EXERCICES – CHAPITRE 7

PRODUIT SCALAIRE

Définition géométrique

EXERCICE 1 ⋆

Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ à partir des données suivantes. On donnera des valeurs exactes.

a) $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{3}$

b) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 7$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$

c) $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 6$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2}$

d) $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 8$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

e) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{3\pi}{4}$

f) $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = -\dfrac{\pi}{6}$

g) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{2\pi}{3}$

h) $\vec{u} = \vec{0}$ et $\|\vec{v}\| = 9$

Que remarque-t-on en comparant les questions e) et f) ? Le signe du produit scalaire dépend-il du signe de l'angle ?

EXERCICE 2 ⋆

1. ABC est un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$. Faire une figure, puis calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. $ABCD$ est un carré de côté 3. Faire une figure, puis calculer :
   (a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ (b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ (c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ (d) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
3. ABC est un triangle équilatéral de côté 6. Faire une figure, puis calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$. *Attention pour le second : l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ n'est pas l'angle du triangle en B. On placera soigneusement les deux vecteurs à partir d'une même origine.*

EXERCICE 3 ⋆

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ pour chacune des trois figures suivantes.

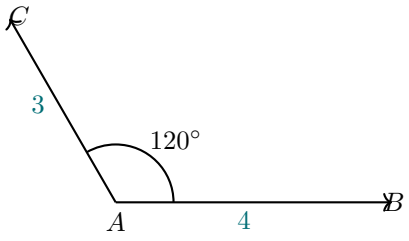


Figure 1

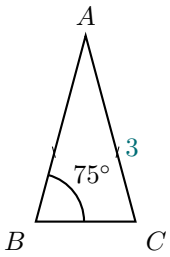


Figure 2

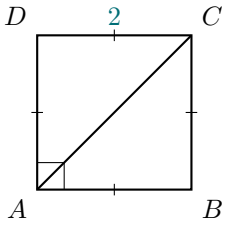
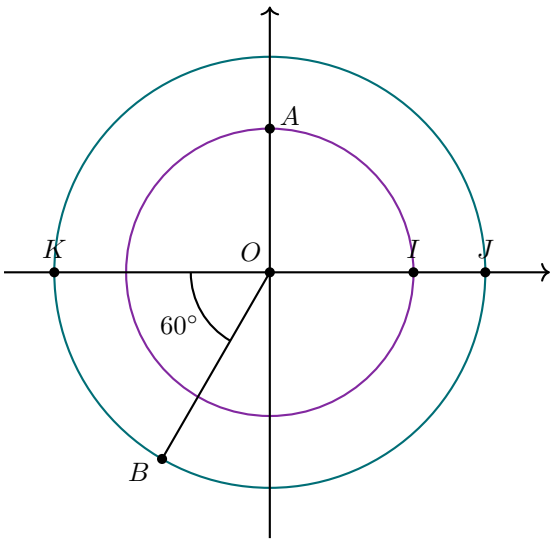


Figure 3

Pour la figure 2, on commencera par déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

EXERCICE 4 ⋆

On a construit la figure ci-dessous en traçant deux cercles de centre O tels que $OI = 2$ et $OJ = 3$. Les points I, J et K appartiennent à l'axe horizontal, le point A à l'axe vertical, et $\left(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OB}\right) = -60°$.



Calculer les produits scalaires suivants. On donnera des valeurs exactes.

a) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OJ}$

b) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OK}$

c) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OB}$

d) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}$

e) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AI}$

f) $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IJ}$

Pour e) et f), les deux vecteurs n'ont pas la même origine : on commencera par les redessiner à partir d'un même point.

EXERCICE 5 ⋆

1. Pour chacune des mesures d'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ suivantes, donner le signe de $\vec{u} \cdot \vec{v}$, où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls :

   (a) $\dfrac{\pi}{4}$ (b) $\dfrac{2\pi}{3}$ (c) $\dfrac{\pi}{2}$ (d) 0 (e) π (f) $\dfrac{5\pi}{6}$ (g) $-\dfrac{\pi}{3}$ (h) $-\dfrac{3\pi}{4}$

2. Compléter : $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ si et seulement si la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ appartient à l'intervalle $\ldots\ldots$

3. On donne $\|\vec{u}\| = 7$. Que vaut $\vec{u} \cdot \vec{u}$?

4. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = 3$. Que vaut $\vec{u} \cdot \vec{v}$ si les deux vecteurs sont colinéaires de même sens ? de sens contraire ? orthogonaux ?

5. En déduire que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$-\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \leqslant \vec{u} \cdot \vec{v} \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

EXERCICE 6 ⋆⋆

Sur chacune des deux figures ci-dessous, H désigne le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

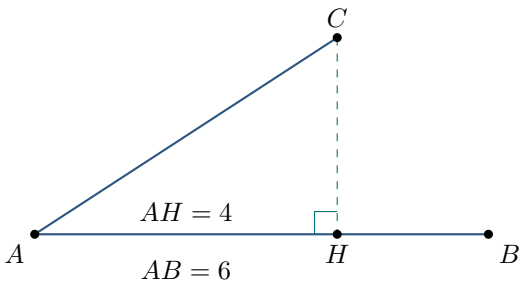


Figure 1

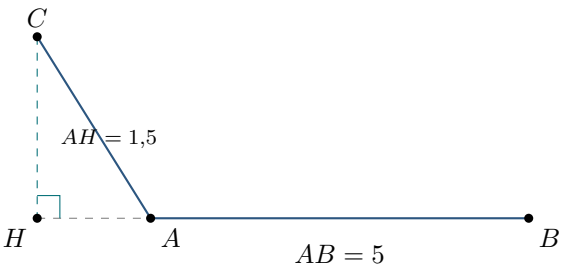


Figure 2

1. Pour chaque figure, préciser si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens ou des sens contraires.
2. En déduire, dans chaque cas, la valeur de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
3. Sur la figure 1, l'angle $\widehat{BAC}$ est-il aigu ou obtus ? Même question sur la figure 2. Quel lien fait-on avec le signe du produit scalaire ?

EXERCICE 7 ⋆

À chacune des cinq figures ci-dessous, faire correspondre le calcul de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ adapté, choisi dans la liste suivante. On justifiera chaque association.

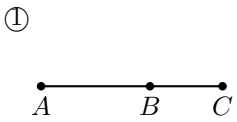
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$

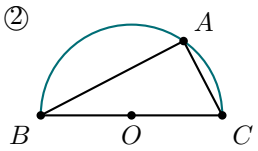
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2$

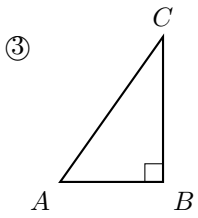
c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB^2$

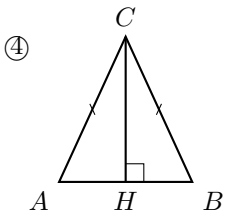
d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}AB^2$

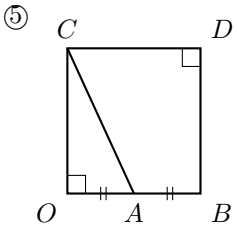
e) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$





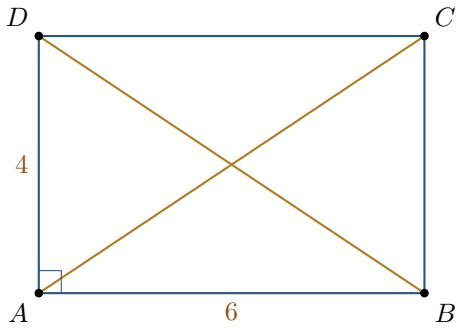






EXERCICE 8 ⋆⋆

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 4$.



1. En utilisant à chaque fois le projeté orthogonal, calculer :

   (a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ (b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ (c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$ (d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$

   Pour a), on commencera par identifier le projeté orthogonal de C sur (AB).

2. On munit le plan du repère orthonormé $\left(A\,;\frac{1}{6}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)$, dans lequel $A(0\,;0)$, $B(6\,;0)$, $C(6\,;4)$ et $D(0\,;4)$. Retrouver les quatre résultats précédents par le calcul avec les coordonnées.

3. Calculer de même $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$. Les diagonales d'un rectangle sont-elles perpendiculaires ? Et celles d'un carré ?

Approche analytique

EXERCICE 9 ⋆

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chacun des cas suivants.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$

e) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

f) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{8}\\-\sqrt{27}\end{pmatrix}$

Calculer enfin $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ dans le cas a).

EXERCICE 10 ⋆

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-1\,;2)$, $B(3\,;4)$ et $C(2\,;-1)$.

1. Placer ces trois points dans un repère.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
3. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.
4. Calculer les longueurs AB, AC et BC. Le triangle ABC semble-t-il particulier ?

EXERCICE 11 ⋆

1. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?
2. Même question pour $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.
3. Déterminer le réel m pour que $\vec{u}\begin{pmatrix}m\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ soient orthogonaux.
4. Déterminer le réel m pour que $\vec{u}\begin{pmatrix}m\\m+1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ soient orthogonaux.
5. On donne $A(1\,;2)$, $B(3\,;m)$ et $C(-1\,;0)$. Déterminer m pour que le triangle ABC soit rectangle en A.

EXERCICE 12 ⋆⋆

Le produit scalaire admet deux expressions : l'une géométrique, l'autre avec les coordonnées. En les égalant, on obtient l'angle entre deux vecteurs :

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$$

1. Déterminer la mesure exacte de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$ pour $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.
2. Même question pour $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$.
3. On donne $A(0\,;0)$, $B(4\,;0)$ et $C(1\,;3)$. Après avoir fait une figure, déterminer une valeur approchée au dixième de degré de l'angle $\widehat{BAC}$.

EXERCICE 13 ⋆⋆

Pour chacun des triangles suivants, faire une figure, puis déterminer sa nature en justifiant par des produits scalaires et des calculs de longueurs.

1. $A(1\,;1)$, $B(5\,;3)$ et $C(0\,;3)$.
2. $A(0\,;0)$, $B(4\,;0)$ et $C(2\,;2)$.
3. $A(-2\,;1)$, $B(1\,;2)$ et $C(0\,;-1)$.

Pour le premier, vérifier de plus que l'égalité de Pythagore est bien satisfaite.

Propriétés du produit scalaire

EXERCICE 14 ⋆

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan. Développer et réduire les expressions suivantes, en utilisant $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

a) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

b) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$

c) $(2\vec{u}-3\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$

d) $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

e) $(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})\cdot\vec{u}$

f) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$

EXERCICE 15 ⋆

On donne $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$. Calculer :

a) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$, puis $\|\vec{u} + \vec{v}\|$

b) $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$, puis $\|\vec{u} - \vec{v}\|$

c) $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 3\vec{v})$

d) $\|\vec{u} + 2\vec{v}\|^2$

L'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est-il aigu ou obtus ? Justifier sans le calculer.

EXERCICE 16 ⋆⋆

1. ABC est un triangle tel que $AB = 7$, $AC = 5$ et $BC = 6$.
   (a) Justifier que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.
   (b) En utilisant la formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
   (c) En déduire une valeur approchée au dixième de degré de l'angle $\widehat{BAC}$.
2. $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 5$, $AD = 3$ et $AC = 7$.
   (a) Faire une figure. Justifier que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
   (b) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
   (c) En remarquant que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, calculer BD.

EXERCICE 17 ⋆⋆

$ABCD$ est un parallélogramme quelconque. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

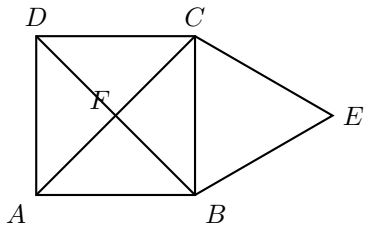
1. Justifier que $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{BD} = \vec{v} - \vec{u}$.
2. Démontrer que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right)$$
3. En déduire la règle du parallélogramme :
$$AC^2 + BD^2 = 2\left(AB^2 + AD^2\right)$$
4. Vérifier cette égalité sur le parallélogramme de l'exercice 16, question 2.

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. Démontrer que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$
2. En déduire que si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$, alors les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux.
3. $ABCD$ est un losange. En posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, faire une figure puis démontrer que ses diagonales sont perpendiculaires.
4. Démontrer enfin la troisième formule de la proposition 6 du cours :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$$

EXERCICE 19 ⋆⋆

La figure ci-dessous est constituée d'un carré $ABCD$ de côté 1 et d'un triangle BEC équilatéral. Le point F est le centre du carré, c'est-à-dire le point d'intersection de ses diagonales.



Déterminer les produits scalaires suivants **sans utiliser de repère ni de coordonnées**, mais à l'aide de la relation de Chasles, des propriétés de la proposition 6 et du projeté orthogonal.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
d) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
e) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA}$
f) $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AC}$
g) $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{AD}$
h) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BE}$
i) $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{EC}$
j) $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AC}$
k) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$
l) $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CF}$

Vecteur normal et équations de droites

EXERCICE 20 ⋆

Pour chacune des droites suivantes, donner un vecteur normal, puis un vecteur directeur.

a) $d_1 : 3x - 5y + 2 = 0$
b) $d_2 : x + 4y = 0$
c) $d_3 : 2x - 7 = 0$
d) $d_4 : -y + 3 = 0$
e) $d_5 : \dfrac{x}{2} + 3y - 1 = 0$
f) $d_6 : -4x + y + 9 = 0$

Pour c) et d), préciser la position particulière de la droite dans le repère.

EXERCICE 21 ⋆

Déterminer une équation cartésienne de la droite d dans chacun des cas suivants.

1. d admet $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ pour vecteur normal et passe par $A(-1\,;3)$.
2. d admet $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ pour vecteur normal et passe par l'origine du repère.
3. d admet $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ pour vecteur normal et passe par $C(2\,;-5)$.
4. d passe par $A(1\,;2)$ et est perpendiculaire à la droite (BC), où $B(0\,;1)$ et $C(4\,;3)$.

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à $d : 2x - 3y + 1 = 0$ passant par $A(4\,;1)$.
2. Les droites $d : x + 2y - 3 = 0$ et $d' : 2x - y + 5 = 0$ sont-elles perpendiculaires ? Justifier.
3. Déterminer le réel m pour que les droites $d : mx + 3y - 1 = 0$ et $d' : 2x - y + 4 = 0$ soient perpendiculaires.
4. Les droites $d : 3x - y + 2 = 0$ et $d' : 6x - 2y - 5 = 0$ sont-elles perpendiculaires ? parallèles ? Justifier.

EXERCICE 23 ⋆⋆

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(1\,;2)$, $B(5\,;4)$ et $C(0\,;6)$.

1. Placer les trois points et tracer le triangle ABC.
2. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$.
   On rappelle qu'elle passe par le milieu de $[AB]$ *et qu'elle est perpendiculaire à* (AB).
3. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur du triangle issue de C, puis de celle issue de A.
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de ces deux hauteurs.
5. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de B et vérifier que H lui appartient également. Quel résultat de géométrie retrouve-t-on ainsi ?
6. Placer H sur la figure.

EXERCICE 24 ⋆⋆

Dans un repère orthonormé, on considère la droite $d : 2x + y - 4 = 0$ et le point $A(3\,;4)$.

1. Tracer d et placer A.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ perpendiculaire à d passant par A.
3. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de d et de Δ. Que représente H pour le point A et la droite d ?
4. Calculer la longueur AH. On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée au centième.
5. Le point $K(1\,;2)$ appartient-il à d ? Comparer AK et AH. Ce résultat était-il prévisible ?

Équations de cercles

EXERCICE 25 ⋆

1. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ dans chacun des cas suivants :
   (a) centre $\Omega(2\,;-3)$ et rayon 5 ;
   (b) centre $O(0\,;0)$ et rayon $\sqrt{7}$;
   (c) centre $\Omega(-1\,;0)$ et rayon 3.
2. Donner le centre et le rayon des cercles d'équations :
   (a) $(x-4)^2+(y+1)^2=16$ (b) $(x+2)^2+(y-5)^2=3$ (c) $x^2+(y-1)^2=1$
3. Le point $A(5\,;1)$ appartient-il au cercle d'équation $(x-2)^2+(y+3)^2=25$? Justifier par un calcul.

EXERCICE 26 ⋆

1. Déterminer une équation du cercle de centre $A(-2\,;1)$ passant par le point $B(3\,;4)$.
2. Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$, où $A(-1\,;2)$ et $B(5\,;6)$.
   On déterminera d'abord le centre, puis le rayon.
3. Tracer ces deux cercles dans un même repère.

EXERCICE 27 ⋆⋆

Dans chaque cas, déterminer si l'équation proposée est celle d'un cercle. Si oui, en préciser le centre et le rayon. *On fera apparaître des identités remarquables.*

1. $x^2+y^2-4x+6y-3=0$
2. $x^2+y^2+2x-8y+1=0$
3. $x^2+y^2-6x+9=0$
4. $x^2+y^2+2x+4y+10=0$
5. $x^2+y^2-x-3y=0$

Deux de ces cinq équations ne définissent pas un cercle : on précisera à chaque fois quel est l'ensemble des points dont les coordonnées les vérifient.

EXERCICE 28 ⋆⋆

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-1\,;2)$ et $B(5\,;4)$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

1. Placer A et B, puis quelques points de $\mathcal{E}$ obtenus « à vue » en cherchant des points d'où l'on voit $[AB]$ sous un angle droit. Que semble être $\mathcal{E}$?
2. Exprimer les coordonnées de $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en fonction de x et y.
3. Démontrer que M appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si :
$$x^2+y^2-4x-6y+3=0$$
4. Démontrer que cette équation est celle d'un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

5. Vérifier que ce centre est le milieu de $[AB]$ et que ce rayon vaut $\dfrac{AB}{2}$. Énoncer la propriété de géométrie ainsi retrouvée.
6. Tracer $\mathcal{E}$ sur la figure de la question 1.

EXERCICE 29 ⋆⋆

1. On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = 25$ et la droite d d'équation $y = x + 1$.
   (a) Tracer $\mathcal{C}$ et d dans un même repère.
   (b) Déterminer par le calcul les coordonnées de leurs points d'intersection.
   On remplacera y par $x + 1$ dans l'équation du cercle.
2. On considère maintenant le cercle $\mathcal{C}'$ de centre $\Omega(1\,;2)$ et de rayon 3, ainsi que la droite d' : $3x + 4y - 5 = 0$.
   (a) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de Ω sur d'.
   (b) Calculer ΩH et le comparer au rayon. En déduire la position relative de $\mathcal{C}'$ et de d'.
3. En procédant de la même façon, démontrer que la droite d'' : $3x + 4y + 4 = 0$ est tangente au cercle $\mathcal{C}'$, et déterminer les coordonnées du point de contact.

Exercices de synthèse

EXERCICE 30 : QCM ⋆

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. La justifier. Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Question	**Réponse A**	**Réponse B**	**Réponse C**
1. Si $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}$ vaut :	1	11	-1
2. Si $\|\vec{u}\|=4$, $\|\vec{v}\|=3$ et $(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\pi}{3}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}$ vaut :	6	12	-6
3. Pour tout vecteur $\vec{u}$, le produit $\vec{u}\cdot\vec{u}$ vaut :	$\|\vec{u}\|$	$\|\vec{u}\|^2$	0
4. Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire vaut :	1	0	-1
5. Un vecteur normal à la droite $4x-3y+7=0$ est :	$\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$
6. Le cercle d'équation $(x+1)^2+(y-2)^2=9$ a pour centre :	$(1\,;-2)$	$(-1\,;2)$	$(-1\,;-2)$
7. Le cercle d'équation $(x-3)^2+(y+1)^2=5$ a pour rayon :	5	25	$\sqrt{5}$
8. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$, alors ils sont :	orthogonaux	colinéaires de même sens	colinéaires de sens contraire
9. Dans un carré $ABCD$ de côté 2, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ vaut :	0	4	$4\sqrt{2}$
10. La droite d'équation $x=3$ admet pour vecteur normal :	$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

EXERCICE 31 : VRAI OU FAUX ⋆⋆

Chacune des affirmations suivantes est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse : par une démonstration si l'affirmation est vraie, par un contre-exemple sinon.

1. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$.
2. Si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, alors $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$.

3. Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} \cdot \vec{u} \geqslant 0$.
4. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$, alors la mesure principale de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ appartient à $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.
5. Le produit scalaire de deux vecteurs est un vecteur.
6. La formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ est valable dans n'importe quel repère.
7. Toute équation de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ est celle d'un cercle.
8. Si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$, alors $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$.
9. Deux droites de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{n}'\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ sont perpendiculaires.
10. Si trois points A, B et C vérifient $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < 0$, alors l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus.

EXERCICE 32 - TYPE BAC ⋆⋆

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(-2\,;1)$, $B(4\,;3)$ et $C(2\,;-3)$.

Partie A : nature du triangle.

1. Placer les trois points et tracer le triangle ABC.
2. Calculer les longueurs AB, AC et BC. Que peut-on en déduire ?
3. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, puis en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\widehat{BAC}\right)$ et une valeur approchée au dixième de degré de cet angle.

Partie B : droites remarquables.

4. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice Δ du segment $[AC]$.
5. Vérifier par le calcul que le point B appartient à Δ. Ce résultat était-il prévisible d'après la question 2 ?
6. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice Δ' du segment $[AB]$.

Partie C : cercle circonscrit.

7. Déterminer les coordonnées du point Ω, intersection de Δ et Δ'.
8. Calculer ΩA, puis vérifier que $\Omega B = \Omega C = \Omega A$.
9. En déduire une équation du cercle circonscrit au triangle ABC, puis le tracer sur la figure.

EXERCICE 33 - TYPE BAC ⋆⋆

$ABCD$ est un carré de côté $a > 0$. On note I le milieu de $[BC]$ et J celui de $[CD]$.

1. Faire une figure soignée avec $a = 6$ cm, puis tracer les segments $[AI]$ et $[BJ]$. Que peut-on conjecturer à propos des droites (AI) et (BJ) ?
2. On munit le plan du repère orthonormé $\left(A\,; \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}\right)$. Donner les coordonnées des points A, B, C, D, I et J dans ce repère.
3. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BJ}$, puis calculer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ}$. Conclure quant à la conjecture.
4. Calculer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$, ainsi que les longueurs AI et AJ. En déduire une valeur approchée au dixième de degré de l'angle $\widehat{IAJ}$.
5. *Généralisation.* On remplace le carré par un rectangle de longueur $L = AB$ et de largeur $\ell = AD$. Reprendre la question 3 et déterminer à quelle condition sur L et ℓ les droites (AI) et (BJ) restent perpendiculaires.

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

Partie A : le théorème d'Al-Kashi.

Soit ABC un triangle quelconque. On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, et α la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

1. Justifier l'égalité vectorielle $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.
2. En développant $\left\|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right\|^2$, démontrer que :
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$
3. En déduire le théorème d'Al-Kashi :
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
4. Que devient cette formule lorsque $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$? Quel théorème retrouve-t-on ?

Partie B : applications.

5. Dans un triangle ABC, on donne $AB = 7$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = 60°$. Calculer la valeur exacte de BC, puis une valeur approchée au centième.
6. Dans un triangle ABC, on donne $AB = 8$, $AC = 6$ et $BC = 7$. Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\widehat{BAC}\right)$, puis une valeur approchée au dixième de degré de cet angle.
7. Un randonneur part d'un point A, marche 4 km vers le nord jusqu'à un point B, puis tourne de 50° vers l'est et marche encore 3 km jusqu'à un point C. Faire un schéma, puis calculer la distance AC à 10 m près.
On commencera par déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(0\,;0)$ et $B(4\,;0)$. Pour tout réel k, on note $\mathcal{E}_k$ l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan tels que :
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$$

1. Démontrer que M appartient à $\mathcal{E}_k$ si et seulement si :
$$(x-2)^2 + y^2 = k + 4$$
2. En déduire la nature de $\mathcal{E}_k$ dans chacun des cas suivants, en précisant les éléments caractéristiques lorsqu'il s'agit d'un cercle :
   (a) $k = 0$ (b) $k = 5$ (c) $k = -4$ (d) $k = -8$
3. Tracer dans un même repère les ensembles obtenus pour $k = 0$ et $k = 5$.
4. Discuter, selon la valeur de k, la nature de $\mathcal{E}_k$.
5. On note I le milieu de $[AB]$. Démontrer que pour tout point M du plan :
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$
On pourra écrire $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$, puis remarquer que $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$.
6. Retrouver ainsi le résultat de la question 4 pour deux points A et B quelconques.