CORRIGÉ – CHAPITRE 8

EXPONENTIELLE

Propriétés algébriques de l'exponentielle

EXERCICE 1 ⋆

On applique les règles de calcul du cours : $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b$, $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}$ et $(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$.

a) $\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^5 = \mathrm{e}^{3+5} = \boxed{\mathrm{e}^8}$

b) $\dfrac{\mathrm{e}^7}{\mathrm{e}^2} = \mathrm{e}^{7-2} = \boxed{\mathrm{e}^5}$

c) $\left(\mathrm{e}^2\right)^4 = \mathrm{e}^{2\times4} = \boxed{\mathrm{e}^8}$

d) $\mathrm{e}^{-3} \times \mathrm{e}^6 = \mathrm{e}^{-3+6} = \boxed{\mathrm{e}^3}$

e) $\dfrac{\mathrm{e}^6 \times \mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}^4} = \mathrm{e}^{6-1-4} = \boxed{\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}}$

f) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-5}} = \mathrm{e}^{-(-5)} = \boxed{\mathrm{e}^5}$

g) $\left(\mathrm{e}^{-2}\right)^{-3} = \mathrm{e}^{(-2)\times(-3)} = \boxed{\mathrm{e}^6}$

h) $\dfrac{\mathrm{e}^4 \times \mathrm{e}^{-4}}{\mathrm{e}^{-2}} = \dfrac{\mathrm{e}^0}{\mathrm{e}^{-2}} = \boxed{\mathrm{e}^2}$

EXERCICE 2 ⋆

a) $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{2x} = \boxed{\mathrm{e}^{3x}}$

b) $\dfrac{\mathrm{e}^{5x}}{\mathrm{e}^{2x}} = \boxed{\mathrm{e}^{3x}}$

c) $\left(\mathrm{e}^x\right)^3 = \boxed{\mathrm{e}^{3x}}$

d) $\mathrm{e}^{x+1} \times \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{x+1-x} = \boxed{\mathrm{e}}$

e) $\dfrac{\mathrm{e}^{2x-1}}{\mathrm{e}^{x+3}} = \mathrm{e}^{(2x-1)-(x+3)} = \boxed{\mathrm{e}^{x-4}}$

f) $\left(\mathrm{e}^x\right)^2 \times \mathrm{e}^{-3x} = \mathrm{e}^{2x-3x} = \boxed{\mathrm{e}^{-x}}$

g) $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^0 = \boxed{1}$

h) $\dfrac{\left(\mathrm{e}^{2x+1}\right)^3}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{\mathrm{e}^{6x+3}}{\mathrm{e}^x} = \boxed{\mathrm{e}^{5x+3}}$

On prendra garde en e) à bien mettre entre parenthèses l'exposant du dénominateur avant de le soustraire : l'erreur classique est d'écrire $2x - 1 - x + 3$.

EXERCICE 3 ⋆

a) $\mathrm{e}^{3x} \times \mathrm{e}^{-2} = \boxed{\mathrm{e}^{3x-2}}$ $\quad (a = 3,\ b = -2)$

b) $\left(\mathrm{e}^{x-1}\right)^4 = \boxed{\mathrm{e}^{4x-4}}$ $\quad (a = 4,\ b = -4)$

c) $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{5-x}} = \mathrm{e}^{2x-(5-x)} = \boxed{\mathrm{e}^{3x-5}}$ $\quad (a = 3,\ b = -5)$

d) $\mathrm{e}^{-x+2} \times \mathrm{e}^{3x} = \boxed{\mathrm{e}^{2x+2}}$ $\quad (a = 2,\ b = 2)$

e) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{4x-1}} = \boxed{\mathrm{e}^{-4x+1}}$ $\quad (a = -4,\ b = 1)$

f) $\dfrac{\mathrm{e}^{x+2}}{\mathrm{e}^{2x-2}} = \mathrm{e}^{(x+2)-(2x-2)} = \boxed{\mathrm{e}^{-x+4}}$ $\quad (a = -1,\ b = 4)$

EXERCICE 4 ⋆⋆

1. On développe l'identité remarquable $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$:

$$A = \left(\mathrm{e}^x\right)^2 + 2\mathrm{e}^x + 1 = \boxed{\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x + 1}$$

2. On reconnaît $(u-v)(u+v) = u^2 - v^2$:

$$B = \left(\mathrm{e}^x\right)^2 - 1^2 = \boxed{\mathrm{e}^{2x} - 1}$$

3. On développe les deux carrés séparément :

$$\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)^{2}=\mathrm{e}^{2x}+2\underbrace{\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-x}}_{=1}+\mathrm{e}^{-2x}=\mathrm{e}^{2x}+2+\mathrm{e}^{-2x}$$
$$\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)^{2}=\mathrm{e}^{2x}-2+\mathrm{e}^{-2x}$$

En soustrayant, tous les termes en e^{2x} et e^{-2x} disparaissent :

$$C=\left(\mathrm{e}^{2x}+2+\mathrm{e}^{-2x}\right)-\left(\mathrm{e}^{2x}-2+\mathrm{e}^{-2x}\right)=\boxed{4}$$

$\boxed{C \text{ est une constante : elle ne dépend pas de } x}$

4.
$$D=\mathrm{e}^{2x}-3\mathrm{e}^{x}+2\mathrm{e}^{x}-6=\boxed{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}-6}$$

5. On reconnaît à nouveau u^2-v^2 :

$$E=\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{2}-\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^{2}=\boxed{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}}$$

La clé de cet exercice est l'égalité $\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{0}=1$, qui fait disparaître les doubles produits.

EXERCICE 5 ⋆⋆

a) Le facteur commun est e^{x}, puisque $\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{x}$:

$$\boxed{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)}$$

b)
$$\boxed{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)}$$

c)
$$\boxed{x\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{x}(x+1)}$$

d) En écrivant $\mathrm{e}^{2x}=\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{2}$, on reconnaît u^2-v^2 :

$$\boxed{\mathrm{e}^{2x}-1=\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)}$$

e)
$$\boxed{3\mathrm{e}^{x}-3=3\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)}$$

f) On factorise d'abord par e^{x}, puis on reconnaît x^2-4 :

$$x^{2}\mathrm{e}^{x}-4\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{x}\left(x^{2}-4\right)=\boxed{\mathrm{e}^{x}(x-2)(x+2)}$$

EXERCICE 6 ⋆⋆

1. On développe le membre de gauche :

$$\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)^{2}=\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{2}+2\underbrace{\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-x}}_{=\mathrm{e}^{0}=1}+\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^{2}=\boxed{\mathrm{e}^{2x}+2+\mathrm{e}^{-2x}}$$

2. Le dénominateur $\mathrm{e}^{x}+1$ est toujours strictement positif, car $\mathrm{e}^{x}>0$: il ne s'annule jamais et l'expression est bien définie sur $\mathbb{R}$. On part du membre de droite :

$$1-\frac{1}{\mathrm{e}^{x}+1}=\frac{\mathrm{e}^{x}+1}{\mathrm{e}^{x}+1}-\frac{1}{\mathrm{e}^{x}+1}=\boxed{\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}}$$

3. Les deux dénominateurs $1+\mathrm{e}^{-x}$ et $1+\mathrm{e}^{x}$ sont strictement positifs, donc non nuls. On multiplie le numérateur et le dénominateur du membre de gauche par e^{x}, qui est non nul :

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{1\times \mathrm{e}^{x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})\times \mathrm{e}^{x}} = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+\underbrace{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{x}}_{=1}} = \boxed{\frac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}}$$

Équations et inéquations

EXERCICE 7 ⋆

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{a}=\mathrm{e}^{b} \iff a=b$: il suffit donc d'identifier les exposants.

a) $\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{3} \iff x=3$: $\boxed{S=\{3\}}$

b) $2x+1=5 \iff 2x=4$: $\boxed{S=\{2\}}$

c) $3x-2=x+4 \iff 2x=6$: $\boxed{S=\{3\}}$

d) $x^{2}=4x-3 \iff x^{2}-4x+3=0$. Le discriminant vaut $\Delta=16-12=4$, d'où les racines $\dfrac{4-2}{2}=1$ et $\dfrac{4+2}{2}=3$: $\boxed{S=\{1\,;3\}}$

e) $\mathrm{e}^{x}=1=\mathrm{e}^{0} \iff x=0$: $\boxed{S=\{0\}}$

f) $\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{1} \iff 2x=1$: $\boxed{S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}}$

g) $-x+1=2x-5 \iff 6=3x$: $\boxed{S=\{2\}}$

h) $x^{2}-1=0 \iff (x-1)(x+1)=0$: $\boxed{S=\{-1\,;1\}}$

EXERCICE 8 ⋆

L'argument central est le suivant : **pour tout réel x,** $\mathrm{e}^{x}>0$, donc un facteur exponentiel ne peut jamais être nul et se « simplifie » dans une équation produit nul.

a) Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul :

$$\mathrm{e}^{x}-1=0 \text{ ou } \mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}=0 \iff \mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{0} \text{ ou } \mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{1}$$

$$\boxed{S=\{0\,;1\}}$$

b) Comme $\mathrm{e}^{x}\neq 0$, le produit est nul si et seulement si $x-2=0$: $\boxed{S=\{2\}}$

c) On factorise d'abord : $x^{2}\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{x}\left(x^{2}-1\right)$. Comme $\mathrm{e}^{x}\neq 0$:

$$x^{2}-1=0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{S=\{-1\,;1\}}$$

d) $\mathrm{e}^{x+1}\neq 0$, donc $2x-1=0$: $\boxed{S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}}$

e) Le dénominateur $\mathrm{e}^{x}+2$ est strictement positif, donc jamais nul : le quotient est nul si et seulement si son numérateur l'est.

$$\mathrm{e}^{x}-1=0 \iff \mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{0} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{S=\{0\}}$$

f) On peut factoriser par e^x, ou plus simplement écrire $e^{2x} = e^{x+3}$ et identifier les exposants :

$$2x = x + 3 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{S = \{3\}}$$

EXERCICE 9 ⋆⋆

La fonction exponentielle étant strictement croissante, on a $e^a < e^b \iff a < b$: les inégalités entre exposants se transmettent *dans le même sens*.

a) $x > 4$: $\boxed{S =]4\,;+\infty[}$

b) $2x - 1 \leqslant x + 2 \iff x \leqslant 3$: $\boxed{S =]-\infty\,;3]}$

c) $e^x < e^0 \iff x < 0$: $\boxed{S =]-\infty\,;0[}$

d) $-3x + 2 \geqslant 1 \iff -3x \geqslant -1$. En divisant par -3, qui est négatif, l'inégalité change de sens :

$$x \leqslant \frac{1}{3} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{S = \left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right]}$$

e) $x^2 \leqslant 2x+3 \iff x^2-2x-3 \leqslant 0$. Le trinôme a pour racines -1 et 3, et son coefficient dominant est positif : il est donc négatif entre les racines.

$$\boxed{S = [-1\,;3]}$$

f) $x \geqslant -x \iff 2x \geqslant 0$: $\boxed{S = [0\,;+\infty[}$

EXERCICE 10 ⋆⋆

1. Le premier facteur s'annule en 0, le second en 1. Comme l'exponentielle est croissante, $e^x - 1$ est négatif pour $x < 0$ et positif pour $x > 0$; de même $e^x - e$ est négatif pour $x < 1$ et positif pour $x > 1$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - e$		$-$		$-$	0	$+$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S =]-\infty\,;0] \cup [1\,;+\infty[}$$

2. Comme $e^x > 0$, le produit est du signe de $x - 1$:

$$(x-1)e^x < 0 \iff x - 1 < 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{S =]-\infty\,;1[}$$

3. Le facteur $e^x - e^2$ s'annule en 2, le facteur $x + 3$ s'annule en -3.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S = [-3\,;2]}$$

4. Comme $\mathrm{e}^x > 0$, le produit est du signe de $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, qui est positif à l'extérieur des racines :
$$\boxed{S =]-\infty\,;-2[\cup]2\,;+\infty[}$$

EXERCICE 11 ⋆⋆

1. D'après la règle $(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$ appliquée avec $a = x$ et $n = 2$:
$$\boxed{(\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{2x}}$$

2. En posant $X = \mathrm{e}^x$, on a $\mathrm{e}^{2x} = X^2$ et $\mathrm{e}^x = X$, donc :
$$\boxed{(E) \iff X^2 - (1+\mathrm{e})X + \mathrm{e} = 0}$$

3. Pour $X = 1$:
$$1^2 - (1+\mathrm{e}) \times 1 + \mathrm{e} = 1 - 1 - \mathrm{e} + \mathrm{e} = 0$$
Pour $X = \mathrm{e}$:
$$\mathrm{e}^2 - (1+\mathrm{e}) \times \mathrm{e} + \mathrm{e} = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - \mathrm{e}^2 + \mathrm{e} = 0$$
$$\boxed{X = 1 \text{ et } X = \mathrm{e} \text{ sont bien solutions}}$$

4. L'équation du second degré ayant au plus deux solutions, ce sont les seules. On revient alors à x :
$$\mathrm{e}^x = 1 = \mathrm{e}^0 \implies x = 0 \qquad ; \qquad \mathrm{e}^x = \mathrm{e} = \mathrm{e}^1 \implies x = 1$$
$$\boxed{S = \{0\,;1\}}$$

5. On pose de même $X = \mathrm{e}^x$: l'équation devient $X^2 - \left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^2\right) X + \mathrm{e}^3 = 0$. On vérifie que $X = \mathrm{e}$ et $X = \mathrm{e}^2$ conviennent :
$$\mathrm{e}^2 - \left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^2\right) \mathrm{e} + \mathrm{e}^3 = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^3 + \mathrm{e}^3 = 0$$
$$\mathrm{e}^4 - \left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^2\right) \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^3 = \mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^3 = 0$$
D'où $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^1$ ou $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^2$:
$$\boxed{S = \{1\,;2\}}$$

On remarquera que ces équations ont été choisies pour que les solutions en X soient des puissances entières de e : dans le cas général, revenir à x nécessiterait la fonction logarithme, étudiée en Terminale.

EXERCICE 12 ⋆⋆

a) $2x = x \iff x = 0$: $\boxed{S = \{0\}}$

b) $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{x-2} = \mathrm{e}^{2x-2}$, donc $2x - 2 = 4$: $\boxed{S = \{3\}}$

c) $\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{x+2}$, donc $2x = x + 2$: $\boxed{S = \{2\}}$

d) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-x}$, donc l'inéquation devient $\mathrm{e}^{x+1} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$, c'est-à-dire $x + 1 \leqslant -x$, soit $2x \leqslant -1$:

$$\boxed{S = \left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right]}$$

e) $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^3} = \mathrm{e}^{2x-3}$, donc $2x - 3 > x$, soit $x > 3$:

$$\boxed{S =]3\,;+\infty[}$$

f) $-x \geqslant x^2 \iff x^2 + x \leqslant 0 \iff x(x+1) \leqslant 0$. Le trinôme a pour racines -1 et 0, il est négatif entre les racines :

$$\boxed{S = [-1\,;0]}$$

Étude de la fonction exponentielle

EXERCICE 13 ⋆

1. La fonction exponentielle étant **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$, elle conserve l'ordre : comparer e^a et e^b revient à comparer a et b.

   (a) $2 < 3$ donc $\boxed{\mathrm{e}^2 < \mathrm{e}^3}$

   (b) $-2 < -1$ donc $\boxed{\mathrm{e}^{-2} < \mathrm{e}^{-1}}$

   (c) $\sqrt{2} \approx 1{,}41 < 1{,}5$ donc $\boxed{\mathrm{e}^{\sqrt{2}} < \mathrm{e}^{1,5}}$

   (d) $\pi \approx 3{,}14 > 3$ donc $\boxed{\mathrm{e}^{\pi} > \mathrm{e}^3}$

   (e) L'exponentielle est strictement positive : $\boxed{\mathrm{e}^{-3} > 0}$

   (f) Par définition, $\boxed{\mathrm{e}^0 = 1}$

   La question e) ne relève pas de la croissance mais de la *stricte positivité* : un exposant négatif ne rend jamais l'exponentielle négative.

2. On range d'abord les exposants, en remarquant que $1 = \mathrm{e}^0$:

   $$-2 < -1 < 0 < 0{,}5 < 3$$

   La croissance de l'exponentielle donne alors :

   $$\boxed{\mathrm{e}^{-2} < \mathrm{e}^{-1} < 1 < \mathrm{e}^{0,5} < \mathrm{e}^3}$$

   Numériquement : $0{,}14 < 0{,}37 < 1 < 1{,}65 < 20{,}09$.

EXERCICE 14 ⋆

1. On lit les ordonnées des points de $\mathcal{C}$ d'abscisses 1, -1 et 2 :

$$\boxed{\mathrm{e} \approx 2{,}7 \quad ; \quad \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}4 \quad ; \quad \mathrm{e}^{2} \approx 7{,}4}$$

2. Le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 0 a pour ordonnée 1.

$$\boxed{\mathrm{e}^{0} = 1}$$

C'est la condition $f(0) = 1$ qui caractérise l'exponentielle dans la proposition 1 du cours.

3. On lit les abscisses des points de $\mathcal{C}$ d'ordonnée 4, puis ceux dont l'ordonnée est inférieure ou égale à 2 :

$$\boxed{\mathrm{e}^{x} = 4 \text{ pour } x \approx 1{,}4} \quad ; \quad \boxed{\mathrm{e}^{x} \leqslant 2 \text{ pour } x \lesssim 0{,}7}$$

Autrement dit $S \approx]-\infty\,;0{,}7]$ pour l'inéquation.

4. La courbe reste toujours au-dessus de l'axe des abscisses, dont elle se rapproche sans jamais l'atteindre lorsque x devient très négatif.

$$\boxed{\mathcal{C} \text{ ne coupe pas l'axe des abscisses, car } \mathrm{e}^{x} > 0 \text{ pour tout } x}$$

5. La droite T_0 passe par $(0\,;1)$ et par $(1\,;2)$: en avançant de 1, on monte de 1, donc son coefficient directeur vaut 1.

$$\boxed{T_0 : y = x + 1}$$

Par le calcul : la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$. Or $f' = f = \exp$, donc $f'(0) = f(0) = 1$:

$$y = 1 \times x + 1 = x + 1$$

6. Sur toute la fenêtre, la courbe se situe au-dessus de la droite, les deux ne se touchant qu'en un seul point.

$$\boxed{\mathcal{C} \text{ semble toujours au-dessus de } T_0, \text{ avec contact au point } (0\,;1)}$$

Cette conjecture est démontrée à l'exercice 29.

EXERCICE 15 ⋆

1. La fonction exponentielle est sa propre dérivée, et vaut 1 en 0 :

$$\boxed{\exp' = \exp \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{0} = 1}$$

2. La tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Pour $a = 0$, avec $f(0) = f'(0) = 1$:

$$\boxed{T_0 : y = x + 1}$$

3. Pour $a = 1$, avec $f(1) = f'(1) = \mathrm{e}$:

$$y = \mathrm{e}(x - 1) + \mathrm{e} = \mathrm{e}x - \mathrm{e} + \mathrm{e} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{T_1 : y = \mathrm{e}x}$$

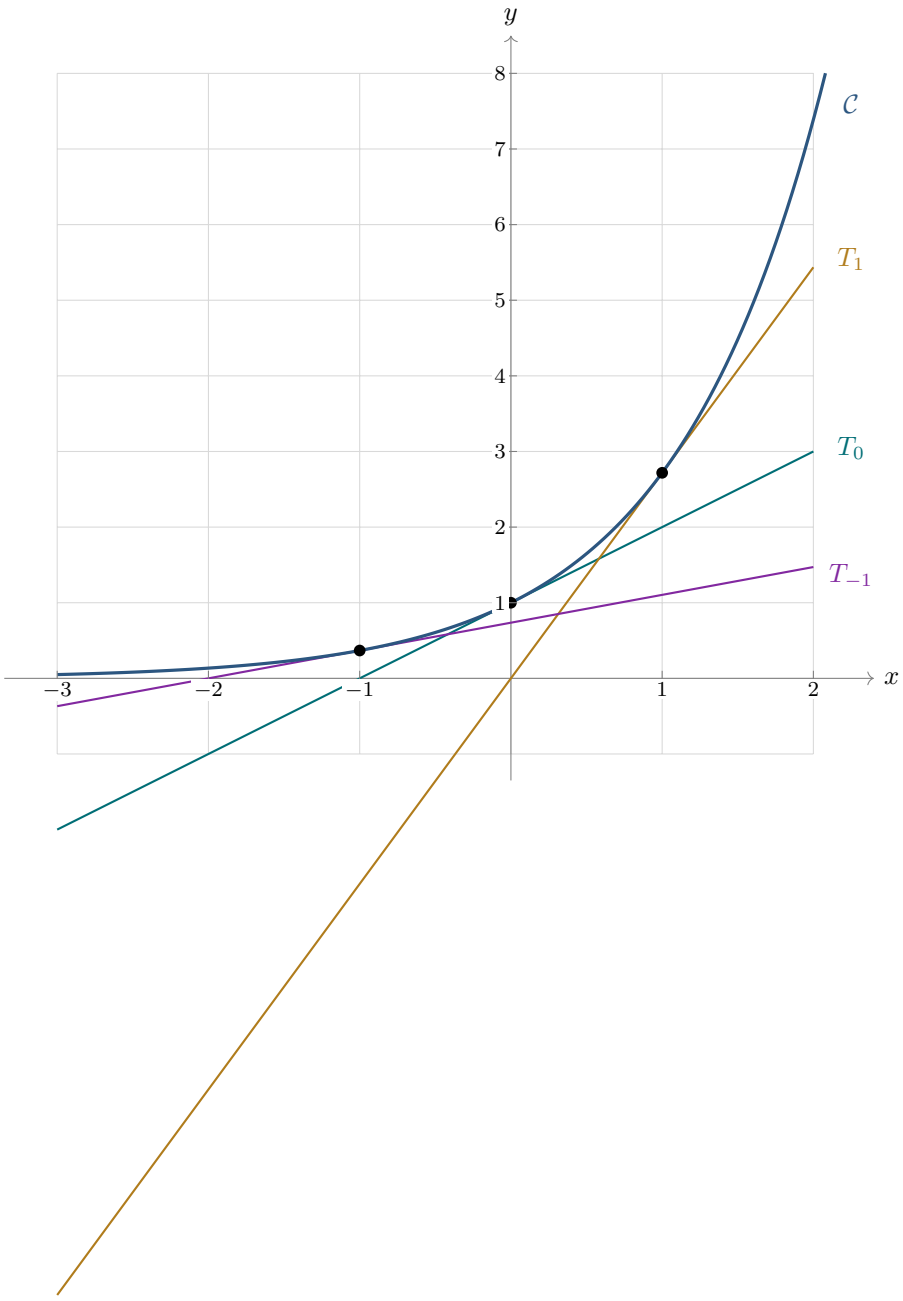
Cette tangente passe donc par l'origine.

4. Pour $a = -1$, avec $f(-1) = f'(-1) = \mathrm{e}^{-1}$:

$$y = \mathrm{e}^{-1}(x + 1) + \mathrm{e}^{-1} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{T_{-1} : y = \mathrm{e}^{-1}x + 2\mathrm{e}^{-1}}$$

Numériquement, $y \approx 0{,}37x + 0{,}74$.

5. Voici la figure.



On observe que les trois tangentes restent toutes en dessous de $\mathcal{C}$, ne la touchant qu'en leur point de contact.

EXERCICE 16 ⋆⋆

a) $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0 \iff x \geqslant 0$ par *stricte croissance*.

$\boxed{\mathrm{e}^x - 1 \text{ est négatif si } x < 0,\ \text{nul si } x = 0,\ \text{positif si } x > 0}$

b) De même, $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^2 \iff x \geqslant 2$:

$\boxed{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^2 \text{ est négatif si } x < 2,\ \text{nul si } x = 2,\ \text{positif si } x > 2}$

c) $1 - \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^0 \iff -x \leqslant 0 \iff x \geqslant 0$:

$\boxed{1 - \mathrm{e}^{-x} \text{ est négatif si } x < 0,\ \text{nul si } x = 0,\ \text{positif si } x > 0}$

d) Par *stricte positivité*, $e^x > 0$: le produit est du signe de $x - 1$.

$$\boxed{(x-1)e^x \text{ est négatif si } x < 1,\ \text{nul si } x = 1,\ \text{positif si } x > 1}$$

e) Le numérateur e^x est strictement positif, donc le quotient est du signe du dénominateur $x + 2$ — l'expression n'étant pas définie en -2.

$$\boxed{\frac{e^x}{x+2} \text{ est négatif si } x < -2 \text{ et positif si } x > -2}$$

f) On factorise : $xe^x + e^x = e^x(x + 1)$. Comme $e^x > 0$, l'expression est du signe de $x + 1$.

$$\boxed{e^x(x+1) \text{ est négatif si } x < -1,\ \text{nul si } x = -1,\ \text{positif si } x > -1}$$

Dérivation

EXERCICE 17 ⋆

On applique la proposition 6 : $(e^u)' = u'\,e^u$.

	$f(x)$	$u(x)$ et $u'(x)$	$f'(x)$
a)	e^{3x}	$u = 3x,\ u' = 3$	$3e^{3x}$
b)	e^{-x}	$u = -x,\ u' = -1$	$-e^{-x}$
c)	e^{2x+1}	$u = 2x + 1,\ u' = 2$	$2e^{2x+1}$
d)	e^{x^2}	$u = x^2,\ u' = 2x$	$2x\,e^{x^2}$
e)	e^{-x^2+3x}	$u = -x^2 + 3x,\ u' = -2x + 3$	$(-2x + 3)\,e^{-x^2+3x}$
f)	e^{x^3-2x}	$u = x^3 - 2x,\ u' = 3x^2 - 2$	$(3x^2 - 2)\,e^{x^3-2x}$
g)	$e^{\frac{1}{x}}$	$u = \frac{1}{x},\ u' = -\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}$
h)	$e^{\sqrt{x}}$	$u = \sqrt{x},\ u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

EXERCICE 18 ⋆

On utilise la dérivée d'un produit, $(uv)' = u'v + uv'$, et celle d'un quotient, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

a)

$$f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = \boxed{(x+1)e^x}$$

b)

$$f'(x) = 2e^x + (2x - 3)e^x = \boxed{(2x-1)e^x}$$

c)

$$f'(x) = 2x\,e^x + x^2e^x = \boxed{x(x+2)e^x}$$

d)

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \times x - \mathrm{e}^x \times 1}{x^2} = \boxed{\frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}}$$

e) Ici $(\mathrm{e}^{-x})' = -\mathrm{e}^{-x}$:

$$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+1) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}(1 - x - 1) = \boxed{-x\,\mathrm{e}^{-x}}$$

f)

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} + x \times (-\mathrm{e}^{-x}) = \boxed{(1-x)\mathrm{e}^{-x}}$$

EXERCICE 19 ⋆⋆

1. $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^x$.

$$f'(x) = \mathrm{e}^x + (x-2)\mathrm{e}^x = \boxed{(x-1)\mathrm{e}^x}$$

Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x - 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$-\mathrm{e}$	↗	

$\boxed{f \text{ admet un minimum égal à } f(1) = -\mathrm{e} \approx -2{,}72, \text{ atteint en } x = 1}$

2. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, avec $u = -x^2$ et $u' = -2x$:

$$f'(x) = \boxed{-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}}$$

Comme $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-2x$, donc positif si $x < 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	1	↘	

$\boxed{f \text{ admet un maximum égal à } f(0) = \mathrm{e}^0 = 1, \text{ atteint en } x = 0}$

3. $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x} = \boxed{(1-x)\mathrm{e}^{-x}}$$

Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - x$, donc positif si $x < 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	

$$\boxed{f \text{ admet un maximum égal à } f(1) = \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37, \text{ atteint en } x = 1}$$

EXERCICE 20 ⋆⋆

a) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ donne $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$, d'où $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$:

$$y = 2(x - 0) + 1 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{y = 2x + 1}$$

b) $f(x) = x\mathrm{e}^{x}$ donne $f'(x) = (x + 1)\mathrm{e}^{x}$, d'où $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$:

$$\boxed{y = x}$$

c) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ donne $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$, d'où $f(1) = \mathrm{e}^{-1}$ et $f'(1) = -\mathrm{e}^{-1}$:

$$y = -\mathrm{e}^{-1}(x - 1) + \mathrm{e}^{-1} = -\mathrm{e}^{-1}x + \mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-1}$$

$$\boxed{y = -\mathrm{e}^{-1}x + 2\mathrm{e}^{-1}}$$

d) $f(x) = (x + 1)\mathrm{e}^{x}$ donne $f'(x) = \mathrm{e}^{x} + (x + 1)\mathrm{e}^{x} = (x + 2)\mathrm{e}^{x}$, d'où $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$:

$$\boxed{y = 2x + 1}$$

On remarquera que les fonctions a) et d), bien que différentes, admettent la même tangente en 0 : elles ont même valeur et même nombre dérivé en ce point.

EXERCICE 21 ⋆⋆

1. On dérive le produit, avec $u(x) = x^2 - 3$ et $v(x) = \mathrm{e}^{x}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\,\mathrm{e}^{x} + \left(x^2 - 3\right)\mathrm{e}^{x} \\ &= \left(x^2 + 2x - 3\right)\mathrm{e}^{x} \end{aligned}$$

Le trinôme $x^2 + 2x - 3$ a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, d'où les racines $\dfrac{-2 - 4}{2} = -3$ et $\dfrac{-2 + 4}{2} = 1$:

$$\boxed{f'(x) = (x + 3)(x - 1)\mathrm{e}^{x}}$$

2. Comme $\mathrm{e}^{x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme, positif à l'extérieur des racines :

$$\boxed{f'(x) > 0 \text{ sur }]-\infty\,;-3[\,\cup\,]1\,;+\infty[\quad \text{et} \quad f'(x) < 0 \text{ sur }]-3\,;1[}$$

3.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$6\mathrm{e}^{-3}$	↘	$-2\mathrm{e}$	↗	

$$f(-3) = (9-3)\,\mathrm{e}^{-3} = \boxed{6\mathrm{e}^{-3} \approx 0{,}30} \qquad ; \qquad f(1) = (1-3)\,\mathrm{e} = \boxed{-2\mathrm{e} \approx -5{,}44}$$

4. Comme $\mathrm{e}^x \neq 0$:

$$f(x) = 0 \iff x^2 - 3 = 0 \iff \boxed{x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3}}$$

5. Le signe de $f(x)$ est celui de $x^2 - 3$, positif à l'extérieur des racines :

$$\boxed{f(x) > 0 \text{ sur } \left]-\infty\,;-\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}\,;+\infty\right[\quad \text{et} \quad f(x) < 0 \text{ sur } \left]-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\right[}$$

On vérifie la cohérence : $-\sqrt{3} \approx -1{,}73$ est bien situé entre -3 et 1, dans la zone où f décroît de $0{,}30$ à $-5{,}44$.

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. Avec $u(x) = x + 2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$, dont la dérivée est $-\mathrm{e}^{-x}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+2) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-x}(1 - x - 2) = \boxed{-(x+1)\mathrm{e}^{-x}} \end{aligned}$$

2. Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-(x+1)$, donc positif si $x < -1$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	e	↘	

3. La fonction croît puis décroît : elle atteint son maximum en -1.

$$f(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^{-(-1)} = 1 \times \mathrm{e} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\text{le maximum de } f \text{ vaut } \mathrm{e} \approx 2{,}72}$$

4. La tangente au point d'abscisse -1 a pour équation $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$. Or $f'(-1) = 0$:

$$\boxed{y = \mathrm{e}}$$

$$\boxed{\text{La tangente est horizontale, ce qui est cohérent avec l'existence d'un maximum en } -1}$$

5. Comme $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$:

$$f(x) = 0 \iff x + 2 = 0 \iff \boxed{x = -2}$$

Le signe de $f(x)$ est celui de $x + 2$:

$$\boxed{f(x) < 0 \text{ sur }]-\infty\,;-2[\quad \text{et} \quad f(x) > 0 \text{ sur }]-2\,;+\infty[}$$

Exercices de synthèse

EXERCICE 23 : QCM ⋆

Question	Réponse	Justification
1	**B**	$e^3 \times e^{-5} = e^{3-5} = e^{-2}$. On additionne les exposants, on ne les multiplie pas.
2	**B**	$\left(e^{2x}\right)^3 = e^{2x\times 3} = e^{6x}$.
3	**A**	L'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$: elle ne s'annule jamais (proposition 4).
4	**A**	Par stricte croissance, $2x = x + 3$, donc $x = 3$.
5	**B**	C'est la proposition 4 : $e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 > 0$, la valeur 0 étant exclue puisque l'exponentielle ne s'annule pas.
6	**A**	Avec $u = -2x$ et $u' = -2$, la formule $(e^u)' = u'e^u$ donne $-2e^{-2x}$.
7	**B**	Dérivée d'un produit : $1 \times e^x + x \times e^x = (x+1)e^x$.
8	**A**	Par stricte croissance, $e^x < e^2 \iff x < 2$.
9	**B**	$f(0) = f'(0) = 1$, d'où $y = 1 \times x + 1$. La réponse C est la tangente au point d'abscisse 1.
10	**A**	$e \approx 2{,}718$. La réponse B est π, la réponse C le nombre d'or.

EXERCICE 24 : VRAI OU FAUX ⋆⋆

1. **Vraie**. C'est la proposition 4 du cours : l'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
2. **Fausse**. C'est exactement la négation de l'affirmation précédente : l'exponentielle ne s'annule jamais. La proposition 2 le démontre en établissant que $e^x \times e^{-x} = 1$, ce qui serait impossible si l'un des facteurs était nul.
3. **Fausse**. La bonne formule est $e^{a+b} = e^a \times e^b$: l'exponentielle transforme les sommes en produits. Contre-exemple avec $a = b = 0$:
$$e^{0+0} = e^0 = 1 \qquad \text{alors que} \qquad e^0 + e^0 = 1 + 1 = 2$$
4. **Vraie**. C'est la règle $(e^a)^n = e^{na}$ appliquée avec $n = 2$.
5. **Vraie**. C'est la proposition 5. Elle découle du fait que $\exp' = \exp$ est strictement positive.
6. **Fausse**. L'exponentielle est strictement positive quel que soit l'exposant : $e^{-2} = \dfrac{1}{e^2} \approx 0{,}135 > 0$.
7. **Vraie**. C'est une conséquence de la stricte croissance, énoncée dans la proposition 5 : une fonction strictement croissante ne peut pas prendre deux fois la même valeur.
8. **Fausse**. Avec $u = x^2$ et $u' = 2x$, la formule donne $2x\,e^{x^2}$ et non e^{2x}. Contre-exemple en $x = 1$: la dérivée vaut $2e$, alors que $e^2 \approx 7{,}39$ et $2e \approx 5{,}44$.
9. **Vraie**. C'est la propriété qui définit l'exponentielle dans la proposition 1 : $f' = f$ et $f(0) = 1$.
10. **Vraie**. C'est le résultat démontré à l'exercice 29 : il traduit le fait que la courbe de l'exponentielle se situe au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.

EXERCICE 25 - TYPE BAC ⋆⋆

1. Avec $u(x) = x - 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$:

$$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (x-1) \times \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(1 + x - 1) = \boxed{x\,\mathrm{e}^x}$$

2. Comme $\mathrm{e}^x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-1	↗	

3. La fonction décroît puis croît : elle atteint son minimum en 0.

$$f(0) = (0-1)\mathrm{e}^0 = -1 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\text{le minimum de } f \text{ vaut } -1, \text{ atteint en } x = 0}$$

4. La tangente a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$. Or $f'(0) = 0 \times \mathrm{e}^0 = 0$:

$$\boxed{T : y = -1}$$

$$\boxed{\text{Cette tangente est horizontale, ce qui est cohérent avec le minimum en 0}}$$

5. Comme $\mathrm{e}^x \neq 0$:

$$f(x) = 0 \iff x - 1 = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{S = \{1\}}$$

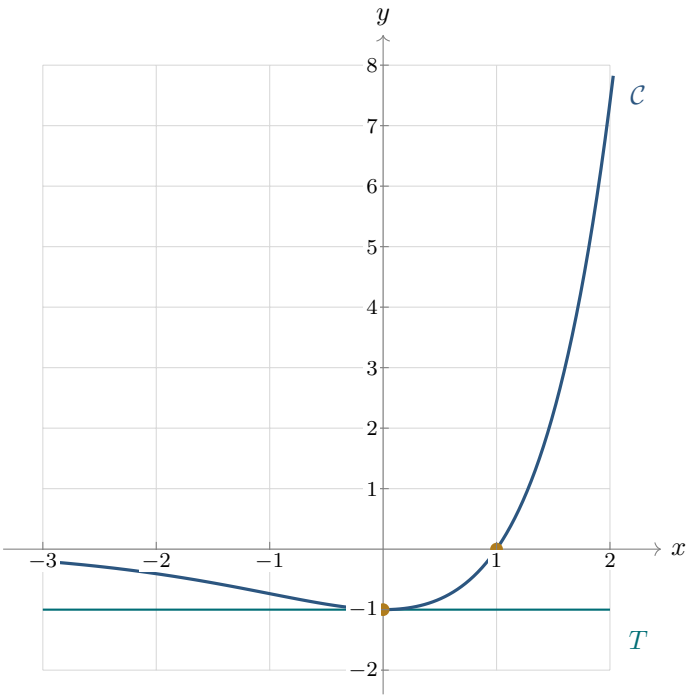
Le signe de $f(x)$ est celui de $x - 1$:

$$\boxed{f(x) < 0 \text{ sur }]-\infty\,;1[\quad \text{et} \quad f(x) > 0 \text{ sur }]1\,;+\infty[}$$

6.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$-4\mathrm{e}^{-3}$	$-3\mathrm{e}^{-2}$	$-2\mathrm{e}^{-1}$	-1	0	e^2
Valeur approchée	$-0{,}20$	$-0{,}41$	$-0{,}74$	-1	0	$7{,}39$

7.



EXERCICE 26 - TYPE BAC ⋆⋆

1. Avec $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$, dont la dérivée est $-\mathrm{e}^{-x}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\,\mathrm{e}^{-x} + \left(x^2+1\right) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-x}\left(2x - x^2 - 1\right) \\ &= -\mathrm{e}^{-x}\left(x^2 - 2x + 1\right) \end{aligned}$$

On reconnaît l'identité remarquable $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$:

$$\boxed{f'(x) = -(x-1)^2\,\mathrm{e}^{-x}}$$

2. Le facteur $(x-1)^2$ est un carré, donc positif ou nul ; le facteur e^{-x} est strictement positif. Leur produit est donc positif ou nul, et son opposé est négatif ou nul.

$$\boxed{f'(x) \leqslant 0 \text{ pour tout réel } x}$$

De plus $f'(x) = 0$ si et seulement si $(x-1)^2 = 0$:

$$\boxed{f'(x) = 0 \text{ uniquement pour } x = 1}$$

3. La dérivée est négative sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en un seul point, ce qui ne suffit pas à interrompre la décroissance.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↘	

On prendra garde à ne tracer qu'**une seule flèche**, continue de part et d'autre de 1 : la dérivée s'annule en ce point mais ne change pas de signe, la décroissance n'est donc pas interrompue. La valeur $f(1) = 2\mathrm{e}^{-1}$ n'est qu'un point de passage, et non un extremum.

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}}$$

$$\boxed{f \text{ n'admet donc ni maximum ni minimum}}$$

4. Le facteur $x^2 + 1$ est strictement positif, car $x^2 \geqslant 0$; le facteur e^{-x} l'est également.

$$\boxed{f(x) > 0 \text{ pour tout réel } x}$$

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = 0 \text{ n'admet aucune solution}}$$

5. On calcule $f(1) = (1+1)\,\mathrm{e}^{-1} = 2\mathrm{e}^{-1}$ et $f'(1) = 0$:

$$y = 0 \times (x-1) + 2\mathrm{e}^{-1} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{T : y = 2\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}74}$$

6. La tangente est horizontale au point d'abscisse 1, alors même que f n'y admet pas d'extremum : la courbe y présente un simple palier avant de poursuivre sa descente.

$$\boxed{\text{Une tangente horizontale ne signale pas toujours un extremum}}$$

C'est le point important de cet exercice : la condition $f'(a) = 0$ est nécessaire pour un extremum, mais elle n'est pas suffisante — il faut que la dérivée *change de signe*.

EXERCICE 27 ⋆⋆

1. $$T(0) = 20 + 60\,\mathrm{e}^{0} = 20 + 60 = \boxed{80}$$

$$\boxed{\text{Au moment où il est servi, le café est bien à } 80\ ^\circ\mathrm{C}}$$

2. $$T(20) = 20 + 60\,\mathrm{e}^{-0{,}05\times 20} = 20 + 60\,\mathrm{e}^{-1} \approx \boxed{42{,}1\ ^\circ\mathrm{C}}$$

$$\boxed{\text{Après 20 minutes, le café est descendu à environ } 42\ ^\circ\mathrm{C}}$$

3. On dérive, avec $u(t) = -0{,}05\,t$ et $u'(t) = -0{,}05$:

$$T'(t) = 60 \times (-0{,}05)\,\mathrm{e}^{-0{,}05\,t} = \boxed{-3\,\mathrm{e}^{-0{,}05\,t}}$$

Comme l'exponentielle est strictement positive, $T'(t) < 0$ pour tout t :

$$\boxed{T \text{ est strictement décroissante sur } [0\,;+\infty[}$$

$$\boxed{\text{C'était prévisible : un café posé dans une pièce plus froide refroidit}}$$

4. $$20 + 60\,\mathrm{e}^{-0{,}05\,t} = 20 + \frac{60}{\mathrm{e}} \iff 60\,\mathrm{e}^{-0{,}05\,t} = 60\,\mathrm{e}^{-1} \iff \mathrm{e}^{-0{,}05\,t} = \mathrm{e}^{-1}$$

Par stricte croissance de l'exponentielle :

$$-0{,}05\,t = -1 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{t = 20 \text{ minutes}}$$

On retrouve exactement la valeur calculée à la question 2.

5. Pour tout $t \geqslant 0$, on a $\mathrm{e}^{-0{,}05\,t} > 0$, donc $60\,\mathrm{e}^{-0{,}05\,t} > 0$ et :

$$T(t) = 20 + \underbrace{60\,\mathrm{e}^{-0{,}05\,t}}_{>0} > 20$$

La température reste toujours strictement supérieure à 20 °C

Le café se rapproche de la température de la pièce sans jamais l'atteindre

6. On résout l'inéquation $T(t) \leqslant 20 + 60\,\mathrm{e}^{-1}$:

$$60\,\mathrm{e}^{-0{,}05\,t} \leqslant 60\,\mathrm{e}^{-1} \iff \mathrm{e}^{-0{,}05\,t} \leqslant \mathrm{e}^{-1} \iff -0{,}05\,t \leqslant -1$$

En divisant par $-0{,}05$, qui est négatif, l'inégalité change de sens :

$t \geqslant 20$ d'où Le café est buvable à partir de 20 minutes

EXERCICE 28 ⋆⋆

1. Pour chacune des quatre fonctions, l'exposant s'annule en $x = 0$, et $\mathrm{e}^0 = 1$:

$$\mathrm{e}^0 = 1 \quad ; \quad \mathrm{e}^{-0} = 1 \quad ; \quad \mathrm{e}^{2\times 0} = 1 \quad ; \quad \mathrm{e}^{\frac{0}{2}} = 1$$

Les quatre courbes passent par le point de coordonnées $(0\,;1)$

2. On applique $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$, puis on évalue en 0 :

Fonction	**Dérivée**	**Valeur en** 0	**Courbe**
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	e^x	1	$\mathcal{C}_4$
$x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$	$-\mathrm{e}^{-x}$	-1	$\mathcal{C}_3$
$x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$	$2\mathrm{e}^{2x}$	2	$\mathcal{C}_2$
$x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$	$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\mathcal{C}_1$

3. Les quatre courbes se croisant toutes en $(0\,;1)$, c'est la *pente* en ce point qui permet de les distinguer : plus le coefficient directeur est grand, plus la courbe monte vite.

$$\mathcal{C}_1 : \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \quad ; \quad \mathcal{C}_2 : \mathrm{e}^{2x} \quad ; \quad \mathcal{C}_3 : \mathrm{e}^{-x} \quad ; \quad \mathcal{C}_4 : \mathrm{e}^x$$

En effet $\mathcal{C}_2$ est la plus redressée, $\mathcal{C}_1$ la plus aplatie, et $\mathcal{C}_3$ est la seule à descendre.

4. Une fonction est décroissante lorsque sa dérivée est négative. Or $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $-\mathrm{e}^{-x} < 0$:

Seule $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$

Les trois autres dérivées sont de la forme $k\,\mathrm{e}^u$ avec $k > 0$, donc strictement positives.

EXERCICE 29 ⋆⋆⋆

Partie A : la démonstration.

1. $$\boxed{g'(x) = \mathrm{e}^x - 1}$$

2. Par stricte croissance de l'exponentielle :

$$g'(x) \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \geqslant 1 = \mathrm{e}^0 \iff x \geqslant 0$$

$$\boxed{g'(x) < 0 \text{ sur }]-\infty\,;0[\quad \text{et} \quad g'(x) > 0 \text{ sur }]0\,;+\infty[}$$

3.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	0	↗	

$$g(0) = \mathrm{e}^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = \boxed{0}$$

4. La fonction g atteint son minimum en 0, et ce minimum vaut 0. Donc pour tout réel x, $g(x) \geqslant g(0) = 0$:

$$\mathrm{e}^x - x - 1 \geqslant 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\mathrm{e}^x \geqslant x + 1}$$

5. L'inégalité signifie que l'ordonnée d'un point de $\mathcal{C}$ est toujours supérieure ou égale à celle du point de T_0 de même abscisse.

$$\boxed{\mathcal{C} \text{ est située au-dessus de sa tangente } T_0 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ tout entier}}$$

C'est exactement ce que la figure de l'exercice 14 laissait deviner.

6. L'égalité $g(x) = 0$ n'a lieu qu'au minimum, atteint en $x = 0$:

$$\boxed{\text{L'égalité } \mathrm{e}^x = x + 1 \text{ n'a lieu que pour } x = 0}$$

Géométriquement, c'est le point de contact entre $\mathcal{C}$ et T_0.

Partie B : deux conséquences.

7. Pour $x > 0$, on a $x + 1 > x$, donc par transitivité :

$$\mathrm{e}^x \geqslant x + 1 > x \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\mathrm{e}^x > x}$$

8. L'inégalité $\mathrm{e}^X \geqslant X + 1$ est valable pour *tout* réel X. En l'appliquant à $X = -x$:

$$\boxed{\mathrm{e}^{-x} \geqslant -x + 1 = 1 - x}$$

9. Soit $x < 1$. Alors $1 - x > 0$, et l'on sait par ailleurs que $\mathrm{e}^{-x} > 0$. Les deux membres de l'inégalité $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$ étant strictement positifs, on peut passer à l'inverse, ce qui **change le sens** de l'inégalité :

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{-x}} \leqslant \frac{1}{1-x}$$

Or $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}^{x}$ d'après la proposition 2 du cours :

$$\boxed{\mathrm{e}^{x} \leqslant \frac{1}{1-x} \qquad \text{pour tout } x < 1}$$

On dispose ainsi d'un encadrement de l'exponentielle sur $]-\infty\,;1[$:

$$x + 1 \leqslant \mathrm{e}^{x} \leqslant \frac{1}{1-x}$$

EXERCICE 30 ⋆⋆⋆

1. Avec $u(x) = x + m$ et $v(x) = \mathrm{e}^{x}$:

$$f'_m(x) = 1 \times \mathrm{e}^{x} + (x+m) \times \mathrm{e}^{x} = \boxed{(x+m+1)\,\mathrm{e}^{x}}$$

2. Comme $\mathrm{e}^{x} > 0$, le signe de $f'_m(x)$ est celui de $x + m + 1$, qui s'annule en $x = -m - 1$:

$$f'_m(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant -m - 1$$

x	$-\infty$		$-m-1$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	$\searrow$		$-\mathrm{e}^{-m-1}$		$\nearrow$

3. La fonction décroît puis croît : elle admet donc un minimum, atteint en $-m-1$. On le calcule :

$$\begin{aligned} f_m(-m-1) &= (-m-1+m)\,\mathrm{e}^{-m-1} \\ &= (-1) \times \mathrm{e}^{-m-1} = \boxed{-\mathrm{e}^{-m-1}} \end{aligned}$$

4. L'exponentielle étant strictement positive, $\mathrm{e}^{-m-1} > 0$, donc son opposé est strictement négatif :

$$\boxed{\text{Pour toute valeur de } m, \text{ le minimum } -\mathrm{e}^{-m-1} \text{ est strictement négatif}}$$

Autrement dit, la courbe de f_m passe toujours en dessous de l'axe des abscisses, quelle que soit la valeur du paramètre.

5. La tangente est horizontale lorsque le nombre dérivé s'annule :

$$f'_m(0) = (0+m+1)\,\mathrm{e}^{0} = m+1$$

$$m + 1 = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{m = -1}$$

6. La courbe passe par $(0\,;3)$ si $f_m(0) = 3$:

$$f_m(0) = (0+m)\,\mathrm{e}^{0} = m \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{m = 3}$$

7. Pour $m = 0$, on a $f_0(x) = x\,\mathrm{e}^{x}$ et $f'_0(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x}$, qui s'annule en -1.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f_0'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_0(x)$	$\searrow$		$-\mathrm{e}^{-1}$		$\nearrow$

Le minimum de f_0 vaut $-\mathrm{e}^{-1} \approx -0{,}37$, atteint en $x = -1$

C'est bien la valeur donnée par la formule générale de la question 3 avec $m = 0$.