EXERCICES

SOMMES ET SUITES GÉOMÉTRIQUES

Calculs de sommes

EXERCICE 1 ⋆

Calculer les sommes suivantes.

1. $1+2+2^2+\cdots+2^{10}$
2. $1+3+3^2+\cdots+3^6$
3. $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{10}}$
4. $1-2+4-8+\cdots+256$
5. $1+10+100+\cdots+10^6$

Pour la question 4., on cherchera la raison q et l'exposant de la dernière puissance.

EXERCICE 2 ⋆

Calculer les sommes suivantes, écrites avec le symbole $\sum$.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{7} 2^k$ **2.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} 3\times 2^k$ **3.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} 5^k$ **4.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \left(\frac{1}{3}\right)^k$ **5.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{20} 1^k$

Calculer ensuite $\displaystyle\sum_{k=0}^{9}(-1)^k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{10}(-1)^k$. Formuler une conjecture pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k$ selon la parité de n.

EXERCICE 3 ⋆⋆

Déterminer, dans chaque cas, l'entier n tel que :

1. $1+2+\cdots+2^n=1\,023$
2. $1+2+\cdots+2^n=4\,095$
3. $1+3+\cdots+3^n=1\,093$

Existe-t-il un entier n tel que $1+2+\cdots+2^n=1\,000$? Justifier.

Sommes de termes d'une suite géométrique

EXERCICE 4 ⋆

Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0=5$ et de raison $q=3$.

1. Exprimer v_n en fonction de n, puis calculer v_6.
2. Calculer $S=v_0+v_1+\cdots+v_6$, puis vérifier le résultat en additionnant les sept termes un à un.

EXERCICE 5 ⋆

Calculer la somme des termes de chacune des suites géométriques suivantes.

1. $w_1=64$ et raison $\dfrac{1}{2}$: calculer $w_1+w_2+\cdots+w_7$.
2. $t_0=2$ et raison -3 : calculer $t_0+t_1+\cdots+t_5$.

Pourquoi la seconde somme est-elle négative, alors que son premier terme est positif ?

EXERCICE 6 ⋆⋆

Soit (u_n) une suite géométrique à termes positifs telle que $u_2 = 12$ et $u_5 = 96$.

1. Déterminer la raison q, puis le premier terme u_0.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_9$.
4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le plus petit entier n tel que $u_n > 10\,000$.

Problèmes

EXERCICE 7 ⋆⋆

Selon une légende, l'inventeur du jeu d'échecs demanda pour récompense un grain de blé sur la première case de l'échiquier, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, et ainsi de suite en doublant à chaque case, jusqu'à la 64$^{\text{e}}$.

1. Combien de grains faut-il placer sur la 64$^{\text{e}}$ case ? On donnera le résultat sous forme d'une puissance de 2.
2. Combien de grains faut-il au total ? Comparer ce total au nombre de grains de la dernière case.
3. On admet qu'un grain de blé pèse environ 0,05 g, et que la production mondiale de blé est de l'ordre de 800 millions de tonnes par an. Combien d'années de production faudrait-il pour honorer la demande ?

EXERCICE 8 ⋆⋆

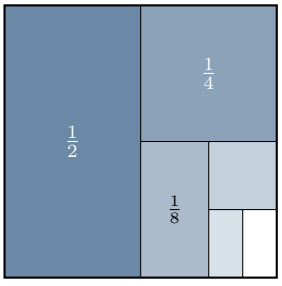
Une entreprise propose à une nouvelle salariée, payée 21 600 euros la première année, deux contrats :

- **contrat A** : son salaire annuel augmente de 2 % chaque année ;
- **contrat B** : son salaire annuel augmente de 500 euros chaque année.

1. On note a_n et b_n les salaires annuels de la n-ième année avec chaque contrat. Quelle est la nature de chacune des suites (a_n) et (b_n) ? Exprimer a_n et b_n en fonction de n.
2. Calculer, pour chaque contrat, le total perçu au bout de 10 ans, puis au bout de 20 ans. Arrondir à l'euro.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de combien d'années le total perçu avec le contrat A dépasse celui perçu avec le contrat B.

EXERCICE 9 ⋆⋆

On part d'un carré d'aire 1. À la première étape, on colorie la moitié du carré. À chaque étape suivante, on colorie la moitié de la partie encore blanche, comme sur la figure ci-contre.



1. Quelle aire colorie-t-on à l'étape n ?
2. Montrer que l'aire coloriée au total après n étapes vaut $A_n = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.
3. Déterminer le plus petit entier n tel que $A_n > 0{,}999$.
4. Que devient l'aire coloriée lorsque n devient très grand ? Était-ce prévisible ?

EXERCICE 10 ⋆⋆⋆

On lâche une balle d'une hauteur de 10 mètres. À chaque rebond, elle remonte aux trois quarts de la hauteur d'où elle est tombée. On note $h_0 = 10$ et, pour $n \geqslant 1$, h_n la hauteur atteinte après le n-ième rebond.

1. Justifier que (h_n) est une suite géométrique, et exprimer h_n en fonction de n.
2. Calculer la distance verticale totale parcourue par la balle au moment où elle touche le sol pour la deuxième fois, puis pour la troisième fois.
3. On note D_n la distance totale parcourue au moment où la balle touche le sol pour la $(n+1)$-ième fois. Justifier que $D_n = 10 + 2\,(h_1 + h_2 + \cdots + h_n)$, puis que
$$D_n = 70 - 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$$
4. La distance parcourue peut-elle dépasser 70 mètres ? Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le plus petit entier n tel que $D_n > 69$.