CORRIGÉ

SOMMES ET SUITES ARITHMÉTIQUES

Calculs de sommes

EXERCICE 1 ⋆

On utilise la formule du cours : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1. $$1 + 2 + 3 + \cdots + 50 = \frac{50 \times 51}{2} = 25 \times 51 = \boxed{1\,275}$$

2. $$1 + 2 + 3 + \cdots + 200 = \frac{200 \times 201}{2} = 100 \times 201 = \boxed{20\,100}$$

3. La somme $51 + 52 + \cdots + 100$ est la somme des entiers de 1 à 100, à laquelle on retire la somme des entiers de 1 à 50 :

   $$51 + 52 + \cdots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} - \frac{50 \times 51}{2} = 5\,050 - 1\,275 = \boxed{3\,775}$$

   L'erreur la plus répandue est de retirer la somme jusqu'à 51 : le terme 51 doit être conservé, on retire donc exactement les termes de 1 à 50.

4. Chaque terme est le double d'un entier compris entre 1 et 50. On factorise par 2 :

   $$2 + 4 + 6 + \cdots + 100 = 2\,(1 + 2 + 3 + \cdots + 50) = 2 \times 1\,275 = \boxed{2\,550}$$

5. Les entiers impairs de 1 à 99 sont au nombre de 50, puisque $99 = 2 \times 50 - 1$. On peut retirer la somme des pairs de la somme de tous les entiers jusqu'à 100 :

   $$1 + 3 + 5 + \cdots + 99 = 5\,050 - 2\,550 = \boxed{2\,500}$$

   On peut aussi utiliser la formule « nombre de termes × moyenne des termes extrêmes » : $50 \times \dfrac{1 + 99}{2} = 50 \times 50 = 2\,500$. On remarque que $2\,500 = 50^2$: l'exercice 2 explique ce résultat.

EXERCICE 2 ⋆

1. $$\sum_{k=1}^{40} k = 1 + 2 + \cdots + 40 = \frac{40 \times 41}{2} = \boxed{820}$$

2. Le terme général ne dépend pas de k : on additionne le nombre 6 autant de fois qu'il y a de valeurs de k entre 0 et 15, c'est-à-dire 16 fois.

   $$\sum_{k=0}^{15} 6 = 16 \times 6 = \boxed{96}$$

   L'erreur la plus répandue est de compter 15 termes : de 0 à 15, il y a $15 - 0 + 1 = 16$ valeurs de k.

3. On sépare la somme en deux, puis on applique la formule :

   $$\sum_{k=1}^{25} (2k - 1) = 2 \sum_{k=1}^{25} k - \sum_{k=1}^{25} 1 = 2 \times \frac{25 \times 26}{2} - 25 = 650 - 25 = \boxed{625}$$

4. De même :
$$\sum_{k=1}^{30}(3k+2) = 3\sum_{k=1}^{30} k + \sum_{k=1}^{30} 2 = 3 \times \frac{30 \times 31}{2} + 30 \times 2 = 1\,395 + 60 = \boxed{1\,455}$$

5. La somme commence à $k = 10$: on retire de la somme des entiers de 1 à 40 celle des entiers de 1 à 9.
$$\sum_{k=10}^{40} k = \frac{40 \times 41}{2} - \frac{9 \times 10}{2} = 820 - 45 = \boxed{775}$$

On remarque que $625 = 25^2$: la somme des 25 premiers entiers impairs est le carré de 25. Avec le résultat $2\,500 = 50^2$ de l'exercice 1, on peut conjecturer :
$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$
Le même calcul qu'à la question 3 le démontre pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = \boxed{n^2}$$

EXERCICE 3 ⋆⋆

On cherche n tel que $\dfrac{n(n+1)}{2} = S$, c'est-à-dire $n(n+1) = 2S$. On cherche donc deux entiers consécutifs dont le produit vaut $2S$.

1. $n(n+1) = 156$. Or $12 \times 13 = 156$, donc $\boxed{n = 12}$.
2. $n(n+1) = 420$. Or $20 \times 21 = 420$, donc $\boxed{n = 20}$.
3. $n(n+1) = 3\,080$. Comme $55^2 = 3\,025$, on essaie $55 \times 56 = 3\,080$, donc $\boxed{n = 55}$.

On peut aussi résoudre l'équation du second degré $n^2 + n - 2S = 0$. Par exemple, pour $S = 78$: $\Delta = 1 + 624 = 625 = 25^2$, d'où $n = \dfrac{-1+25}{2} = 12$, l'autre racine étant négative.

Pour $S = 100$, il faudrait $n(n+1) = 200$. Or $13 \times 14 = 182$ et $14 \times 15 = 210$, et le produit $n(n+1)$ augmente avec n : il passe de 182 à 210 sans prendre la valeur 200.

$$\boxed{\text{Il n'existe aucun entier } n \text{ tel que } 1 + 2 + \cdots + n = 100}$$

On le confirme avec le discriminant de $n^2 + n - 200 = 0$: $\Delta = 801$, qui n'est pas le carré d'un entier, puisque $28^2 = 784$ et $29^2 = 841$.

Sommes de termes d'une suite arithmétique

EXERCICE 4 ⋆

1. D'après la formule explicite du cours :
$$\boxed{u_n = u_0 + nr = 5 + 3n} \qquad \text{d'où} \qquad u_{10} = 5 + 30 = \boxed{35}$$

2. La somme S compte 11 termes, de u_0 à u_{10}. Avec la formule « nombre de termes × moyenne des termes extrêmes » :
$$S = 11 \times \frac{u_0 + u_{10}}{2} = 11 \times \frac{5+35}{2} = 11 \times 20 = \boxed{220}$$
On peut aussi faire comme dans le cours, en séparant le premier terme et la raison :
$$S = 11 \times 5 + 3\,(0 + 1 + \cdots + 10) = 55 + 3 \times \frac{10 \times 11}{2} = 55 + 165 = 220$$
Vérification : $5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29 + 32 + 35 = 220$.

EXERCICE 5 ⋆

1. La suite commence au rang 1 : $v_n = v_1+(n-1)r = 7-2(n-1) = 9-2n$, donc $v_{20} = 9-40 = -31$. La somme compte 20 termes :

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_{20} = 20 \times \frac{v_1 + v_{20}}{2} = 20 \times \frac{7-31}{2} = \boxed{-240}$$

2. De même, $w_n = 100 - 7(n-1)$, donc $w_{20} = 100 - 133 = -33$:

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_{20} = 20 \times \frac{100-33}{2} = 10 \times 67 = \boxed{670}$$

La première somme est négative, la seconde est positive. Le signe d'une telle somme dépend du signe de la moyenne $\dfrac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$: dans le premier cas les termes deviennent négatifs très tôt ($v_5 = -1$), et les termes négatifs l'emportent ; dans le second, les termes restent positifs jusqu'à $w_{15} = 2$, et les termes positifs l'emportent largement.

EXERCICE 6 ⋆⋆

1. D'après la formule $u_n = u_p + (n-p)r$ avec $n = 9$ et $p = 3$:

$$u_9 = u_3 + 6r \iff 35 = 11 + 6r \iff 6r = 24 \iff \boxed{r = 4}$$

Puis $u_3 = u_0 + 3r$, d'où $u_0 = 11 - 12 = \boxed{-1}$.

2. $$\boxed{u_n = -1 + 4n}$$

Contrôle : $u_3 = -1 + 12 = 11$ et $u_9 = -1 + 36 = 35$.

3. La somme compte 20 termes, de u_0 à u_{19}, et $u_{19} = -1 + 76 = 75$:

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{19} = 20 \times \frac{-1+75}{2} = 10 \times 74 = \boxed{740}$$

4. $$u_n > 2\,000 \iff -1 + 4n > 2\,000 \iff 4n > 2\,001 \iff n > 500{,}25$$

n étant un entier : $\boxed{n = 501}$. Contrôle : $u_{500} = 1\,999$ et $u_{501} = 2\,003$.

PROBLÈMES

EXERCICE 7 ⋆⋆

On note u_k le nombre de places du rang k, pour $1 \leqslant k \leqslant 25$. La suite (u_k) est arithmétique de premier terme $u_1 = 18$ et de raison 3 : $u_k = 18 + 3(k-1) = 3k + 15$.

1. $$u_{25} = 18 + 3 \times 24 = \boxed{90 \text{ places}}$$

2. $$u_1 + u_2 + \cdots + u_{25} = 25 \times \frac{18+90}{2} = 25 \times 54 = \boxed{1\,350 \text{ places}}$$

3. Le nombre de places cumulées des k premiers rangs vaut :

$$S_k = k \times \frac{u_1 + u_k}{2} = k \times \frac{18 + 3k + 15}{2} = \frac{k(3k+33)}{2}$$

On cherche le plus petit k tel que $S_k > 1\,000$, c'est-à-dire $3k^2 + 33k - 2\,000 > 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 33^2 + 4 \times 3 \times 2\,000 = 25\,089$, et la racine positive est $\dfrac{-33 + \sqrt{25\,089}}{6} \approx 20{,}9$. Le trinôme est positif au-delà de cette racine, donc :

$$\boxed{\text{le cumul dépasse 1 000 places à partir du rang 21}}$$

Contrôle : $S_{20} = \dfrac{20 \times 93}{2} = 930$ et $S_{21} = \dfrac{21 \times 96}{2} = 1\,008$.

EXERCICE 8 ⋆⋆

On note m_n le versement du n-ième mois. La suite (m_n) est arithmétique de premier terme $m_1 = 50$ et de raison 10 : $m_n = 50 + 10(n-1) = 10n + 40$.

1. $$m_{12} = 50 + 10 \times 11 = \boxed{160 \text{ euros}}$$

2. $$m_1 + m_2 + \cdots + m_{12} = 12 \times \frac{50 + 160}{2} = 12 \times 105 = \boxed{1\,260 \text{ euros}}$$

3. $$S_n = n \times \frac{m_1 + m_n}{2} = n \times \frac{50 + 10n + 40}{2} = \frac{n(10n + 90)}{2} = \boxed{5n^2 + 45n}$$

   Contrôle : $S_{12} = 5 \times 144 + 45 \times 12 = 720 + 540 = 1\,260$, comme à la question 2.

4. $S_n > 3\,000 \iff 5n^2 + 45n - 3\,000 > 0 \iff n^2 + 9n - 600 > 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 81 + 2\,400 = 2\,481$, et la racine positive est $\dfrac{-9 + \sqrt{2\,481}}{2} \approx 20{,}4$.

   $$\boxed{\text{le total dépasse 3 000 euros au bout de 21 mois}}$$

   Contrôle : $S_{20} = 2\,000 + 900 = 2\,900$ et $S_{21} = 2\,205 + 945 = 3\,150$.

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. On ajoute à chaque fois l'entier suivant :

   $$T_1 = 1 \quad ; \quad T_2 = 3 \quad ; \quad T_3 = 6 \quad ; \quad T_4 = 10 \quad ; \quad T_5 = 15 \quad ; \quad T_6 = 21$$

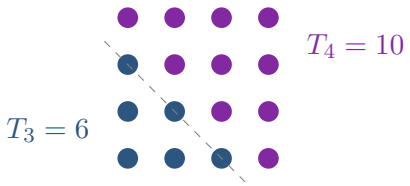
2. $T_1 + T_2 = 4$, $T_2 + T_3 = 9$, $T_3 + T_4 = 16$. On obtient les carrés 2^2, 3^2, 4^2. On conjecture :

   $$T_n + T_{n+1} = (n+1)^2$$

3. Pour tout $n \geqslant 1$, d'après la formule du cours :

   $$T_n + T_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)\big(n + (n+2)\big)}{2} = \frac{(n+1)(2n+2)}{2} = \boxed{(n+1)^2}$$

   en factorisant par $n+1$.



Le carré de $4 \times 4 = 16$ points se découpe le long d'une diagonale en deux triangles : les 6 points bleu ardoise forment le triangle T_3, les 10 points violets le triangle T_4. C'est l'origine du nom « nombres triangulaires ».

4. D'après la question 3 avec $n = 99$:

$$T_{99} + T_{100} = 100^2 = \boxed{10\,000}$$

EXERCICE 10 ⋆⋆⋆

1. $18 + 19 + 20 + 21 + 22 = 5 \times \dfrac{18+22}{2} = 5 \times 20 = 100$. Pour une autre écriture, on cherche un nombre pair de termes : la somme de 8 entiers consécutifs à partir de 9 convient.

$$\boxed{100 = 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16}$$

En effet, $8 \times \dfrac{9+16}{2} = 4 \times 25 = 100$. La question 2 donne une méthode pour trouver ces écritures : il faut $p(2a + p - 1) = 200$, et $p = 8$ donne $2a + 7 = 25$, soit $a = 9$.

2. Les p entiers consécutifs à partir de a sont a, $a+1$, …, $a+p-1$. Ils forment une suite arithmétique de raison 1, et leur somme vaut :

$$S = p \times \frac{a + (a + p - 1)}{2} = \boxed{\frac{p\,(2a + p - 1)}{2}}$$

On peut aussi écrire $S = p\,a + (0 + 1 + \cdots + (p-1)) = pa + \dfrac{(p-1)p}{2}$, et l'on retrouve la même expression.

3. La différence des deux facteurs vaut $(2a + p - 1) - p = 2a - 1$, qui est impair. Or deux entiers de même parité ont une différence paire. Les deux facteurs sont donc de parités différentes :

$$\boxed{\text{l'un des facteurs } p \text{ et } 2a + p - 1 \text{ est pair, l'autre impair}}$$

4. Supposons que 64 s'écrive ainsi. Alors $p(2a + p - 1) = 128 = 2^7$. D'après la question 3, l'un des deux facteurs est impair ; or le seul diviseur impair de 2^7 est 1. Mais $p \geqslant 2$, et $2a + p - 1 \geqslant 2 + 2 - 1 = 3$: aucun des deux facteurs ne peut valoir 1. C'est une contradiction.

$$\boxed{\text{64 ne s'écrit pas comme somme d'au moins deux entiers consécutifs strictement positifs}}$$

Le même raisonnement s'applique à toutes les puissances de 2 : 2, 4, 8, 16, 32, 64, … On peut montrer que ce sont les seuls entiers qui n'ont pas d'écriture de ce type.