteur est $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$. En reportant les deux vecteurs à partir d'une même origine, on obtient :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 6 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \boxed{-18}$$

EXERCICE 3 ⋆

Figure 1. L'angle entre les deux vecteurs vaut directement 120° :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 3 \times \cos(120°) = 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \boxed{-6}$$

Le produit est négatif, ce qui est cohérent avec un angle obtus.

Figure 2. Les codages indiquent $AB = AC = 3$: le triangle est isocèle en A. Ses angles à la base sont donc égaux, et comme celui en B vaut 75° :

$$\widehat{BAC} = 180° - 2 \times 75° = 30°$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 3 \times \cos(30°) = 9 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{9\sqrt{3}}{2} \approx 7{,}79}$$

Figure 3. Le carré a pour côté 2, donc $AB = 2$ et $AC = 2\sqrt{2}$. La diagonale étant bissectrice, $\widehat{BAC} = 45°$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{4}$$

On pouvait aussi traiter la figure 3 par le projeté orthogonal : le projeté de C sur (AB) est B, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = 4$.

EXERCICE 4 ⋆

On repère d'abord les longueurs : $OI = 2$, $OA = 2$ (le point A est sur le petit cercle), $OJ = OK = OB = 3$ (les trois autres sont sur le grand cercle).

a) $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont colinéaires de même sens :

$$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OJ} = 2 \times 3 = \boxed{6}$$

b) $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont colinéaires de sens contraires :

$$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OK} = -2 \times 3 = \boxed{-6}$$

c) L'angle $\left(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OB}\right)$ mesure −60°, et $\overrightarrow{OK}$ est opposé à $\overrightarrow{OI}$, donc $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}\right) = 180° - 60° = 120°$:

$$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OB} = 2 \times 3 \times \cos(120°) = \boxed{-3}$$

d) Le point A étant sur l'axe vertical, $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}\right) = 90°$, d'où $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) = 120° + 90° = 210°$, dont le cosinus vaut celui de 150° :

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = 3 \times 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{-3\sqrt{3} \approx -5{,}20}$$

e) Les deux vecteurs n'ont pas la même origine. Le triangle OAI est rectangle isocèle en O (car $OA = OI = 2$), donc ses angles à la base valent 45°, et $AI = 2\sqrt{2}$. L'angle entre $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AI}$ vaut alors $180° - 45° = 135°$:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AI} = 2 \times 2\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{-4}$$

f) De même, $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IJ}\right) = 180° - 45° = 135°$, avec $IA = 2\sqrt{2}$ et $IJ = OJ - OI = 1$:

$$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IJ} = 2\sqrt{2} \times 1 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{-2}$$

On peut contrôler ces six résultats en plaçant un repère orthonormé d'origine O : on a alors $I(2\,;0)$, $J(3\,;0)$, $K(-3\,;0)$, $A(0\,;2)$ et $B\left(-\frac{3}{2}\,;-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

EXERCICE 5 ⋆

1. Le signe de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est celui de $\cos(\vec{u}, \vec{v})$:

Angle	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	0	π	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$
Signe	> 0	< 0	$= 0$	> 0	< 0	< 0	> 0	< 0

2. Le cosinus est strictement positif exactement sur le premier et le quatrième quadrant :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \iff \text{la mesure principale de } (\vec{u}, \vec{v}) \text{ appartient à } \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[}$$

3. D'après la proposition 1, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = 7^2 = \boxed{49}$$

4.

colinéaires de même sens ($\cos = 1$)	: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 3 = 12$
colinéaires de sens contraires ($\cos = -1$)	: $\vec{u} \cdot \vec{v} = -12$
orthogonaux ($\cos = 0$)	: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

5. Pour tout réel θ, on a $-1 \leqslant \cos(\theta) \leqslant 1$. En multipliant par $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$, qui est *positif*, l'ordre est conservé :

$$-\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

$$\boxed{-\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \leqslant \vec{u} \cdot \vec{v} \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

Les deux cas d'égalité sont exactement ceux de la question 4 : la colinéarité.

EXERCICE 6 ⋆⋆

1. Sur la figure 1, H est situé entre A et B : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ pointent dans la même direction.
   Sur la figure 2, H est de l'autre côté de A : les deux vecteurs sont de **sens contraires**.

Figure 1 : même sens ; Figure 2 : sens contraires

2. D'après la proposition 2, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.

   Figure 1 : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = 6 \times 4 = \boxed{24}$

   Figure 2 : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH = -5 \times 1{,}5 = \boxed{-7{,}5}$

3. Sur la figure 1, l'angle $\widehat{BAC}$ est **aigu** ; sur la figure 2, il est **obtus**.

Le produit scalaire est positif si l'angle est aigu, négatif s'il est obtus

   C'est cohérent avec l'exercice 5 : le projeté tombe du côté de B lorsque l'angle est aigu, de l'autre côté lorsqu'il est obtus.

EXERCICE 7 ⋆

Figure	Calcul	Justification
①	**a)**	A, B et C sont alignés dans cet ordre : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de même sens, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$.
②	**e)**	A appartient au cercle de diamètre $[BC]$, donc le triangle ABC est rectangle en A : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
③	**b)**	Le triangle est rectangle en B, donc le projeté orthogonal de C sur (AB) est B lui-même : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2$.
④	**d)**	Le triangle est isocèle en C et H est le pied de la hauteur, donc H est le milieu de $[AB]$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times \dfrac{AB}{2} = \dfrac{1}{2}AB^2$.
⑤	**c)**	Le projeté orthogonal de C sur (AB) est O, et les codages donnent $OA = AB$. Mais $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraires : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AO = -AB^2$.

Ces cinq figures balaient tous les cas de la proposition 1 et de la proposition 2 : deux cas de colinéarité, l'orthogonalité, et deux projetés orthogonaux de sens opposés.

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. (a) Le projeté orthogonal de C sur (AB) est B, et $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$ ont évidemment le même sens :

   $$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = \boxed{36}$$

   (b) Les côtés $[AB]$ et $[AD]$ sont perpendiculaires : $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0}$

   (c) Le projeté orthogonal de C sur (AD) est D :

   $$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = AD^2 = \boxed{16}$$

(d) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ (le quadrilatère est un rectangle) :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \boxed{36}$$

2. Dans le repère proposé, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$. La proposition 5 donne alors :

$$6\times 6+0\times 4=36 \quad ; \quad 6\times 0+0\times 4=0 \quad ; \quad 0\times 6+4\times 4=16 \quad ; \quad 6\times 6+0\times 0=36$$

On retrouve bien les quatre résultats précédents.

3. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 6\times(-6)+4\times 4 = -36+16 = \boxed{-20}$$

Ce produit n'étant pas nul : $\boxed{\text{les diagonales d'un rectangle ne sont pas perpendiculaires}}$.

Dans un carré en revanche, $AB = AD$, et le calcul devient $AB^2 - AD^2 = 0$: les diagonales sont bien perpendiculaires. C'est d'ailleurs ce que démontre l'exercice 18 pour un losange quelconque.

Approche analytique

EXERCICE 9 ⋆

On applique la proposition 5 : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$, valable car le repère est orthonormé.

a) $2\times 3+5\times(-1) = 6-5 = \boxed{1}$

b) $-4\times 2+3\times 6 = -8+18 = \boxed{10}$

c) $7\times 0+0\times(-3) = \boxed{0}$

d) $(-2)\times(-3)+(-5)\times 1 = 6-5 = \boxed{1}$

e) $\frac{1}{2}\times 6+4\times\left(-\frac{1}{4}\right) = 3-1 = \boxed{2}$

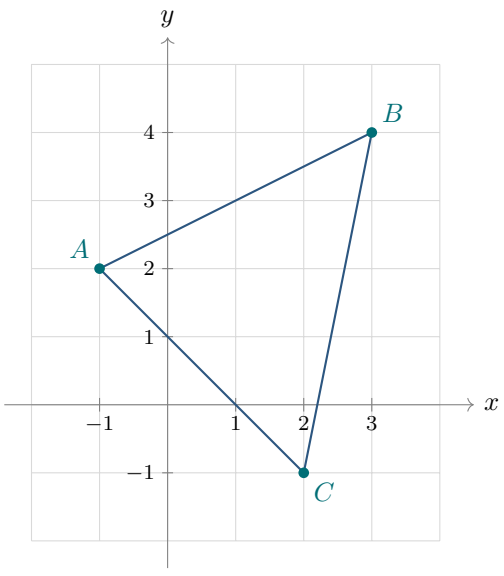
f) $\sqrt{2}\times\sqrt{8}-\sqrt{3}\times\sqrt{27} = \sqrt{16}-\sqrt{81} = 4-9 = \boxed{-5}$

En c), les deux vecteurs sont orthogonaux : l'un est horizontal, l'autre vertical. Enfin :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2+5^2} = \boxed{\sqrt{29}\approx 5{,}39} \quad ; \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \boxed{\sqrt{10}\approx 3{,}16}$$

EXERCICE 10 ⋆

1. Voici la figure.



2. On soustrait les coordonnées du point de départ à celles du point d'arrivée :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}}$$

3. $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\times 3 + 2\times(-3) = 12-6 = \boxed{6}$$

Pour le deuxième, il faut $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$:

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = (-4)\times(-1) + (-2)\times(-5) = 4+10 = \boxed{14}$$

Et avec $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$:

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = -3\times 1 + 3\times 5 = -3+15 = \boxed{12}$$

4. $$AB = \sqrt{4^2+2^2} = \boxed{\sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}47}$$
$$AC = \sqrt{3^2+(-3)^2} = \boxed{\sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24}$$
$$BC = \sqrt{(-1)^2+(-5)^2} = \boxed{\sqrt{26} \approx 5{,}10}$$

Les trois longueurs sont différentes et aucun des trois produits scalaires n'est nul :

$$\boxed{\text{le triangle } ABC \text{ n'a rien de particulier}}$$

EXERCICE 11 ⋆

1. $3\times 4 + (-2)\times 6 = 12-12 = 0$: $\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux}}$
2. $5\times 2 + 1\times(-3) = 10-3 = 7 \neq 0$: $\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ne sont pas orthogonaux}}$
3. On résout $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$:

$$m\times 4 + 3\times(-2) = 0 \iff 4m-6=0 \iff \boxed{m=\frac{3}{2}}$$

4. $$m\times 2 + (m+1)\times(-4) = 0 \iff 2m-4m-4=0 \iff -2m=4 \iff \boxed{m=-2}$$

5. Le triangle est rectangle en A si et seulement si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$. Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\m-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$:

$$2\times(-2) + (m-2)\times(-2) = -4-2m+4 = -2m$$
$$-2m = 0 \iff \boxed{m=0}$$

Le point B a alors pour coordonnées $(3\,;0)$.

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times 1 + 1\times 2 = 5$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{10}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$, donc :

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{5}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{4}}$$

2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times(-1) + 0\times\sqrt{3} = -2$, $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{1+3} = 2$:

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{-2}{2\times 2} = -\frac{1}{2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{(\vec{u},\vec{v}) = \frac{2\pi}{3}}$$

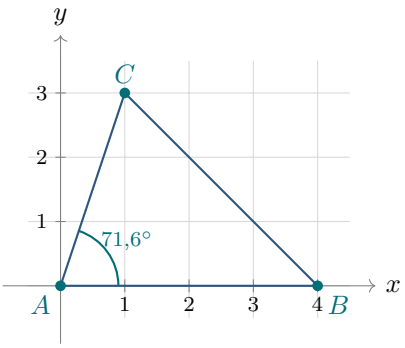
3. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, donc :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\times 1 + 0\times 3 = 4 \quad ; \quad AB = 4 \quad ; \quad AC = \sqrt{10}$$

$$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{4}{4\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0{,}3162$$

La calculatrice donne alors :

$$\boxed{\widehat{BAC} \approx 71{,}6°}$$



EXERCICE 13 ⋆⋆

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\times(-1) + 2\times 2 = -4 + 4 = 0$$

$$\boxed{\text{Le triangle } ABC \text{ est rectangle en } A}$$

Vérification par Pythagore : $AB = \sqrt{20}$, $AC = \sqrt{5}$ et $BC = \sqrt{25} = 5$, donc

$$AB^2 + AC^2 = 20 + 5 = 25 = BC^2$$

L'égalité de Pythagore est bien satisfaite.

2. $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$:

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = -4 + 4 = 0$$

Le triangle est donc rectangle en C. De plus $CA = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = CB$:

$$\boxed{\text{Le triangle } ABC \text{ est rectangle et isocèle en } C}$$

3. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$. Aucun des trois produits scalaires n'est nul :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6-2=4 \quad ; \quad \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3+3=6 \quad ; \quad \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-2+6=4$$

Le triangle n'est donc pas rectangle. En revanche :

$$AB=\sqrt{10} \quad ; \quad AC=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \quad ; \quad BC=\sqrt{10}$$

$$\boxed{\text{Le triangle } ABC \text{ est isocèle en } B}$$

Propriétés du produit scalaire

EXERCICE 14 ⋆

On développe comme avec des nombres, en utilisant la bilinéarité et la symétrie $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$.

a)

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}=\boxed{\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2}$$

Les deux termes croisés se sont éliminés grâce à la symétrie.

b)

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\boxed{\|\vec{u}\|^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2}$$

c)

$$\begin{aligned}(2\vec{u}-3\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})&=2\,\vec{u}\cdot\vec{u}+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}-3\,\vec{v}\cdot\vec{u}-3\,\vec{v}\cdot\vec{v}\\&=\boxed{2\|\vec{u}\|^2-\vec{u}\cdot\vec{v}-3\|\vec{v}\|^2}\end{aligned}$$

d)

$$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\boxed{\|\vec{u}\|^2-2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2}$$

e)

$$(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})\cdot\vec{u}=\boxed{\|\vec{u}\|^2+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}}$$

f) En appliquant a) avec $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$:

$$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\boxed{AB^2-AC^2}$$

EXERCICE 15 ⋆

a)

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2=9+2\times(-4)+25=\boxed{26}$$

$$\boxed{\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{26}\approx 5{,}10}$$

b)

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=9-2\times(-4)+25=\boxed{42} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\|\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{42}\approx 6{,}48}$$

c)

$$\begin{aligned}(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-3\vec{v})&=2\|\vec{u}\|^2-6\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{v}-3\|\vec{v}\|^2\\&=2\|\vec{u}\|^2-5\,\vec{u}\cdot\vec{v}-3\|\vec{v}\|^2\\&=18-5\times(-4)-75=18+20-75=\boxed{-37}\end{aligned}$$

d)

$$\|\vec{u}+2\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 4\,\vec{u}\cdot\vec{v} + 4\|\vec{v}\|^2 = 9 - 16 + 100 = \boxed{93}$$

Le produit scalaire vaut -4, il est donc **négatif** : d'après l'exercice 5,

$$\boxed{\text{l'angle } (\vec{u},\vec{v}) \text{ est obtus}}$$

EXERCICE 16 ⋆⋆

1. (a) La relation de Chasles donne $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \boxed{\overrightarrow{CB}}$.

   (b) On applique la formule avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, sachant que $\|\vec{u} - \vec{v}\| = CB = 6$:

   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - CB^2\right) = \frac{1}{2}(49 + 25 - 36) = \frac{38}{2} = \boxed{19}$$

   (c)

   $$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{19}{7\times 5} = \frac{19}{35} \approx 0{,}5429$$

   $$\boxed{\widehat{BAC} \approx 57{,}1^\circ}$$

2. (a) Dans le parallélogramme $ABCD$, on a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, donc par Chasles :

   $$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \boxed{\overrightarrow{AC}}$$

   (b) On utilise cette fois la formule $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$:

   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2 - AD^2\right) = \frac{1}{2}(49 - 25 - 9) = \boxed{\frac{15}{2} = 7{,}5}$$

   (c)

   $$\begin{aligned} BD^2 &= \left\|\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right\|^2 = AD^2 - 2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + AB^2 \\ &= 9 - 2\times 7{,}5 + 25 = 19 \end{aligned}$$

   $$\boxed{BD = \sqrt{19} \approx 4{,}36}$$

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. Dans le parallélogramme, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{v}$, donc par Chasles $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \boxed{\vec{u}+\vec{v}}$. De même, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{u} + \vec{v} = \boxed{\vec{v} - \vec{u}}$.
2. On développe les deux carrés, comme à l'exercice 14 :

   $$\begin{aligned} \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 &= \left(\|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2\right) + \left(\|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2\right) \\ &= \boxed{2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right)} \end{aligned}$$

   Les doubles produits, de signes contraires, se sont éliminés.
3. On remarque que $\|\vec{v} - \vec{u}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$, puisque deux vecteurs opposés ont la même norme. En traduisant l'égalité précédente avec AC, BD, AB et AD :

   $$\boxed{AC^2 + BD^2 = 2\left(AB^2 + AD^2\right)}$$

4. Avec les données de l'exercice 16 : $AB = 5$, $AD = 3$, $AC = 7$ et $BD = \sqrt{19}$.

$$AC^2 + BD^2 = 49 + 19 = 68 \qquad \text{et} \qquad 2\left(AB^2 + AD^2\right) = 2(25 + 9) = 68$$

L'égalité est bien vérifiée.

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. C'est la question a) de l'exercice 14 :

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = \boxed{\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2}$$

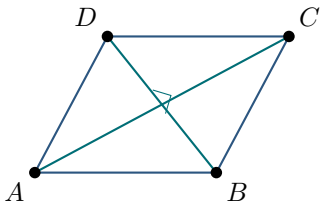
2. Si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$, alors $\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0$, donc $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$:

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} \text{ et } \vec{u} - \vec{v} \text{ sont orthogonaux}}$$

3. Dans le losange $ABCD$, tous les côtés ont la même longueur, donc $\|\vec{u}\| = AB = AD = \|\vec{v}\|$. D'après la question 1 de l'exercice 17, $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{BD} = \vec{v} - \vec{u}$, qui est l'opposé de $\vec{u} - \vec{v}$. La question 2 donne alors :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$$

$$\boxed{\text{Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires}}$$



4. On développe les deux normes puis on soustrait :

$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \left(\|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2\right) - \left(\|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2\right) \\ &= 4\,\vec{u} \cdot \vec{v}\end{aligned}$$

En divisant par 4 :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)}$$

Cette fois ce sont les carrés qui s'éliminent, et les doubles produits qui s'ajoutent : c'est exactement l'inverse de ce qui s'était produit à l'exercice 17.

EXERCICE 19 ⋆⋆

On note $a = AB = 1$ le côté du carré. On rappelle que $AC = BD = \sqrt{2}$ (diagonales du carré), que $BE = EC = BC = 1$ (triangle équilatéral), et que F est le milieu de $[AC]$ comme de $[BD]$.

a) Côtés consécutifs du carré : $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0}$

b) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, donc ce produit est le même qu'en a) : $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0}$

c) Le projeté orthogonal de C sur (AB) est B, et $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = \boxed{1}$$

d) Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires (exercice 18) : $\boxed{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0}$

e) $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}$, donc :

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=-AC^2=\boxed{-2}$$

f) F étant le milieu de $[AC]$, on a $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\times 2=\boxed{1}$$

g) De même $\overrightarrow{FC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, et $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}_{=0}+AD^2\right)=\boxed{\frac{1}{2}}$$

h) Notons K le milieu de $[BC]$: le triangle BEC étant équilatéral, (EK) est sa hauteur, donc K est le projeté orthogonal de E sur (BC). Mais ici il faut projeter E sur (AB). Or $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BE}\right)$ vaut 30° : en effet $\overrightarrow{BE}$ fait un angle de 60° avec $\overrightarrow{BC}$, lui-même perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE}=1\times 1\times\cos(30^\circ)=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}87}$$

i) Dans le triangle équilatéral BEC, l'angle en E vaut 60°, mais il est formé par $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{EC}$. Comme $\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{EB}$:

$$\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{EC}\right)=180^\circ-60^\circ=120^\circ$$

$$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{EC}=1\times 1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

j) On décompose $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ et l'on réutilise h) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AC}&=\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BC}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}+1\times 1\times\cos(60^\circ)=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\approx 1{,}37}\end{aligned}$$

k) On écrit $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$, puis on développe :

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}_{=1}+\underbrace{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AB}}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}}=\boxed{1+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}\approx 1{,}87}$$

l) On décompose les deux vecteurs : $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$. En remarquant que $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CF}&=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\\&=-\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}_{=1}+\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}_{=0}+\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AD}\Big)\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{EC}$, et l'angle $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CE}\right)$ vaut -30° par symétrie avec h), tandis que $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{AD}$ font un angle de 120° :

$$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad;\qquad\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AD}=\cos(120^\circ)=-\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{2}\left(1+0+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)=\boxed{-\frac{1+\sqrt{3}}{4}\approx-0{,}68}$$

On peut contrôler l'ensemble de ces douze résultats en plaçant le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$, dans lequel $A(0\,;0)$, $B(1\,;0)$, $C(1\,;1)$, $D(0\,;1)$, $F\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ et $E\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ — mais l'énoncé demandait précisément de s'en passer.

Vecteur normal et équations de droites

EXERCICE 20 ⋆

D'après la proposition 1, la droite $ax+by+c=0$ admet $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ pour vecteur normal et $\vec{u}\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

Droite	Vecteur normal	Vecteur directeur
$d_1 : 3x-5y+2=0$	$\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$
$d_2 : x+4y=0$	$\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$
$d_3 : 2x-7=0$	$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$
$d_4 : -y+3=0$	$\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$
$d_5 : \frac{x}{2}+3y-1=0$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\3\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$
$d_6 : -4x+y+9=0$	$\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

On rappelle qu'un vecteur normal (ou directeur) n'est jamais unique : tout vecteur colinéaire non nul convient également, ce dont on profite en d_5 pour éliminer la fraction.

L'équation de d_3 se réécrit $x=\frac{7}{2}$: $\boxed{d_3 \text{ est une droite verticale}}$

Celle de d_4 se réécrit $y=3$: $\boxed{d_4 \text{ est une droite horizontale}}$

EXERCICE 21 ⋆

La méthode est toujours la même : le vecteur normal donne les coefficients a et b, puis on détermine c en injectant les coordonnées du point.

1. L'équation est de la forme $2x + 5y + c = 0$. Comme $A(-1\,;3)$ appartient à d :

$$2 \times (-1) + 5 \times 3 + c = 0 \iff -2 + 15 + c = 0 \iff c = -13$$

$$\boxed{d : 2x + 5y - 13 = 0}$$

2. L'équation est de la forme $-x + 4y + c = 0$, et l'origine $O(0\,;0)$ appartient à d :

$$0 + 0 + c = 0 \iff c = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{d : -x + 4y = 0}$$

3. L'équation est de la forme $3x + 0 \times y + c = 0$, avec $C(2\,;-5)$:

$$3 \times 2 + c = 0 \iff c = -6 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{d : 3x - 6 = 0, \text{ c'est-à-dire } x = 2}$$

4. Si d est perpendiculaire à (BC), alors $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur *normal* à d. Or $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, que l'on simplifie en $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. L'équation est donc de la forme $2x + y + c = 0$, et $A(1\,;2)$ y appartient :

$$2 + 2 + c = 0 \iff c = -4 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{d : 2x + y - 4 = 0}$$

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. Un vecteur directeur de d devient un vecteur *normal* de la perpendiculaire. Ici $\vec{n}_d\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, donc $\vec{u}_d\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$, que l'on simplifie en $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$. L'équation cherchée est de la forme $3x + 2y + c = 0$, avec $A(4\,;1)$:

$$12 + 2 + c = 0 \iff c = -14 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{3x + 2y - 14 = 0}$$

2. Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux le sont. Ici $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{n}'\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$:

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 1 \times 2 + 2 \times (-1) = 0$$

$$\boxed{d \text{ et } d' \text{ sont perpendiculaires}}$$

3. On résout $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$ avec $\vec{n}\begin{pmatrix}m\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{n}'\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$:

$$2m - 3 = 0 \iff \boxed{m = \frac{3}{2}}$$

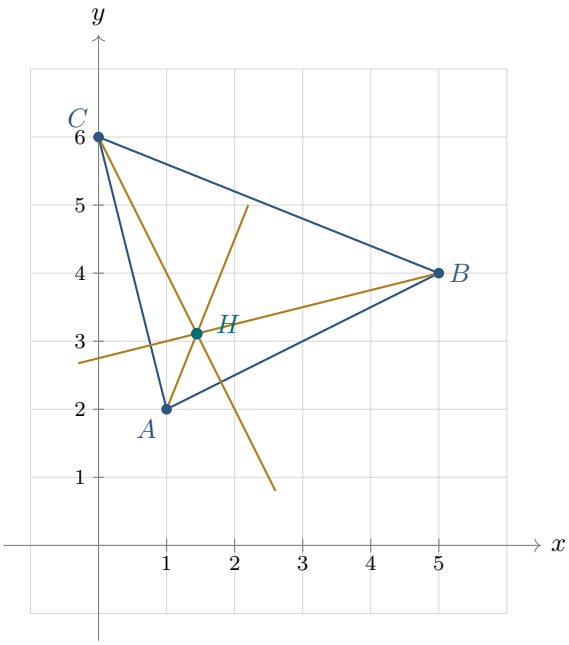
4. Les vecteurs normaux sont $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}'\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$. Le produit scalaire vaut $18 + 2 = 20 \neq 0$: elles ne sont pas perpendiculaires. En revanche $\vec{n}' = 2\,\vec{n}$: les deux vecteurs normaux sont colinéaires.

$$\boxed{d \text{ et } d' \text{ sont parallèles}}$$

Elles sont même strictement parallèles : en multipliant l'équation de d par 2 on obtient $6x - 2y + 4 = 0$, qui diffère de celle de d'.

EXERCICE 23 ⋆⋆

1. Voici la figure, complétée de l'orthocentre trouvé à la question 4.



2. Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1+5}{2}\,;\dfrac{2+4}{2}\right) = (3\,;3)$, et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ est normal à la médiatrice. En simplifiant en $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, l'équation est de la forme $2x+y+c=0$:

$$2\times 3+3+c=0 \iff c=-9 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{2x+y-9=0}$$

3. La hauteur issue de C est perpendiculaire à (AB) et passe par $C(0\,;6)$. Elle admet donc $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ pour vecteur normal :

$$0+6+c=0 \iff c=-6 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{2x+y-6=0}$$

La hauteur issue de A est perpendiculaire à (BC), et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$. Avec $A(1\,;2)$:

$$-5\times 1+2\times 2+c=0 \iff c=1 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{-5x+2y+1=0}$$

4. On résout le système formé par les deux hauteurs :

$$\begin{cases} 2x+y &= 6\\ -5x+2y &= -1 \end{cases}$$

La première ligne donne $y=6-2x$; en substituant dans la seconde :

$$-5x+2(6-2x)=-1 \iff -9x+12=-1 \iff x=\frac{13}{9}$$

puis $y=6-\dfrac{26}{9}=\dfrac{28}{9}$:

$$\boxed{H\left(\frac{13}{9}\,;\frac{28}{9}\right)\approx(1{,}44\,;3{,}11)}$$

5. La hauteur issue de B est perpendiculaire à (AC), avec $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ et $B(5\,;4)$:

$$-5+16+c=0 \iff c=-11 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{-x+4y-11=0}$$

On vérifie que H lui appartient :

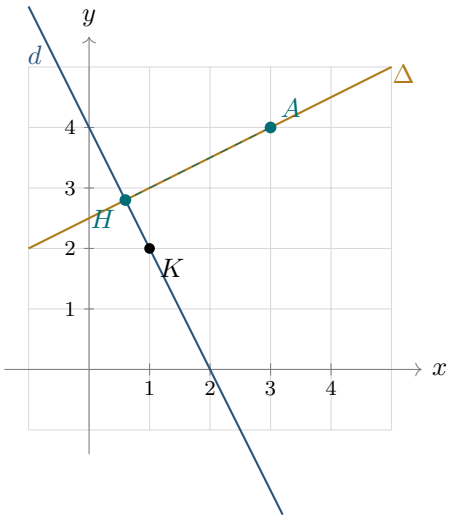
$$-\frac{13}{9}+4\times\frac{28}{9}-11=\frac{-13+112-99}{9}=\frac{0}{9}=0$$

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes : leur point commun est l'orthocentre

6. Le point H est placé sur la figure de la question 1. On remarque qu'il est ici *intérieur* au triangle, ce qui est le cas lorsque le triangle a tous ses angles aigus.

EXERCICE 24 ⋆⋆

1. Voici la figure.



2. La droite d a pour vecteur normal $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, donc pour vecteur directeur $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. Ce dernier est normal à Δ, dont l'équation est de la forme $x-2y+c=0$; avec $A(3\,;4)$:

$$3-8+c=0 \iff c=5 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\Delta : x-2y+5=0}$$

3. On résout :

$$\begin{cases} 2x+y &= 4\\ x-2y &= -5 \end{cases}$$

La seconde ligne donne $x=2y-5$; en substituant : $2(2y-5)+y=4$, soit $5y=14$ et $y=\dfrac{14}{5}$, puis $x=\dfrac{28}{5}-5=\dfrac{3}{5}$:

$$\boxed{H\left(\frac{3}{5}\,;\frac{14}{5}\right)=(0{,}6\,;2{,}8)}$$

$\boxed{H \text{ est le projeté orthogonal de } A \text{ sur } d}$

4.

$$AH=\sqrt{\left(3-\frac{3}{5}\right)^2+\left(4-\frac{14}{5}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{144+36}{25}}=\frac{\sqrt{180}}{5}$$

$$\boxed{AH=\frac{6\sqrt{5}}{5}\approx 2{,}68}$$

5. On vérifie : $2 \times 1 + 2 - 4 = 0$, donc $\boxed{K \text{ appartient à } d}$. Par ailleurs :

$$AK = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$$

On constate que $AH < AK$, ce qui était prévisible : le triangle AHK est rectangle en H, donc $[AK]$ en est l'hypoténuse, et c'est le plus grand côté.

$$\boxed{\text{Le projeté orthogonal réalise la plus courte distance de } A \text{ à } d}$$

Équations de cercles

EXERCICE 25 ⋆

1. On applique la proposition 2 : le cercle de centre $\Omega(a\,;b)$ et de rayon R a pour équation $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.
   (a) $\boxed{(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25}$
   (b) $\boxed{x^2 + y^2 = 7}$
   (c) $\boxed{(x+1)^2 + y^2 = 9}$

   On prendra garde aux signes : le centre ayant pour ordonnée -3 en a), l'équation contient $(y-(-3))^2 = (y+3)^2$.
2. (a) Centre $\boxed{(4\,;-1)}$ et rayon $\boxed{R=4}$
   (b) Centre $\boxed{(-2\,;5)}$ et rayon $\boxed{R=\sqrt{3} \approx 1{,}73}$
   (c) Centre $\boxed{(0\,;1)}$ et rayon $\boxed{R=1}$

   Le second membre est le rayon *au carré* : il ne faut pas confondre $R^2 = 3$ et $R = 3$.
3. On remplace x par 5 et y par 1 dans le membre de gauche :

$$(5-2)^2 + (1+3)^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

   Le résultat est bien égal à 25 : $\boxed{A \text{ appartient au cercle}}$

EXERCICE 26 ⋆

1. Le rayon est la distance AB :

$$AB = \sqrt{(3-(-2))^2 + (4-1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

   Il est inutile d'extraire cette racine, puisque c'est $R^2 = 34$ qui figure dans l'équation :

$$\boxed{(x+2)^2 + (y-1)^2 = 34}$$

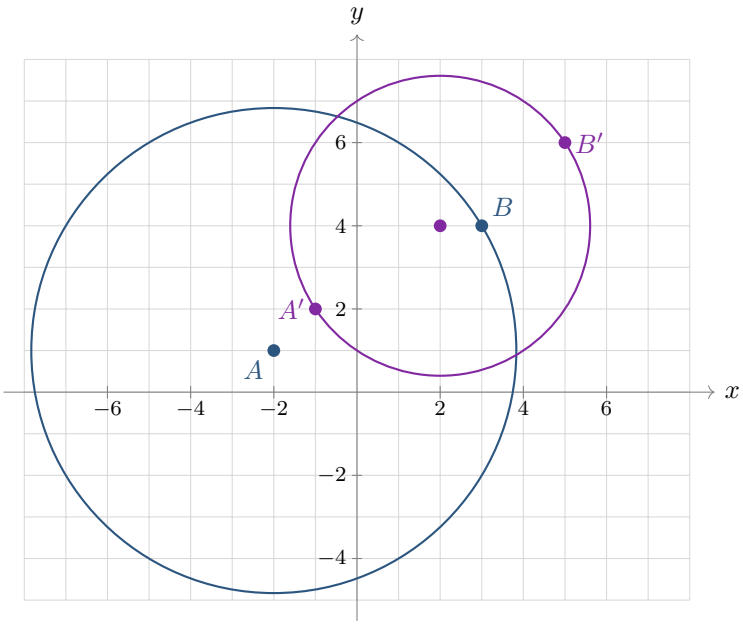
2. Le centre Ω est le milieu de $[AB]$:

$$\Omega\left(\frac{-1+5}{2}\,;\frac{2+6}{2}\right) = \Omega(2\,;4)$$

   Le rayon vaut la moitié de AB. Or $AB = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$, donc $R = \dfrac{\sqrt{52}}{2}$ et :

$$R^2 = \frac{52}{4} = 13 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{(x-2)^2 + (y-4)^2 = 13}$$

3. Voici les deux cercles.



Le premier cercle est tracé en bleu ardoise, le second en violet ; on a noté $A'(-1\,;2)$ et $B'(5\,;6)$ les extrémités du diamètre du second, pour ne pas les confondre avec les points de la question 1.

EXERCICE 27 ⋆⋆

La méthode est toujours la même : on regroupe les termes en x d'une part, en y d'autre part, et l'on complète chaque groupe pour reconnaître le début d'une identité remarquable.

1.

$$x^2+y^2-4x+6y-3=0 \iff \underbrace{x^2-4x+4}_{=(x-2)^2}-4+\underbrace{y^2+6y+9}_{=(y+3)^2}-9-3=0$$
$$\iff (x-2)^2+(y+3)^2=16$$

Cercle de centre $(2\,;-3)$ et de rayon 4

2.

$$x^2+y^2+2x-8y+1=0 \iff (x+1)^2-1+(y-4)^2-16+1=0$$
$$\iff (x+1)^2+(y-4)^2=16$$

Cercle de centre $(-1\,;4)$ et de rayon 4

3.

$$x^2+y^2-6x+9=0 \iff (x-3)^2-9+y^2+9=0 \iff (x-3)^2+y^2=0$$

Une somme de deux carrés est nulle si et seulement si chacun l'est, donc $x=3$ et $y=0$:

Ce n'est pas un cercle : l'ensemble se réduit au seul point $(3\,;0)$

On peut voir cela comme un cercle de rayon nul.

4.

$$x^2+y^2+2x+4y+10=0 \iff (x+1)^2-1+(y+2)^2-4+10=0$$
$$\iff (x+1)^2+(y+2)^2=-5$$

Une somme de deux carrés ne peut pas être négative :

Ce n'est pas un cercle : aucun point ne convient, l'ensemble est vide

5.

$$x^2+y^2-x-3y=0 \iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}=0$$
$$\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{10}{4}$$

$$\boxed{\text{Cercle de centre } \left(\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right) \text{ et de rayon } \frac{\sqrt{10}}{2}\approx 1{,}58}$$

On remarque au passage que ce cercle passe par l'origine, ce qui se lit directement sur l'équation : $x=y=0$ la vérifie.

EXERCICE 28 ⋆⋆

1. Les points d'où l'on voit $[AB]$ sous un angle droit semblent décrire un cercle passant par A et par B. La figure obtenue à la question 6 le confirme.

2.

$$\boxed{\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-1-x\\2-y\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}5-x\\4-y\end{pmatrix}}$$

3. On écrit le produit scalaire puis on développe :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= (-1-x)(5-x)+(2-y)(4-y)\\ &= -5+x-5x+x^2+8-2y-4y+y^2\\ &= x^2+y^2-4x-6y+3\end{aligned}$$

$$\boxed{M\in\mathcal{E} \iff x^2+y^2-4x-6y+3=0}$$

4. On procède comme à l'exercice 27 :

$$x^2+y^2-4x-6y+3=0 \iff (x-2)^2-4+(y-3)^2-9+3=0 \iff (x-2)^2+(y-3)^2=10$$

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est le cercle de centre } \Omega(2\,;3) \text{ et de rayon } \sqrt{10}\approx 3{,}16}$$

5. Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{-1+5}{2}\,;\frac{2+4}{2}\right)=(2\,;3)$: c'est bien Ω. Par ailleurs $AB=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}$, donc :

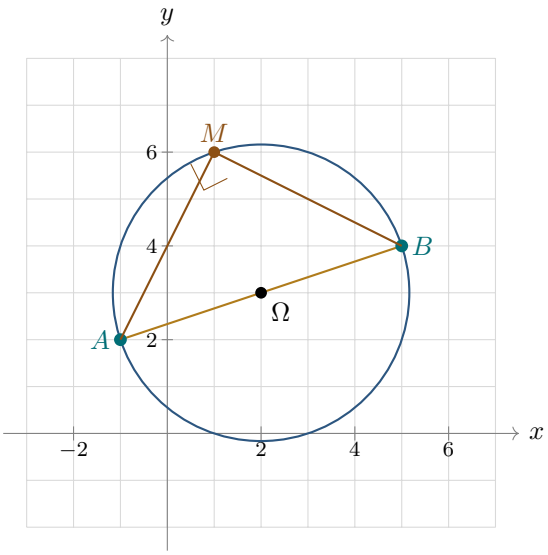
$$\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{40}}{2} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{AB}{2}\right)^2=\frac{40}{4}=10=R^2$$

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est le cercle de diamètre } [AB]}$$

On retrouve ainsi une propriété connue depuis le collège :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Un point } M \text{ distinct de } A \text{ et } B \text{ voit } [AB] \text{ sous un angle droit}\\ \text{si et seulement s'il appartient au cercle de diamètre } [AB]\end{array}}$$

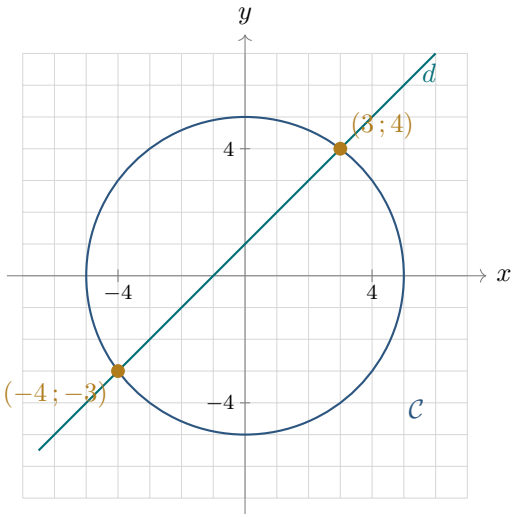
6. Voici la figure complétée.



On vérifie sur un exemple : pour $M(1\,;6)$, on a $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$, dont le produit scalaire vaut $-8+8=0$. Le point M appartient bien à $\mathcal{E}$.

EXERCICE 29 ⋆⋆

1. (a) Le cercle a pour centre O et pour rayon 5 ; la droite passe par $(0\,;1)$ et a pour coefficient directeur 1.



(b) On remplace y par $x+1$ dans l'équation du cercle :

$$\begin{aligned} x^2+(x+1)^2=25 &\iff x^2+x^2+2x+1=25\\ &\iff 2x^2+2x-24=0\\ &\iff x^2+x-12=0 \end{aligned}$$

Le discriminant vaut $\Delta=1+48=49$, d'où $\sqrt{\Delta}=7$ et :

$$x=\frac{-1-7}{2}=-4 \qquad \text{ou} \qquad x=\frac{-1+7}{2}=3$$

En reportant dans $y=x+1$:

$$\boxed{\text{Les points d'intersection sont } (-4\,;-3) \text{ et } (3\,;4)}$$

2. (a) La droite d' a pour vecteur normal $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, donc pour vecteur directeur $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$. La perpendiculaire à d' passant par $\Omega(1\,;2)$ admet donc ce dernier pour vecteur normal :

$$4x-3y+c=0 \quad \text{avec} \quad 4-6+c=0 \quad \text{soit} \quad c=2$$

On résout alors :

$$\begin{cases} 3x+4y &= 5\\ 4x-3y &= -2 \end{cases}$$

En multipliant la première ligne par 3 et la seconde par 4, puis en additionnant : $25x = 15-8=7$, d'où $x=\dfrac{7}{25}$, puis $y=\dfrac{26}{25}$:

$$\boxed{H\left(\frac{7}{25}\,;\frac{26}{25}\right)}$$

(b)

$$\Omega H=\sqrt{\left(1-\frac{7}{25}\right)^2+\left(2-\frac{26}{25}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{18}{25}\right)^2+\left(\frac{24}{25}\right)^2}=\frac{\sqrt{324+576}}{25}=\frac{30}{25}$$

$$\boxed{\Omega H=\frac{6}{5}=1{,}2}$$

Comme $1{,}2<3=R$, la droite passe à l'intérieur du cercle :

$$\boxed{d' \text{ coupe } \mathcal{C}' \text{ en deux points : elle est sécante}}$$

3. La droite d'' a le même vecteur normal que d' : la perpendiculaire issue de Ω est donc encore $4x-3y+2=0$. On résout :

$$\begin{cases} 3x+4y &= -4\\ 4x-3y &= -2 \end{cases}$$

Par la même combinaison, $25x=-12-8=-20$, d'où $x=-\dfrac{4}{5}$, puis $y=-\dfrac{2}{5}$. On calcule alors :

$$\Omega H=\sqrt{\left(1+\frac{4}{5}\right)^2+\left(2+\frac{2}{5}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{81+144}}{5}=\frac{15}{5}=3$$

Cette distance est exactement égale au rayon :

$$\boxed{d'' \text{ est tangente à } \mathcal{C}', \text{ au point de contact } H\left(-\frac{4}{5}\,;-\frac{2}{5}\right)}$$

Exercices de synthèse

EXERCICE 30 : QCM ⋆

Question	Réponse	Justification
1	**A**	$3 \times 2 + (-1) \times 5 = 6 - 5 = 1$. La réponse B additionnerait les produits sans tenir compte du signe.
2	**A**	$4 \times 3 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12 \times \frac{1}{2} = 6$. La réponse B oublie le cosinus.
3	**B**	C'est la proposition 1 : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(0) = \|\vec{u}\|^2$.
4	**B**	Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si le cosinus de leur angle est nul, donc si et seulement si leur produit scalaire est nul.
5	**A**	Pour $ax + by + c = 0$, le vecteur normal est $\binom{a}{b}$. Le vecteur $\binom{3}{4}$ est ici *directeur* : c'est le piège de la question.
6	**B**	L'équation $(x+1)^2 = (x-(-1))^2$ correspond à une abscisse de centre égale à -1, et $(y-2)^2$ à une ordonnée égale à 2.
7	**C**	Le second membre vaut R^2, donc $R = \sqrt{5}$ et non 5.
8	**C**	C'est le cas d'égalité $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1$, obtenu lorsque l'angle vaut π.
9	**B**	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 2\sqrt{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$. On peut aussi projeter C sur (AB) en B : le produit vaut $AB^2 = 4$.
10	**A**	L'équation s'écrit $1 \times x + 0 \times y - 3 = 0$, d'où le vecteur normal $\binom{1}{0}$. Le vecteur $\binom{3}{0}$ convient aussi, mais il est colinéaire à $\binom{1}{0}$ et la réponse A est la forme attendue.

EXERCICE 31 : VRAI OU FAUX ⋆⋆

1. **Vraie**. C'est la symétrie du produit scalaire, énoncée à la proposition 6. Elle se lit aussi sur l'expression analytique : $xx' + yy' = x'x + y'y$.
2. **Fausse**. C'est le point le plus important du chapitre : deux vecteurs *non nuls* peuvent avoir un produit scalaire nul. Contre-exemple avec $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$:
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$$
et pourtant aucun des deux n'est nul : ils sont simplement orthogonaux.
3. **Vraie**. D'après la proposition 1, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, et un carré est toujours positif.
4. **Vraie**. Le signe de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est celui de $\cos(\vec{u}, \vec{v})$, qui est strictement positif exactement lorsque la mesure principale appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.
5. **Fausse**. Le produit scalaire de deux vecteurs est un **nombre réel**, ce qui explique d'ailleurs son nom : un scalaire. C'est ce qui le distingue du produit vectoriel évoqué dans l'introduction du cours.
6. **Fausse**. Cette formule n'est valable que dans un repère **orthonormé**. C'est une hypothèse explicite de la proposition 5, et elle est indispensable : sa démonstration repose sur le fait que les vecteurs de base sont unitaires et orthogonaux.

7. **Fausse**. L'exercice 27 en donne deux contre-exemples : l'équation $x^2+y^2-6x+9=0$ décrit un point unique, et $x^2+y^2+2x+4y+10=0$ décrit l'ensemble vide.

8. **Vraie**. D'après l'exercice 18 :

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0$$

puisque les deux normes sont égales.

9. **Vraie**. On calcule le produit scalaire des deux vecteurs normaux :

$$2\times 3 + 3\times(-2) = 6-6 = 0$$

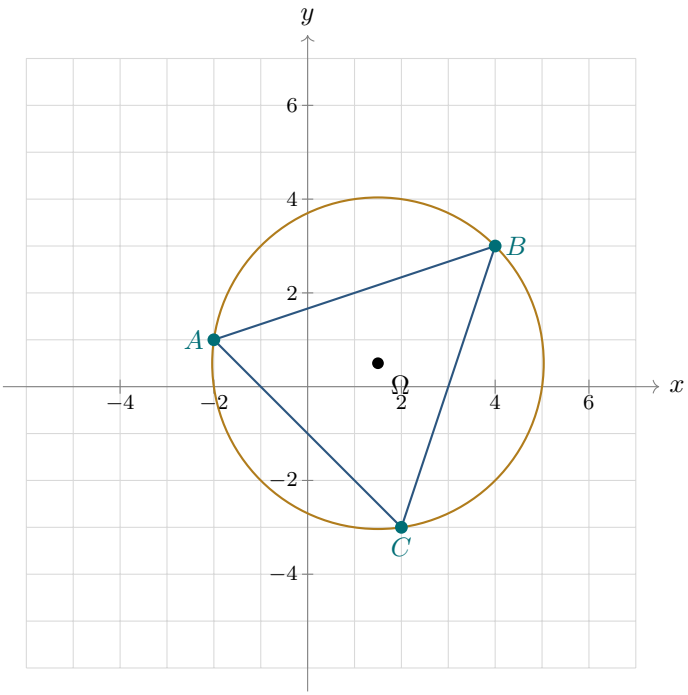
Les vecteurs normaux étant orthogonaux, les droites le sont aussi.

10. **Vraie**. On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$. Les longueurs étant positives, le produit est négatif si et seulement si le cosinus l'est, c'est-à-dire si et seulement si l'angle est obtus.

EXERCICE 32 - TYPE BAC ⋆⋆

Partie A : nature du triangle.

1. Voici la figure, complétée du cercle circonscrit obtenu à la partie C.



2. On calcule les coordonnées des vecteurs, puis les longueurs :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}$$

$$AB = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \quad ; \quad AC = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \quad ; \quad BC = \sqrt{4+36} = 2\sqrt{10}$$

$$\boxed{AB = BC = 2\sqrt{10} \approx 6{,}32 : \text{le triangle } ABC \text{ est isocèle en } B}$$

3.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6\times 4 + 2\times(-4) = 24-8 = \boxed{16}$$

$$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{16}{2\sqrt{10}\times 4\sqrt{2}} = \frac{16}{8\sqrt{20}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}}$$

Comme $\dfrac{\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}4472$, la calculatrice donne :

$$\boxed{\widehat{BAC} \approx 63{,}4^\circ}$$

Partie B : droites remarquables.

4. Le milieu de $[AC]$ est $\left(\dfrac{-2+2}{2}\,;\dfrac{1-3}{2}\right) = (0\,;-1)$, et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$, que l'on simplifie en $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, est normal à Δ :

$$x - y + c = 0 \quad \text{avec} \quad 0 + 1 + c = 0 \quad \text{soit} \quad c = -1$$

$$\boxed{\Delta : x - y - 1 = 0}$$

5. On remplace par les coordonnées de $B(4\,;3)$:

$$4 - 3 - 1 = 0$$

$$\boxed{B \text{ appartient bien à } \Delta}$$

C'était prévisible : la médiatrice de $[AC]$ est l'ensemble des points équidistants de A et de C. Or la question 2 a établi que $BA = BC$, donc B en fait partie.

6. Le milieu de $[AB]$ est $\left(\dfrac{-2+4}{2}\,;\dfrac{1+3}{2}\right) = (1\,;2)$, et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ se simplifie en $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$:

$$3x + y + c = 0 \quad \text{avec} \quad 3 + 2 + c = 0 \quad \text{soit} \quad c = -5$$

$$\boxed{\Delta' : 3x + y - 5 = 0}$$

Partie C : cercle circonscrit.

7. On résout :

$$\begin{cases} x - y &= 1 \\ 3x + y &= 5 \end{cases}$$

En additionnant les deux lignes : $4x = 6$, donc $x = \dfrac{3}{2}$, puis $y = x - 1 = \dfrac{1}{2}$:

$$\boxed{\Omega\left(\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\right)}$$

8.

$$\Omega A^2 = \left(-2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{49+1}{4} = \frac{25}{2}$$

$$\Omega B^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{50}{4} = \frac{25}{2} \qquad ; \qquad \Omega C^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

$$\boxed{\Omega A = \Omega B = \Omega C = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}54}$$

9. Le point Ω est donc équidistant des trois sommets : c'est le centre du cercle circonscrit, de rayon $R = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

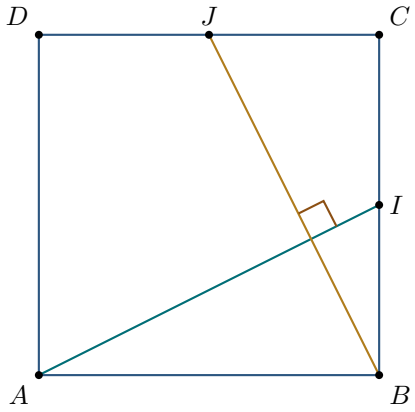
$$\boxed{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}}$$

Ce cercle est tracé en ocre sur la figure de la question 1.

EXERCICE 33 - TYPE BAC ⋆⋆

1. En traçant le carré et les deux segments, on constate qu'ils semblent se couper à angle droit.

$$\boxed{\text{Conjecture : les droites } (AI) \text{ et } (BJ) \text{ sont perpendiculaires}}$$



2. Dans le repère $\left(A\,;\frac{1}{a}\overrightarrow{AB},\frac{1}{a}\overrightarrow{AD}\right)$, les deux vecteurs de base sont unitaires et orthogonaux : le repère est bien orthonormé, et les coordonnées sont exprimées en multiples de a.

$$\boxed{A(0\,;0) \quad ; \quad B(a\,;0) \quad ; \quad C(a\,;a) \quad ; \quad D(0\,;a)}$$

Le point I est le milieu de $[BC]$ et J celui de $[CD]$:

$$\boxed{I\left(a\,;\frac{a}{2}\right) \qquad ; \qquad J\left(\frac{a}{2}\,;a\right)}$$

3.
$$\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}a\\ \frac{a}{2}\end{pmatrix} \qquad ; \qquad \overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}\frac{a}{2}-a\\ a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{a}{2}\\ a\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}=a\times\left(-\frac{a}{2}\right)+\frac{a}{2}\times a=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=\boxed{0}$$

Le produit scalaire est nul, donc les deux vecteurs sont orthogonaux :

$$\boxed{\text{La conjecture est démontrée : } (AI)\perp(BJ)}$$

4. Avec $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\ a\end{pmatrix}$:

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}=a\times\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\times a=\boxed{a^2}$$

$$AI=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{5a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}=AJ$$

$$\cos\left(\widehat{IAJ}\right)=\frac{a^2}{\frac{a\sqrt{5}}{2}\times\frac{a\sqrt{5}}{2}}=\frac{a^2}{\frac{5a^2}{4}}=\boxed{\frac{4}{5}}$$

Ce résultat ne dépend pas de a, ce qui est logique : tous les carrés sont semblables.

$$\boxed{\widehat{IAJ}\approx 36{,}9^\circ}$$

5. Dans le rectangle, $B(L\,;0)$, $C(L\,;\ell)$, $D(0\,;\ell)$, donc $I\left(L\,;\dfrac{\ell}{2}\right)$ et $J\left(\dfrac{L}{2}\,;\ell\right)$:

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ} = L\times\left(-\frac{L}{2}\right)+\frac{\ell}{2}\times\ell = \frac{\ell^2-L^2}{2}$$

Ce produit est nul si et seulement si $\ell^2 = L^2$, soit, ces longueurs étant positives :

$$\boxed{(AI)\perp(BJ) \iff L=\ell,\ \text{c'est-à-dire si et seulement si le rectangle est un carré}}$$

La propriété est donc caractéristique du carré : elle tombe en défaut dès que le rectangle s'allonge.

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

Partie A : le théorème d'Al-Kashi.

1. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$. Or $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, donc :

$$\boxed{\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}}$$

2. On développe la norme au carré, comme à l'exercice 14 :

$$\begin{aligned} BC^2 &= \left\|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right\|^2 \\ &= \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - 2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} + \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{BC^2 = AB^2+AC^2-2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}$$

3. Il reste à remplacer le produit scalaire par son expression géométrique, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\alpha) = cb\cos(\alpha)$:

$$\boxed{a^2 = b^2+c^2-2bc\cos(\alpha)}$$

4. Si $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, alors $\cos(\alpha)=0$ et le dernier terme disparaît :

$$a^2 = b^2+c^2$$

$$\boxed{\text{On retrouve le théorème de Pythagore}}$$

Le terme $-2bc\cos(\alpha)$ mesure ainsi l'écart à l'angle droit : négatif si α est aigu, positif s'il est obtus.

Partie B : applications.

5. Avec $b = AC = 5$, $c = AB = 7$ et $\alpha = 60°$:

$$BC^2 = 25+49-2\times5\times7\times\frac{1}{2} = 74-35 = 39$$

$$\boxed{BC = \sqrt{39}\approx 6{,}24}$$

6. On isole le cosinus dans la formule :

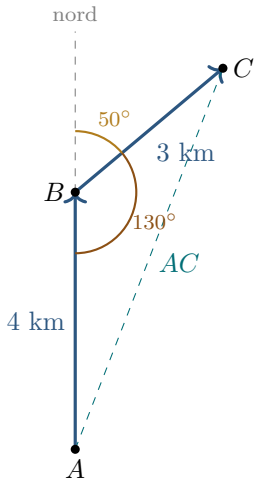
$$\cos(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{36+64-49}{2\times6\times8} = \frac{51}{96} = \boxed{\frac{17}{32}}$$

Comme $\dfrac{17}{32} = 0{,}53125$:

$$\boxed{\widehat{BAC}\approx 57{,}9°}$$

7. Le randonneur avance d'abord vers le nord, puis tourne de 50° vers l'est : l'angle intérieur du triangle en B vaut donc :

$$\widehat{ABC} = 180° - 50° = 130°$$



Le théorème d'Al-Kashi appliqué au sommet B donne alors :

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \times BA \times BC \times \cos\left(\widehat{ABC}\right)$$

$$AC^2 = 16 + 9 - 2 \times 4 \times 3 \times \cos(130°) \approx 25 + 15{,}43 \approx 40{,}43$$

$$\boxed{AC \approx 6{,}36 \text{ km}}$$

Le cosinus étant négatif, le dernier terme *augmente* la distance : c'est logique, le randonneur s'éloigne de son point de départ en ne tournant que de 50°.

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

1. Avec $M(x\,;y)$, on a $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}4-x\\-y\end{pmatrix}$, d'où :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -x(4-x) + (-y)(-y) = x^2 - 4x + y^2$$

L'équation $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ s'écrit donc $x^2 - 4x + y^2 = k$, et l'on complète le carré :

$$(x-2)^2 - 4 + y^2 = k$$

$$\boxed{M \in \mathcal{E}_k \iff (x-2)^2 + y^2 = k + 4}$$

2. On note $I(2\,;0)$, qui est le milieu de $[AB]$.

   (a) $k = 0$: le second membre vaut 4.

   $$\boxed{\text{cercle de centre } I(2\,;0) \text{ et de rayon } 2}$$

   C'est le cercle de diamètre $[AB]$, conformément à l'exercice 28.

   (b) $k = 5$: le second membre vaut 9.

   $$\boxed{\text{cercle de centre } I(2\,;0) \text{ et de rayon } 3}$$

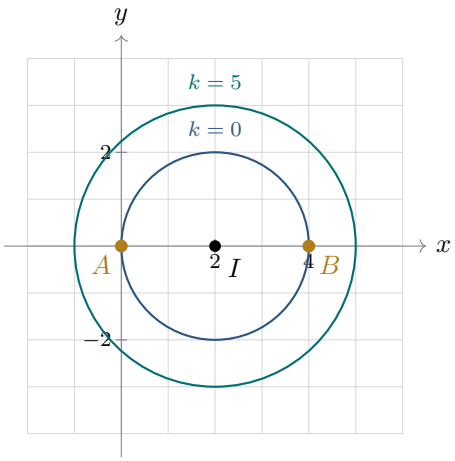
   (c) $k = -4$: le second membre vaut 0, donc $(x-2)^2 + y^2 = 0$.

   $$\boxed{\mathcal{E}_{-4} \text{ se réduit au seul point } I(2\,;0)}$$

(d) $k = -8$: le second membre vaut -4, or une somme de carrés ne peut être négative.

$$\boxed{\mathcal{E}_{-8} = \varnothing}$$

3. Voici les deux cercles.



4. Le second membre $k + 4$ doit être positif ou nul pour que l'ensemble ne soit pas vide :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{si } k > -4 & : \mathcal{E}_k \text{ est le cercle de centre } I \text{ et de rayon } \sqrt{k+4} \\ \text{si } k = -4 & : \mathcal{E}_k = \{I\} \\ \text{si } k < -4 & : \mathcal{E}_k = \varnothing \end{array}}$$

On remarque que $-4 = -\dfrac{AB^2}{4}$, puisque $AB = 4$.

5. Le point I étant le milieu de $[AB]$, on a $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$. En décomposant :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right) \\ &= \left\|\overrightarrow{MI}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{IA}\right\|^2 \end{aligned}$$

la dernière égalité étant celle de l'exercice 18. Or $IA = \dfrac{AB}{2}$:

$$\boxed{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}}$$

6. L'équation $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ devient alors, pour deux points A et B quelconques :

$$MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{si } k > -\dfrac{AB^2}{4} & : \text{cercle de centre } I \text{ et de rayon } \sqrt{k + \dfrac{AB^2}{4}} \\ \text{si } k = -\dfrac{AB^2}{4} & : \text{le point } I \text{ seul} \\ \text{si } k < -\dfrac{AB^2}{4} & : \text{l'ensemble vide} \end{array}}$$

On retrouve exactement la discussion de la question 4, mais cette fois sans aucun repère : le résultat est purement géométrique, et le centre est toujours le milieu de $[AB]$.