EXERCICES – CHAPITRE 8

EXPONENTIELLE

Propriétés algébriques de l'exponentielle

EXERCICE 1 ⋆

Écrire chacun des nombres suivants sous la forme e^k, où k est un entier relatif.

a) $\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^5$

b) $\dfrac{\mathrm{e}^7}{\mathrm{e}^2}$

c) $\left(\mathrm{e}^2\right)^4$

d) $\mathrm{e}^{-3} \times \mathrm{e}^6$

e) $\dfrac{\left(\mathrm{e}^3\right)^2 \times \mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}^4}$

f) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-5}}$

g) $\left(\mathrm{e}^{-2}\right)^{-3}$

h) $\dfrac{\mathrm{e}^4 \times \mathrm{e}^{-4}}{\mathrm{e}^{-2}}$

EXERCICE 2 ⋆

Simplifier les expressions suivantes, où x désigne un réel quelconque.

a) $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{2x}$

b) $\dfrac{\mathrm{e}^{5x}}{\mathrm{e}^{2x}}$

c) $\left(\mathrm{e}^x\right)^3$

d) $\mathrm{e}^{x+1} \times \mathrm{e}^{-x}$

e) $\dfrac{\mathrm{e}^{2x-1}}{\mathrm{e}^{x+3}}$

f) $\left(\mathrm{e}^x\right)^2 \times \mathrm{e}^{-3x}$

g) $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x}$

h) $\dfrac{\left(\mathrm{e}^{2x+1}\right)^3}{\mathrm{e}^x}$

EXERCICE 3 ⋆

Écrire chacune des expressions suivantes sous la forme e^{ax+b}, où a et b sont deux réels à préciser.

a) $\mathrm{e}^{3x} \times \mathrm{e}^{-2}$

b) $\left(\mathrm{e}^{x-1}\right)^4$

c) $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{5-x}}$

d) $\mathrm{e}^{-x+2} \times \left(\mathrm{e}^x\right)^3$

e) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{4x-1}}$

f) $\dfrac{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^2}{\left(\mathrm{e}^{x-1}\right)^2}$

EXERCICE 4 ⋆⋆

Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A = \left(\mathrm{e}^x + 1\right)^2$
2. $B = \left(\mathrm{e}^x - 1\right)\left(\mathrm{e}^x + 1\right)$
3. $C = \left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)^2 - \left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)^2$
4. $D = \left(\mathrm{e}^x + 2\right)\left(\mathrm{e}^x - 3\right)$
5. $E = \left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)$

On donnera le résultat le plus simple possible : certaines de ces expressions ne dépendent même plus de x.

EXERCICE 5 ⋆⋆

Factoriser les expressions suivantes.

a) $e^{2x} + e^x$
b) $e^{2x} - e^x$
c) $xe^x + e^x$
d) $e^{2x} - 1$
e) $3e^x - 3$
f) $x^2e^x - 4e^x$

Pour d), on pensera à écrire $e^{2x} = (e^x)^2$ et à reconnaître une identité remarquable.

EXERCICE 6 ⋆⋆

Démontrer que, pour tout réel x, les égalités suivantes sont vraies.

1. $(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$
2. $\dfrac{e^x}{e^x + 1} = 1 - \dfrac{1}{e^x + 1}$
3. $\dfrac{1}{1 + e^{-x}} = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

Pour la question 3, on pourra multiplier le numérateur et le dénominateur du membre de gauche par e^x. On justifiera que les dénominateurs ne s'annulent jamais.

Équations et inéquations

EXERCICE 7 ⋆

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $e^x = e^3$
b) $e^{2x+1} = e^5$
c) $e^{3x-2} = e^{x+4}$
d) $e^{x^2} = e^{4x-3}$
e) $e^x = 1$
f) $e^{2x} = e$
g) $e^{-x+1} = e^{2x-5}$
h) $e^{x^2-1} = 1$

On rappelle que $1 = e^0$.

EXERCICE 8 ⋆

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes. On justifiera à chaque fois l'utilisation de la positivité stricte de l'exponentielle.

a) $(e^x - 1)(e^x - e) = 0$
b) $(x - 2)e^x = 0$
c) $x^2e^x - e^x = 0$
d) $(2x - 1)e^{x+1} = 0$
e) $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 2} = 0$
f) $e^{2x} - e^{x+3} = 0$

EXERCICE 9 ⋆⋆

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $e^x > e^4$
b) $e^{2x-1} \leqslant e^{x+2}$
c) $e^x < 1$
d) $e^{-3x+2} \geqslant e$
e) $e^{x^2} \leqslant e^{2x+3}$
f) $e^x \geqslant e^{-x}$

EXERCICE 10 ⋆⋆

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes, en dressant un tableau de signes lorsque c'est nécessaire.

1. $(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}) \geqslant 0$
2. $(x-1)\mathrm{e}^x < 0$
3. $(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^2)(x+3) \leqslant 0$
4. $\mathrm{e}^x (x^2 - 4) > 0$

EXERCICE 11 ⋆⋆

On considère l'équation $(E) : \mathrm{e}^{2x} - (1+\mathrm{e})\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e} = 0$.

1. Justifier que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{2x} = (\mathrm{e}^x)^2$.
2. On pose $X = \mathrm{e}^x$. Montrer que (E) équivaut à l'équation $X^2 - (1+\mathrm{e})X + \mathrm{e} = 0$.
3. Vérifier que $X = 1$ et $X = \mathrm{e}$ sont solutions de cette équation.
4. En déduire les solutions de (E).
5. Résoudre de la même manière l'équation $\mathrm{e}^{2x} - (\mathrm{e} + \mathrm{e}^2)\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^3 = 0$.

EXERCICE 12 ⋆⋆

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

a) $\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^x$

b) $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{x-2} = \mathrm{e}^4$

c) $(\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{x+2}$

d) $\mathrm{e}^{x+1} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$

e) $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^3} > \mathrm{e}^x$

f) $\mathrm{e}^{-x} \geqslant \mathrm{e}^{x^2}$

Étude de la fonction exponentielle

EXERCICE 13 ⋆

1. Comparer les nombres suivants, sans calculatrice, en justifiant par le sens de variation de la fonction exponentielle.

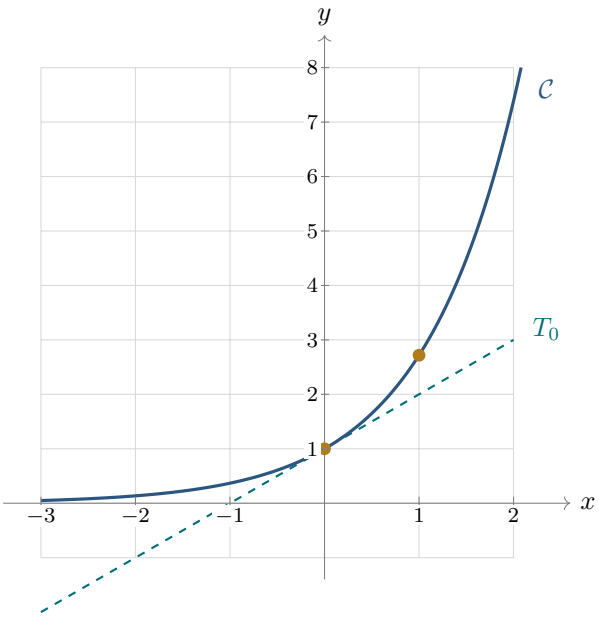
   (a) e^2 et e^3
   (b) e^{-1} et e^{-2}
   (c) $\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$ et $\mathrm{e}^{1,5}$
   (d) e^{π} et e^3
   (e) e^{-3} et 0
   (f) e^0 et 1

2. Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants :

$$\mathrm{e}^{-2} \quad ; \quad \mathrm{e}^{0,5} \quad ; \quad 1 \quad ; \quad \mathrm{e}^{-1} \quad ; \quad \mathrm{e}^3$$

EXERCICE 14 ⋆

Ci-dessous est tracée la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction exponentielle, ainsi que sa tangente T_0 au point d'abscisse 0.



1. Lire graphiquement une valeur approchée de e, puis de e^{-1} et de e^2.
2. Quelle est l'ordonnée du point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 0 ? Quelle propriété du cours retrouve-t-on ?
3. Résoudre graphiquement l'équation $e^x = 4$, puis l'inéquation $e^x \leqslant 2$. On donnera des valeurs approchées.
4. La courbe $\mathcal{C}$ coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Justifier par le cours.
5. Lire le coefficient directeur de T_0, puis en donner une équation. Retrouver ce résultat par le calcul.
6. Quelle semble être la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T_0 ?

EXERCICE 15 ⋆

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle.

1. Rappeler la dérivée de la fonction exponentielle, ainsi que la valeur de e^0.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
3. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
4. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1.
5. Tracer dans un même repère la courbe $\mathcal{C}$ et ces trois tangentes, en prenant 2 cm pour une unité en abscisse et 1 cm pour une unité en ordonnée, avec $-3 \leqslant x \leqslant 2$.
   On utilisera les valeurs approchées $e \approx 2{,}7$ *et* $e^{-1} \approx 0{,}37$.

EXERCICE 16 ⋆⋆

Déterminer le signe de chacune des expressions suivantes, selon les valeurs du réel x.

a) $\mathrm{e}^x - 1$

b) $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^2$

c) $1 - \mathrm{e}^{-x}$

d) $(x-1)\mathrm{e}^x$

e) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x+2}$

f) $x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$

On rappellera à chaque fois l'argument utilisé : la stricte positivité de l'exponentielle, ou sa stricte croissance.

DÉRIVATION

EXERCICE 17 ⋆

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, en précisant à chaque fois la fonction u utilisée dans la formule $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$

b) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$

c) $f(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$

d) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$

e) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2+3x}$

f) $f(x) = \mathrm{e}^{x^3-2x}$

g) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$

h) $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$

EXERCICE 18 ⋆

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$ sauf mention contraire. On factorisera le résultat par une exponentielle.

a) $f(x) = x\mathrm{e}^x$

b) $f(x) = (2x-3)\mathrm{e}^x$

c) $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$

d) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

e) $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$

f) $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$

EXERCICE 19 ⋆⋆

Pour chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$: calculer la dérivée, la factoriser, étudier son signe, puis dresser le tableau de variations de f en précisant les extremums.

1. $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^x$
2. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$
3. $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$

EXERCICE 20 ⋆⋆

Dans chaque cas, déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $a = 0$

b) $f(x) = x\mathrm{e}^x$ et $a = 0$

c) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et $a = 1$

d) $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$ et $a = 0$

On rappelle que la tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

EXERCICE 21 ⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 3)\,\mathrm{e}^x$.

1. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x+3)(x-1)\mathrm{e}^x$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de f, en donnant les valeurs exactes des extremums locaux puis une valeur approchée au centième.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
5. En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

EXERCICE 22 ⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. En déduire que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$, dont on donnera la valeur exacte.
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -1. Que remarque-t-on ?
5. Résoudre l'équation $f(x) = 0$, puis déterminer le signe de $f(x)$.

Exercices de synthèse

EXERCICE 23 : QCM ⋆

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. La justifier.

Question	**Réponse A**	**Réponse B**	**Réponse C**
1. $e^3 \times e^{-5}$ est égal à :	e^{-15}	e^{-2}	e^8
2. $\left(e^{2x}\right)^3$ est égal à :	e^{2x^3}	e^{6x}	e^{5x}
3. L'équation $e^x = 0$ admet :	aucune solution	une solution	deux solutions
4. L'équation $e^{2x} = e^{x+3}$ a pour solution :	$x = 3$	$x = 1$	$x = -3$
5. Pour tout réel x, le nombre e^x est :	positif ou nul	strictement positif	de signe variable
6. La dérivée de $x \mapsto e^{-2x}$ est :	$-2e^{-2x}$	e^{-2x}	$-e^{-2x}$
7. La dérivée de $x \mapsto xe^x$ est :	e^x	$(x+1)e^x$	xe^x
8. L'inéquation $e^x < e^2$ a pour solutions :	$]-\infty\,;2[$	$]2\,;+\infty[$	$\mathbb{R}$
9. La tangente à la courbe de exp au point d'abscisse 0 a pour équation :	$y = x$	$y = x + 1$	$y = ex$
10. Une valeur approchée de e est :	2,718	3,142	1,618

EXERCICE 24 : VRAI OU FAUX ⋆⋆

Chacune des affirmations suivantes est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse : par une démonstration si l'affirmation est vraie, par un contre-exemple sinon.

1. Pour tout réel x, $e^x > 0$.
2. Il existe un réel x tel que $e^x = 0$.
3. Pour tous réels a et b, $e^{a+b} = e^a + e^b$.
4. Pour tout réel x, $(e^x)^2 = e^{2x}$.
5. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
6. $e^{-2} < 0$.
7. Si $e^a = e^b$, alors $a = b$.
8. La dérivée de la fonction $x \mapsto e^{x^2}$ est la fonction $x \mapsto e^{2x}$.
9. La fonction exponentielle est égale à sa fonction dérivée.
10. Pour tout réel x, $e^x \geqslant x + 1$.

EXERCICE 25 - TYPE BAC ⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = x\,\mathrm{e}^x$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.
3. En déduire que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$, dont on précisera la valeur.
4. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0. Que peut-on dire de cette tangente ?
5. Résoudre l'équation $f(x) = 0$, puis déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
6. Calculer $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$, en donnant une valeur approchée au centième.
7. Tracer $\mathcal{C}$ et T dans un repère, pour $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

EXERCICE 26 - TYPE BAC ⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = -(x-1)^2\,\mathrm{e}^{-x}$.
2. Justifier que $f'(x) \leqslant 0$ pour tout réel x, et préciser la seule valeur de x pour laquelle $f'(x) = 0$.
3. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$. La fonction f admet-elle un extremum ?
4. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$. L'équation $f(x) = 0$ admet-elle des solutions ?
5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 1.
6. Interpréter graphiquement le résultat de la question 2 en ce point.

EXERCICE 27 ⋆⋆

Une tasse de café est sortie d'une machine à 80 °C et posée dans une pièce dont la température est de 20 °C. On admet que la température du café, exprimée en degrés Celsius, t minutes après avoir été servi, est donnée par :

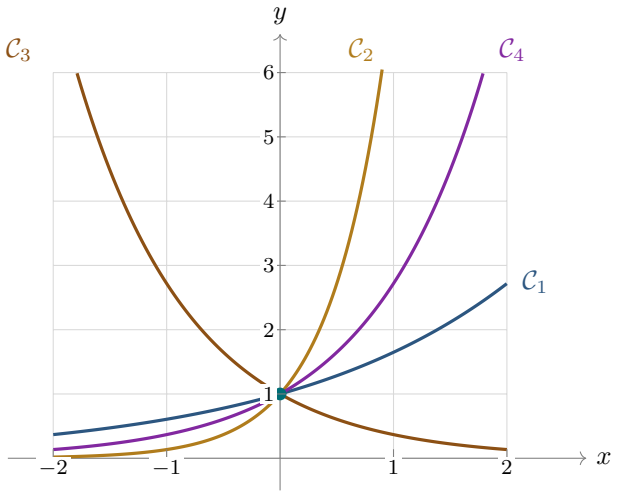
$$T(t) = 20 + 60\,\mathrm{e}^{-0{,}05\,t} \qquad \text{pour } t \geqslant 0$$

1. Vérifier que $T(0) = 80$. Interpréter ce résultat.
2. Calculer $T(20)$, puis en donner une valeur approchée au dixième. Interpréter.
3. Démontrer que $T'(t) = -3\,\mathrm{e}^{-0{,}05\,t}$, puis en déduire le sens de variation de T sur $[0\,;+\infty[$. Ce résultat était-il prévisible ?
4. Résoudre l'équation $T(t) = 20 + \dfrac{60}{\mathrm{e}}$. Interpréter le résultat obtenu.
5. Démontrer que la température du café ne peut jamais atteindre 20 °C. Interpréter physiquement.
6. Le café est buvable lorsque sa température est inférieure ou égale à $20 + 60\,\mathrm{e}^{-1}$ degrés. Au bout de combien de temps peut-on le boire ?

EXERCICE 28 ⋆⋆

Sur le graphique ci-dessous sont tracées quatre courbes, représentant dans le désordre les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto \mathrm{e}^{x} \quad ; \quad x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \quad ; \quad x \mapsto \mathrm{e}^{2x} \quad ; \quad x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$$



1. Justifier que les quatre courbes passent toutes par le point marqué en bleu pétrole, dont on donnera les coordonnées.
2. Calculer le coefficient directeur de la tangente à chacune de ces quatre courbes au point d'abscisse 0.
3. En déduire l'association entre chaque courbe et son expression.
4. Une seule de ces quatre fonctions est décroissante sur $\mathbb{R}$. Laquelle ? Le justifier par un calcul de dérivée.

EXERCICE 29 ⋆⋆⋆

L'objectif de cet exercice est de démontrer que la courbe de la fonction exponentielle se situe toujours au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.

Partie A : la démonstration.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{x} - x - 1$.

1. Calculer $g'(x)$.
2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de g et calculer $g(0)$.
4. En déduire que pour tout réel x, $g(x) \geqslant 0$, puis que :

$$\mathrm{e}^{x} \geqslant x + 1$$

5. Interpréter graphiquement ce résultat, en reprenant la figure de l'exercice 14.
6. Pour quelle valeur de x y a-t-il égalité ?

Partie B : deux conséquences.

7. En déduire que pour tout réel x strictement positif, $\mathrm{e}^{x} > x$.
8. En appliquant l'inégalité de la question 4 au réel $-x$, démontrer que pour tout réel x :

$$\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$$

9. En déduire que pour tout réel x strictement inférieur à 1 :

$$\mathrm{e}^x \leqslant \frac{1}{1-x}$$

On justifiera soigneusement le passage à l'inverse, en précisant le signe des deux membres.

EXERCICE 30 ⋆⋆⋆

Soit m un réel. On considère la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_m(x) = (x+m)\,\mathrm{e}^x$$

1. Démontrer que pour tout réel x, $f'_m(x) = (x+m+1)\,\mathrm{e}^x$.
2. Étudier le signe de $f'_m(x)$ selon les valeurs de x, puis dresser le tableau de variations de f_m en fonction de m.
3. Démontrer que f_m admet un minimum sur $\mathbb{R}$, et que ce minimum vaut $-\mathrm{e}^{-m-1}$.
4. Démontrer que ce minimum est strictement négatif, quelle que soit la valeur de m.
5. Déterminer la valeur de m pour laquelle la tangente à la courbe de f_m au point d'abscisse 0 est horizontale.
6. Déterminer la valeur de m pour laquelle la courbe de f_m passe par le point de coordonnées $(0\,;3)$.
7. Dans le cas particulier $m = 0$, dresser le tableau de variations de f_0 et donner la valeur exacte de son minimum.