EXERCICES

SOMMES ET SUITES ARITHMÉTIQUES

Calculs de sommes

EXERCICE 1 ⋆

Calculer les sommes suivantes.

1. $1+2+3+\cdots+50$
2. $1+2+3+\cdots+200$
3. $51+52+53+\cdots+100$
4. $2+4+6+\cdots+100$
5. $1+3+5+\cdots+99$

Pour la question 3., on remarquera que cette somme s'obtient à partir de deux sommes du type $1+2+\cdots+n$.

EXERCICE 2 ⋆

Calculer les sommes suivantes, écrites avec le symbole $\sum$.

1. $\sum_{k=1}^{40} k$ **2.** $\sum_{k=0}^{15} 6$ **3.** $\sum_{k=1}^{25}(2k-1)$ **4.** $\sum_{k=1}^{30}(3k+2)$ **5.** $\sum_{k=10}^{40} k$

Que remarque-t-on sur le résultat de la question 3. ? Formuler une conjecture pour $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$.

EXERCICE 3 ⋆⋆

Déterminer, dans chaque cas, l'entier n tel que :

1. $1+2+\cdots+n=78$
2. $1+2+\cdots+n=210$
3. $1+2+\cdots+n=1\,540$

Existe-t-il un entier n tel que $1+2+\cdots+n=100$? Justifier.

Sommes de termes d'une suite arithmétique

EXERCICE 4 ⋆

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0=5$ et de raison $r=3$.

1. Exprimer u_n en fonction de n, puis calculer u_{10}.
2. Calculer $S=u_0+u_1+\cdots+u_{10}$, puis vérifier le résultat en additionnant les onze termes un à un.

EXERCICE 5 ⋆

Calculer la somme des termes de chacune des suites arithmétiques suivantes.

1. $v_1=7$ et raison -2 : calculer $v_1+v_2+\cdots+v_{20}$.
2. $w_1=100$ et raison -7 : calculer $w_1+w_2+\cdots+w_{20}$.

Les deux suites sont décroissantes : l'une des deux sommes est-elle négative ?

EXERCICE 6 ⋆⋆

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_3 = 11$ et $u_9 = 35$.

1. Déterminer la raison r, puis le premier terme u_0.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{19}$.
4. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > 2\,000$.

Problèmes

EXERCICE 7 ⋆⋆

Les gradins d'un amphithéâtre comptent 25 rangs. Le premier rang compte 18 places, et chaque rang compte 3 places de plus que le précédent.

1. Combien de places compte le dernier rang ?
2. Combien l'amphithéâtre compte-t-il de places au total ?
3. À partir de quel rang le nombre *cumulé* de places dépasse-t-il 1 000 ?

EXERCICE 8 ⋆⋆

Le premier mois, Alice verse 50 euros sur un compte épargne. Chaque mois suivant, elle verse 10 euros de plus que le mois précédent.

1. Quel montant verse-t-elle le douzième mois ?
2. Quelle somme totale a-t-elle versée au bout d'un an ?
3. On note S_n le total versé au bout de n mois. Montrer que $S_n = 5n^2 + 45n$.
4. Au bout de combien de mois le total versé dépasse-t-il 3 000 euros ?

EXERCICE 9 ⋆⋆

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on appelle n-ième *nombre triangulaire* l'entier

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

1. Calculer T_1, T_2, …, T_6.
2. Calculer $T_1 + T_2$, puis $T_2 + T_3$, puis $T_3 + T_4$. Que remarque-t-on ?
3. Démontrer la conjecture obtenue à la question précédente.
4. En déduire, sans calculer T_{99} ni T_{100}, la valeur de $T_{99} + T_{100}$.

EXERCICE 10 ⋆⋆⋆

On cherche à écrire un entier comme somme d'entiers consécutifs strictement positifs. On a par exemple $9 = 4 + 5$ et $9 = 2 + 3 + 4$.

1. Vérifier que $100 = 18 + 19 + 20 + 21 + 22$. Trouver une autre écriture de 100 comme somme d'entiers consécutifs strictement positifs.
2. Soit $a \geqslant 1$ et $p \geqslant 2$ deux entiers. Montrer que la somme des p entiers consécutifs à partir de a vaut
$$S = \frac{p\,(2a + p - 1)}{2}$$
3. Dans l'expression p et $2a + p - 1$, démontrer que l'un des deux facteurs est pair et l'autre impair.
4. En déduire qu'aucune écriture de ce type n'est possible pour 64.