CORRIGÉ

SOMMES ET SUITES GÉOMÉTRIQUES

Calculs de sommes

EXERCICE 1 ⋆

On utilise la formule du cours : pour tout réel $q \neq 1$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $1+q+q^2+\cdots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
On repère à chaque fois la raison q et le **dernier exposant** n : la somme compte alors $n+1$ termes.

1. $q = 2$ et $n = 10$:
$$1+2+2^2+\cdots+2^{10} = \frac{1-2^{11}}{1-2} = 2^{11}-1 = \boxed{2\,047}$$

2. $q = 3$ et $n = 6$:
$$1+3+3^2+\cdots+3^6 = \frac{1-3^7}{1-3} = \frac{3^7-1}{2} = \frac{2\,186}{2} = \boxed{1\,093}$$

3. $q = \dfrac{1}{2}$ et $n = 10$:
$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{10}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2\,048}\right) = 2-\frac{1}{1\,024} = \boxed{\frac{2\,047}{1\,024}}$$
La somme est très proche de 2, sans jamais l'atteindre : l'exercice 9 en donne une interprétation géométrique.

4. Chaque terme est l'opposé du double du précédent : $q = -2$. Comme $256 = 2^8 = (-2)^8$, le dernier exposant est $n = 8$, et la somme compte 9 termes.
$$1-2+4-\cdots+256 = \frac{1-(-2)^9}{1-(-2)} = \frac{1+512}{3} = \boxed{171}$$
L'erreur la plus répandue est d'écrire $(-2)^9 = 512$: une puissance impaire d'un nombre négatif est négative, donc $(-2)^9 = -512$.

5. $q = 10$ et $n = 6$:
$$1+10+100+\cdots+10^6 = \frac{1-10^7}{1-10} = \frac{9\,999\,999}{9} = \boxed{1\,111\,111}$$
Le résultat se voit aussi directement en posant l'addition en colonnes : chaque puissance de 10 apporte un chiffre 1.

EXERCICE 2 ⋆

1.
$$\sum_{k=0}^{7} 2^k = 1+2+\cdots+2^7 = \frac{1-2^8}{1-2} = 2^8-1 = \boxed{255}$$

2. Le facteur 3 est commun à tous les termes, on le met en facteur :
$$\sum_{k=0}^{5} 3\times 2^k = 3\left(1+2+\cdots+2^5\right) = 3\times(2^6-1) = 3\times 63 = \boxed{189}$$

3. **Attention**, la somme commence à $k = 1$: il manque le terme $5^0 = 1$. On met 5 en facteur :

$$\sum_{k=1}^{6} 5^k = 5\left(1 + 5 + \cdots + 5^5\right) = 5 \times \frac{5^6 - 1}{5 - 1} = 5 \times \frac{15\,624}{4} = \boxed{19\,530}$$

On peut aussi calculer la somme de $k = 0$ à 6, puis retirer 1 : $\dfrac{5^7 - 1}{4} - 1 = 19\,531 - 1 = 19\,530$.

4. $$\sum_{k=0}^{4} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \times \left(1 - \frac{1}{243}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{242}{243} = \boxed{\frac{121}{81}}$$

5. Ici $q = 1$, et **la formule du cours ne s'applique pas**, puisqu'elle demande $q \neq 1$: on diviserait par 0. Tous les termes valent $1^k = 1$, et il y en a 21, de $k = 0$ à $k = 20$.

$$\sum_{k=0}^{20} 1^k = \boxed{21}$$

Les termes $(-1)^k$ valent alternativement 1 et -1, et se compensent deux à deux :

$$\sum_{k=0}^{9} (-1)^k = \underbrace{(1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1)}_{5 \text{ paires}} = \boxed{0} \qquad ; \qquad \sum_{k=0}^{10} (-1)^k = 0 + (-1)^{10} = \boxed{1}$$

On conjecture que la somme vaut 1 si n est pair et 0 si n est impair. La formule du cours, avec $q = -1$, le confirme :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{1 - (-1)} = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2} = \begin{cases} \frac{1+1}{2} = 1 & \text{si } n \text{ est pair } (n+1 \text{ impair}) \\ \frac{1-1}{2} = 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

EXERCICE 3 ⋆⋆

D'après la formule du cours, $1 + 2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ et $1 + 3 + \cdots + 3^n = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$. On se ramène donc à reconnaître une puissance.

1. $2^{n+1} - 1 = 1\,023 \iff 2^{n+1} = 1\,024 = 2^{10} \iff n + 1 = 10$, donc $\boxed{n = 9}$.
2. $2^{n+1} - 1 = 4\,095 \iff 2^{n+1} = 4\,096 = 2^{12}$, donc $\boxed{n = 11}$.
3. $\dfrac{3^{n+1} - 1}{2} = 1\,093 \iff 3^{n+1} = 2\,187 = 3^7$, donc $\boxed{n = 6}$.

Il faudrait $2^{n+1} = 1\,001$. Or $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1\,024$: aucune puissance de 2 ne vaut 1 001. On peut aussi remarquer que $2^{n+1} - 1$ est toujours impair, alors que 1 000 est pair.

$$\boxed{\text{Il n'existe aucun entier } n \text{ tel que } 1 + 2 + \cdots + 2^n = 1\,000}$$

Sommes de termes d'une suite géométrique

EXERCICE 4 ⋆

1. D'après la formule explicite du cours :

$$\boxed{v_n = v_0 \times q^n = 5 \times 3^n} \qquad \text{d'où} \qquad v_6 = 5 \times 729 = \boxed{3\,645}$$

2. On met le premier terme en facteur, comme dans le cours :

$$S = 5\,(1 + 3 + \cdots + 3^6) = 5 \times \frac{1 - 3^7}{1 - 3} = 5 \times \frac{2\,186}{2} = \boxed{5\,465}$$

C'est la formule « premier terme $\times \dfrac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$ », avec 7 termes.

Vérification : $5 + 15 + 45 + 135 + 405 + 1\,215 + 3\,645 = 5\,465$.

EXERCICE 5 ⋆

1. La somme compte 7 termes, de w_1 à w_7, et son premier terme vaut 64 :

$$w_1 + \cdots + w_7 = 64 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7}{1 - \frac{1}{2}} = 128\left(1 - \frac{1}{128}\right) = 128 - 1 = \boxed{127}$$

Contrôle : $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 127$.

2. La somme compte 6 termes, de t_0 à t_5 :

$$t_0 + \cdots + t_5 = 2 \times \frac{1 - (-3)^6}{1 - (-3)} = 2 \times \frac{1 - 729}{4} = \boxed{-364}$$

Contrôle : $2 - 6 + 18 - 54 + 162 - 486 = -364$.

La raison étant négative, les termes changent de signe à chaque rang, et leur valeur absolue est multipliée par 3. Le dernier terme, $t_5 = -486$, est négatif et l'emporte sur tous les autres réunis, dont la somme ne vaut que 122. C'est une propriété générale : lorsque $q < -1$, le signe de la somme est celui de son dernier terme.

EXERCICE 6 ⋆⋆

1. D'après la formule $u_n = u_p \times q^{n-p}$ avec $n = 5$ et $p = 2$:

$$u_5 = u_2 \times q^3 \iff 96 = 12\,q^3 \iff q^3 = 8 \iff \boxed{q = 2}$$

car 2 est le seul réel dont le cube vaut 8. Puis $u_2 = u_0 \times q^2$, d'où $u_0 = \dfrac{12}{4} = \boxed{3}$.

2. $$\boxed{u_n = 3 \times 2^n}$$

Contrôle : $u_2 = 3 \times 4 = 12$ et $u_5 = 3 \times 32 = 96$.

3. La somme compte 10 termes :

$$u_0 + \cdots + u_9 = 3 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 3 \times 1\,023 = \boxed{3\,069}$$

4. La suite est croissante, puisque $u_{n+1} = 2u_n > u_n$. La calculatrice donne $u_{11} = 3 \times 2\,048 = 6\,144$ et $u_{12} = 3 \times 4\,096 = 12\,288$. $\boxed{n = 12}$

Problèmes

EXERCICE 7 ⋆⋆

Le nombre de grains de la case numéro k est $g_k = 2^{k-1}$: c'est une suite géométrique de premier terme $g_1 = 1$ et de raison 2.

1. $$g_{64} = \boxed{2^{63}} \approx 9{,}2 \times 10^{18} \text{ grains}$$

2. $$g_1 + g_2 + \cdots + g_{64} = 1 + 2 + \cdots + 2^{63} = \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = \boxed{2^{64} - 1} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

   soit environ $1{,}8 \times 10^{19}$ grains. On remarque que $2^{64} - 1 = 2 \times 2^{63} - 1$: le total est égal au double de la dernière case, moins un grain. La dernière case contient à elle seule plus de la moitié du blé !

3. La masse totale vaut environ $1{,}8 \times 10^{19} \times 0{,}05 = 9{,}2 \times 10^{17}$ g, soit $9{,}2 \times 10^{11}$ tonnes, car 1 tonne $= 10^6$ g. Le nombre d'années de production nécessaires est d'environ :

$$\frac{9{,}2 \times 10^{11}}{8 \times 10^{8}} \approx \boxed{1\,150 \text{ ans}}$$

La croissance d'une suite géométrique de raison 2 dépasse très vite l'intuition : c'est tout l'objet de la légende.

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. Augmenter de 2 %, c'est multiplier par 1,02 : (a_n) est **géométrique** de raison 1,02. Augmenter de 500 euros, c'est ajouter 500 : (b_n) est **arithmétique** de raison 500. Comme le premier terme est d'indice 1 :

$$\boxed{a_n = 21\,600 \times 1{,}02^{\,n-1}} \quad ; \quad \boxed{b_n = 21\,600 + 500\,(n-1)}$$

2. Contrat A. Somme de N termes géométriques :

$$A_N = 21\,600 \times \frac{1 - 1{,}02^N}{1 - 1{,}02} = 21\,600 \times \frac{1{,}02^N - 1}{0{,}02}$$

   d'où $A_{10} \approx \boxed{236\,514}$ euros et $A_{20} \approx \boxed{524\,823}$ euros.

   Contrat B. Somme de N termes arithmétiques, avec $b_{10} = 26\,100$ et $b_{20} = 31\,100$:

$$B_{10} = 10 \times \frac{21\,600 + 26\,100}{2} = \boxed{238\,500} \text{ euros}$$

$$B_{20} = 20 \times \frac{21\,600 + 31\,100}{2} = \boxed{527\,000} \text{ euros}$$

   Sur 10 comme sur 20 ans, le contrat B est plus avantageux.

3. La calculatrice, par exemple avec un tableau de valeurs de A_N et B_N, donne :

N	A_N (euros)	B_N (euros)
23	$\approx 623\,051$	623 300
24	$\approx 657\,112$	656 400

le contrat A devient plus avantageux à partir de 24 ans

Au début, l'augmentation de 2 % ne représente que 432 euros, moins que 500 euros ; mais elle porte sur un salaire qui grandit, et finit par dépasser toute augmentation fixe. **Une croissance géométrique de raison $q > 1$ finit toujours par l'emporter sur une croissance arithmétique**, même si celle-ci est plus rapide au départ.

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. À chaque étape, la partie blanche est divisée par 2. Après $n-1$ étapes, l'aire blanche vaut $\dfrac{1}{2^{n-1}}$, et l'on en colorie la moitié à l'étape n : $\boxed{\dfrac{1}{2^n}}$.

2. L'aire coloriée est la somme de n termes de la suite géométrique de premier terme $\dfrac{1}{2}$ et de raison $\dfrac{1}{2}$:

$$A_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \boxed{1 - \frac{1}{2^n}}$$

   On le retrouve sans calcul : la partie restée blanche a pour aire $\dfrac{1}{2^n}$, et le reste du carré est colorié.

3. $A_n > 0{,}999 \iff \dfrac{1}{2^n} < 0{,}001 \iff 2^n > 1\,000$. Comme $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1\,024$: $\boxed{n = 10}$.

4. Lorsque n devient très grand, $\dfrac{1}{2^n}$ devient aussi petit que l'on veut, et A_n s'approche de 1 : **l'aire coloriée se rapproche de l'aire du carré entier, sans jamais l'atteindre**. C'était prévisible : on colorie toujours une partie de ce qui reste, et ce qui reste ne cesse de diminuer de moitié. On écrit parfois $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots = 1$; donner un sens précis à cette somme infinie est l'objet de la notion de limite, étudiée en Terminale.

EXERCICE 10 ⋆⋆⋆

1. Chaque hauteur est les trois quarts de la précédente : $h_{n+1} = \dfrac{3}{4} h_n$. La suite (h_n) est géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$ et de premier terme $h_0 = 10$:

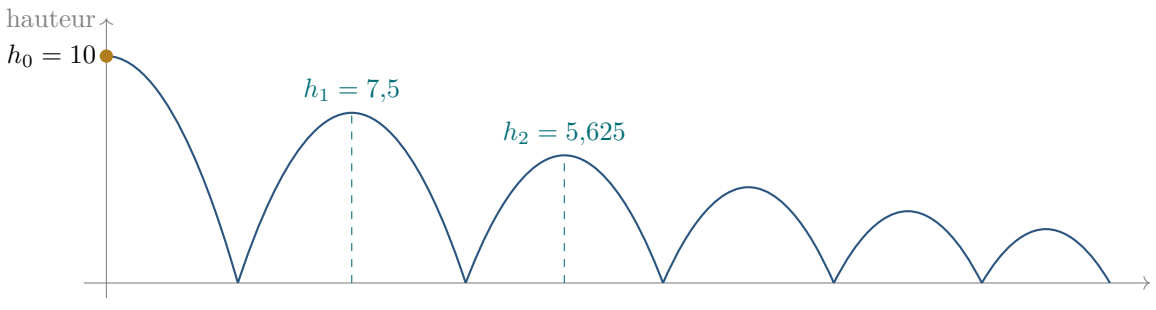
$$\boxed{h_n = 10 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

2. La balle tombe de 10 m, puis remonte et redescend de $h_1 = 7{,}5$ m avant le deuxième contact :

$$10 + 2 \times 7{,}5 = \boxed{25 \text{ m}}$$

   Avant le troisième contact, elle remonte et redescend encore de $h_2 = 5{,}625$ m :

$$25 + 2 \times 5{,}625 = \boxed{36{,}25 \text{ m}}$$



La trajectoire de la balle, en bleu ardoise, est étalée horizontalement pour la lisibilité ; seules les hauteurs comptent. Chaque arc correspond à une montée puis une descente de même hauteur, d'où le facteur 2.

3. La balle tombe d'abord de $h_0 = 10$ m. Puis, pour chacun des n rebonds avant le $(n+1)$-ième contact, elle monte de h_k et redescend de h_k. D'où $D_n = 10 + 2\,(h_1 + h_2 + \cdots + h_n)$. La somme compte n termes, de premier terme $h_1 = 7{,}5$:

$$h_1 + \cdots + h_n = 7{,}5 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{3}{4}} = 30\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$$

$$D_n = 10 + 60\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = \boxed{70 - 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

Contrôle : $D_1 = 70 - 45 = 25$ et $D_2 = 70 - 33{,}75 = 36{,}25$, comme à la question 2.

4. Comme $60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n > 0$, on a toujours $D_n < 70$: **la distance parcourue ne dépasse jamais 70 mètres**, bien que la balle rebondisse indéfiniment dans ce modèle.

$$D_n > 69 \iff 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n < 1 \iff \left(\frac{3}{4}\right)^n < \frac{1}{60}$$

La calculatrice donne $\left(\frac{3}{4}\right)^{14} \approx 0{,}0178$ et $\left(\frac{3}{4}\right)^{15} \approx 0{,}0134$, alors que $\frac{1}{60} \approx 0{,}0167$: $\boxed{n = 15}$.

Une infinité de rebonds pour une distance finie : ce paradoxe apparent est le même que celui de l'exercice 9, où une infinité d'étapes ne colorie qu'un carré d'aire 1.