CORRIGÉ – CHAPITRE 1

NOMBRES ET CALCULS

FRACTIONS

EXERCICE 1 ⋆

On décompose le numérateur et le dénominateur en facteurs, puis on simplifie par les facteurs communs :

a) $\dfrac{12}{18} = \dfrac{6\times 2}{6\times 3} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

b) $\dfrac{45}{60} = \dfrac{15\times 3}{15\times 4} = \boxed{\dfrac{3}{4}}$

c) $\dfrac{84}{126} = \dfrac{42\times 2}{42\times 3} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

d) $\dfrac{-105}{45} = \dfrac{15\times(-7)}{15\times 3} = \boxed{-\dfrac{7}{3}}$

e) $\dfrac{144}{60} = \dfrac{12\times 12}{12\times 5} = \boxed{\dfrac{12}{5}}$

f) $\dfrac{2\times 3^2\times 5}{3\times 5^2} = \dfrac{2\times 3}{5} = \boxed{\dfrac{6}{5}}$

g) $\dfrac{462}{546} = \dfrac{2\times 3\times 7\times 11}{2\times 3\times 7\times 13} = \boxed{\dfrac{11}{13}}$

h) $\dfrac{2^2\times 3^3\times 5}{2^3\times 3\times 5^2} = \dfrac{3^2}{2\times 5} = \boxed{\dfrac{9}{10}}$

Pour **g)**, les deux nombres se décomposent en $462 = 2\times 3\times 7\times 11$ et $546 = 2\times 3\times 7\times 13$: le facteur commun $2\times 3\times 7 = 42$ ne saute pas aux yeux, d'où l'intérêt de la décomposition systématique.

EXERCICE 2 ⋆

On réduit d'abord au même dénominateur, en cherchant le plus petit dénominateur commun :

a) $\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{6} = \dfrac{3\times 3}{4\times 3}+\dfrac{5\times 2}{6\times 2} = \dfrac{9}{12}+\dfrac{10}{12} = \boxed{\dfrac{19}{12}}$

b) $\dfrac{7}{10}-\dfrac{2}{15} = \dfrac{21}{30}-\dfrac{4}{30} = \boxed{\dfrac{17}{30}}$

c) $5-\dfrac{3}{7} = \dfrac{35}{7}-\dfrac{3}{7} = \boxed{\dfrac{32}{7}}$

d) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{12}-\dfrac{1}{4} = \dfrac{8}{12}+\dfrac{5}{12}-\dfrac{3}{12} = \dfrac{10}{12} = \boxed{\dfrac{5}{6}}$

e) $\dfrac{3}{8}-\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{24}-\dfrac{20}{24}+\dfrac{12}{24} = \boxed{\dfrac{1}{24}}$

f) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{6}+\dfrac{2}{6}+\dfrac{1}{6} = \dfrac{6}{6} = \boxed{1}$

g) Le plus petit dénominateur commun de 12, 18 et 8 est 72, car $12 = 2^2\times 3$, $18 = 2\times 3^2$ et $8 = 2^3$, d'où $72 = 2^3\times 3^2$:

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{18}-\frac{3}{8} = \frac{30}{72}+\frac{28}{72}-\frac{27}{72} = \boxed{\frac{31}{72}}$$

h) Le dénominateur commun est 12 :

$$\frac{3}{4}-\frac{5}{6}+\frac{7}{12}-\frac{1}{3} = \frac{9}{12}-\frac{10}{12}+\frac{7}{12}-\frac{4}{12} = \frac{2}{12} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

EXERCICE 3 ⋆

On repère les facteurs communs *avant* d'effectuer les produits, ce qui évite de manipuler de grands nombres :

a) $\dfrac{14}{15}\times\dfrac{25}{21}=\dfrac{2\times7}{3\times5}\times\dfrac{5\times5}{3\times7}=\dfrac{2\times5}{3\times3}=\boxed{\dfrac{10}{9}}$

b) $\dfrac{3}{8}\div\dfrac{9}{4}=\dfrac{3}{8}\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{3\times4}{8\times9}=\boxed{\dfrac{1}{6}}$

c) $-\dfrac{4}{9}\times\dfrac{27}{16}=-\dfrac{4\times27}{9\times16}=-\dfrac{27}{9\times4}=\boxed{-\dfrac{3}{4}}$

d) $\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{10}{3}}=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{5\times3}{6\times10}=\boxed{\dfrac{1}{4}}$

e) $\dfrac{2}{7}\times\dfrac{21}{4}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2\times21\times2}{7\times4\times3}=\dfrac{84}{84}=\boxed{1}$

f) $\dfrac{7}{12}\div\dfrac{14}{9}=\dfrac{7}{12}\times\dfrac{9}{14}=\dfrac{7\times9}{12\times14}=\boxed{\dfrac{3}{8}}$

g) On écrit tout en un seul quotient, puis on simplifie :

$$\frac{5}{6}\times\frac{9}{10}\times\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{5\times9\times4}{6\times10\times3\times2}=\frac{180}{360}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

h) La division se transforme en multiplication par l'inverse, et l'on simplifie ensuite :

$$\frac{8}{15}\div\frac{4}{5}\times\frac{9}{4}=\frac{8}{15}\times\frac{5}{4}\times\frac{9}{4}=\frac{8\times5\times9}{15\times4\times4}=\frac{360}{240}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

EXERCICE 4 ⋆

On effectue d'abord les calculs entre parenthèses, puis les multiplications et divisions, et enfin les additions et soustractions :

$A=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{8}{5}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{8}{20}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{5}=\dfrac{10}{15}+\dfrac{6}{15}$ d'où $\boxed{A=\dfrac{16}{15}}$

$B=\left(\dfrac{6}{15}+\dfrac{5}{15}\right)\times\dfrac{15}{11}=\dfrac{11}{15}\times\dfrac{15}{11}$ d'où $\boxed{B=1}$

$C=\dfrac{5}{6}-\dfrac{2\times9}{3\times4}=\dfrac{5}{6}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{6}-\dfrac{9}{6}=-\dfrac{4}{6}$ d'où $\boxed{C=-\dfrac{2}{3}}$

$D=\left(\dfrac{5}{5}-\dfrac{3}{5}\right)\div\left(\dfrac{5}{5}+\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{10}{30}$ d'où $\boxed{D=\dfrac{1}{3}}$

$E=\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{9}{8}-\dfrac{6}{8}\right)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{4}$ d'où $\boxed{E=\dfrac{3}{4}}$

$F=\dfrac{\frac{9}{12}+\frac{8}{12}}{\frac{10}{12}-\frac{3}{12}}=\dfrac{\frac{17}{12}}{\frac{7}{12}}=\dfrac{17}{12}\times\dfrac{12}{7}$ d'où $\boxed{F=\dfrac{17}{7}}$

$G=\left(\dfrac{3}{6}-\dfrac{2}{6}\right)\times\left(\dfrac{3}{6}+\dfrac{2}{6}\right)\div\dfrac{5}{36}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}\times\dfrac{36}{5}=\dfrac{5}{36}\times\dfrac{36}{5}$ d'où $\boxed{G=1}$

EXERCICE 5 ⋆⋆

On calcule séparément le numérateur et le dénominateur, puis on divise :

$$E = \frac{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = \frac{5}{6}\times\frac{6}{1} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{E = 5}$$

$$F = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{4}\times\frac{2}{5} = \frac{6}{20} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{F = \frac{3}{10}}$$

$$G = \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{G = \frac{3}{5}}$$

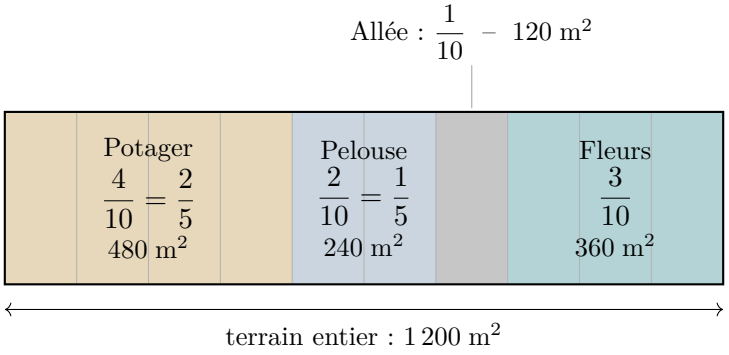
$$H = \frac{\frac{4}{6}-\frac{1}{6}}{\frac{2}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\times\frac{4}{3} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{H = \frac{2}{3}}$$

EXERCICE 6 ⋆⋆

On raisonne sur des fractions du terrain *tout entier*, en prenant garde au fait que l'énoncé parle à chaque fois de ce qu'il *reste*.

1. Le potager occupe $\frac{2}{5}$ du terrain, il reste donc $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$ du terrain. La pelouse en occupe le tiers :
$$\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{15} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\text{la pelouse occupe } \frac{1}{5} \text{ du terrain}}$$
2. Après le potager et la pelouse, il reste $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$ du terrain. L'allée en occupe le quart, et les fleurs les trois quarts :
$$\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10} \quad ; \quad \frac{2}{5}-\frac{1}{10}=\frac{4}{10}-\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$$
$$\boxed{\text{l'allée occupe } \frac{1}{10} \text{ du terrain, et les fleurs } \frac{3}{10}}$$
3. On réduit au même dénominateur 10 :
$$\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{4}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{10}{10}=\boxed{1}$$
Les quatre zones recouvrent bien la totalité du terrain.
4. Il suffit de multiplier chaque fraction par 1 200 :
$$\boxed{\text{potager : } 480 \text{ m}^2 \text{ ; pelouse : } 240 \text{ m}^2 \text{ ; allée : } 120 \text{ m}^2 \text{ ; fleurs : } 360 \text{ m}^2}$$

En ramenant toutes les fractions au dénominateur 10, on peut représenter le terrain par un rectangle partagé en dix parts égales, chacune valant $\frac{1}{10}$ du terrain, soit 120 m^2 :



Nombres premiers et décomposition

EXERCICE 7 ⋆

1. Un entier est premier lorsqu'il n'admet que deux diviseurs positifs. Il suffit donc d'exhiber un diviseur intermédiaire pour conclure qu'il ne l'est pas.

Nombre	Premier ?	Diviseur	Nombre	Premier ?	Diviseur
51	non	$51 = 3 \times 17$	91	non	$91 = 7 \times 13$
57	non	$57 = 3 \times 19$	97	**oui**	
61	**oui**		101	**oui**	
87	non	$87 = 3 \times 29$	111	non	$111 = 3 \times 37$

Les cas 51, 57, 87 et 111 se repèrent par le critère de divisibilité par 3 : la somme des chiffres vaut respectivement 6, 12, 15 et 3. Le cas 91 est le piège classique, car 91 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5 : il faut aller jusqu'à 7.

2. Le nombre 1 n'a qu'un seul diviseur positif, lui-même : il en faut *exactement deux*. Le nombre 2 en a deux, 1 et 2 : il est premier.

3. Un nombre pair autre que 2 est divisible par 1, par 2 et par lui-même : il a donc au moins trois diviseurs.

$$\boxed{\text{2 est le seul nombre premier pair.}}$$

4. Si 101 admettait un diviseur d supérieur ou égal à 11, le quotient $\dfrac{101}{d}$ serait un second diviseur, inférieur ou égal à $\dfrac{101}{11} < 11$. On l'aurait donc déjà rencontré en testant 2, 3, 5 et 7.

$$\boxed{\text{Il suffit de tester les nombres premiers } p \text{ tels que } p \times p \leqslant n.}$$

Comme $11 \times 11 = 121 > 101$, les tests s'arrêtent à 7.

EXERCICE 8 ⋆

On divise successivement par 2, puis 3, puis 5, puis 7, jusqu'à obtenir le quotient 1 :

$$\boxed{84 = 2^2 \times 3 \times 7} \qquad \boxed{126 = 2 \times 3^2 \times 7} \qquad \boxed{225 = 3^2 \times 5^2}$$

$$\boxed{300 = 2^2 \times 3 \times 5^2} \qquad \boxed{504 = 2^3 \times 3^2 \times 7} \qquad \boxed{1\,001 = 7 \times 11 \times 13}$$

Détail pour 504 *:* $504 = 2 \times 252$, $252 = 2 \times 126$, $126 = 2 \times 63$, $63 = 3 \times 21$, $21 = 3 \times 7$, $7 = 7 \times 1$. On a utilisé trois fois 2, deux fois 3 et une fois 7.

Détail pour 1 001 *:* il n'est ni pair, ni de somme des chiffres divisible par 3, ni terminé par 0 ou 5. On teste alors 7 : $1\,001 = 7 \times 143$, puis $143 = 11 \times 13$.

EXERCICE 9 ⋆

On décompose, on barre les facteurs communs, puis on multiplie ce qui reste.

a) $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ et $126 = 2 \times 3^2 \times 7$:

$$\frac{84}{126} = \frac{\cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{7}}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 3 \times \cancel{7}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{84}{126} = \frac{2}{3}}$$

b) $225 = 3^2 \times 5^2$ et $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$:

$$\frac{225}{300} = \frac{\cancel{3} \times 3 \times \cancel{5^2}}{2^2 \times \cancel{3} \times \cancel{5^2}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{225}{300} = \frac{3}{4}}$$

c) $588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$ et $840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$, donc les facteurs communs sont 2^2, 3 et 7 :

$$\frac{588}{840} = \frac{2^2 \times 3 \times 7 \times 7}{2^2 \times 3 \times 7 \times 2 \times 5} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{588}{840} = \frac{7}{10}}$$

d) $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$ et $1\,430 = 2 \times 5 \times 11 \times 13$:

$$\frac{1\,001}{1\,430} = \frac{7 \times \cancel{11} \times \cancel{13}}{2 \times 5 \times \cancel{11} \times \cancel{13}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{1\,001}{1\,430} = \frac{7}{10}}$$

Dans chaque cas, le numérateur et le dénominateur obtenus n'ont plus aucun facteur premier commun : 2 et 3 ; 3 et 2^2 ; 7 et 2×5 ; 7 et 2×5. Les fractions sont donc irréductibles.
On remarquera que **c)** et **d)** donnent la même fraction, alors que les nombres de départ n'ont rien de commun.

EXERCICE 10 ⋆⋆

1. On liste les diviseurs :

$$12 : 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 6\,;\ 12 \qquad \text{soit } \boxed{6 \text{ diviseurs}}$$

$$18 : 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 6\,;\ 9\,;\ 18 \qquad \text{soit } \boxed{6 \text{ diviseurs}}$$

2. Pour $12 = 2^2 \times 3$, un diviseur s'écrit $2^a \times 3^b$ avec $a \in \{0;1;2\}$ et $b \in \{0;1\}$: il y a 3 choix pour a et 2 pour b, soit $3 \times 2 = 6$ diviseurs. On retrouve bien le compte, et de même $18 = 2 \times 3^2$ donne $2 \times 3 = 6$.

$$\boxed{\text{On ajoute 1 à chaque exposant, puis on multiplie.}}$$

3. Avec $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$:

$$\boxed{(3+1) \times (2+1) \times (1+1) = 4 \times 3 \times 2 = 24 \text{ diviseurs}}$$

4. On a $90 = 2 \times 3^2 \times 5$. Un carré parfait est un nombre dont *tous* les exposants de la décomposition sont pairs. Ici 3 a l'exposant 2, qui convient, mais 2 et 5 ont l'exposant 1 : il faut les compléter.

$$\boxed{k = 2 \times 5 = 10 \qquad \text{et} \qquad 90 \times 10 = 900 = 30^2}$$

5. On a $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$. Les exposants impairs sont ceux de 2 et de 7 :

$$\boxed{k = 2 \times 7 = 14 \qquad \text{et} \qquad 504 \times 14 = 7\,056 = 84^2}$$

Vérification : $504 \times 14 = 2^4 \times 3^2 \times 7^2 = (2^2 \times 3 \times 7)^2 = 84^2$.

6. Écrivons la décomposition de n en facteurs premiers. Celle de n^2 s'obtient en doublant tous les exposants. Si 3 divise n^2, alors 3 figure dans la décomposition de n^2, donc son exposant $2e$ y est non nul, donc $e \neq 0$: le facteur 3 figure déjà dans la décomposition de n.

$$\boxed{\text{Si 3 divise } n^2, \text{ alors 3 divise } n.}$$

Ce raisonnement resservira plus loin dans le chapitre, avec 2 à la place de 3.

Puissances

EXERCICE 11 ⋆

On utilise les règles $a^m \times a^n = a^{m+n}$, $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ et $(a^m)^n = a^{m\times n}$:

a) $2^5 \times 2^3 = 2^{5+3} = \boxed{2^8}$

b) $\dfrac{3^7}{3^4} = 3^{7-4} = \boxed{3^3}$

c) $\left(5^2\right)^3 = 5^{2\times 3} = \boxed{5^6}$

d) $7^{-2} \times 7^5 = 7^{-2+5} = \boxed{7^3}$

e) $\dfrac{2^3 \times 2^{-5}}{2^{-4}} = \dfrac{2^{-2}}{2^{-4}} = 2^{-2-(-4)} = \boxed{2^2}$

f) $\dfrac{10^6 \times 10^{-9}}{10^{-2}} = \dfrac{10^{-3}}{10^{-2}} = \boxed{10^{-1}}$

g) $\dfrac{\left(2^3\right)^2 \times 2^{-5}}{\left(2^{-2}\right)^3} = \dfrac{2^6 \times 2^{-5}}{2^{-6}} = \dfrac{2^1}{2^{-6}} = \boxed{2^7}$

h) $\dfrac{\left(3^{-1}\right)^4 \times 3^7}{3^2 \times 3^{-3}} = \dfrac{3^{-4} \times 3^7}{3^{-1}} = \dfrac{3^3}{3^{-1}} = \boxed{3^4}$

Dans **g)** et **h)**, on commence par réduire chaque puissance de puissance, puis on regroupe le numérateur, et l'on termine par la division. Trois règles interviennent donc successivement.

EXERCICE 12 ⋆

On prend garde au fait que, sans parenthèses, la puissance ne porte que sur le nombre qui la précède :

a) $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = \boxed{16}$

b) $-2^4 = -\left(2^4\right) = \boxed{-16}$

c) $(-1)^{2024} = \boxed{1}$
(l'exposant est pair)

d) $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \boxed{\dfrac{1}{9}}$

e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{2^3}{3^3} = \boxed{\dfrac{8}{27}}$

f) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = \dfrac{1}{-\frac{1}{8}} = \boxed{-8}$

g) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \times \left(\dfrac{9}{4}\right)^2 = \dfrac{8}{27} \times \dfrac{81}{16} = \dfrac{8 \times 81}{27 \times 16} = \boxed{\dfrac{3}{2}}$

h) $\dfrac{(-2)^5 \times 3^{-2}}{(-2)^3 \times 3^{-4}} = (-2)^{5-3} \times 3^{-2-(-4)} = (-2)^2 \times 3^2 = \boxed{36}$

Dans **h)**, le signe disparaît car l'exposant obtenu, 2, est pair.

EXERCICE 13 ⋆

1. On déplace la virgule de façon à n'avoir qu'un seul chiffre non nul avant celle-ci :

   a) $\boxed{4{,}3 \times 10^7}$ c) $\boxed{1{,}284 \times 10^2}$ e) $\boxed{6{,}54321 \times 10^3}$

   b) $\boxed{2{,}9 \times 10^{-4}}$ d) $\boxed{7 \times 10^{-8}}$ f) $\boxed{5{,}8 \times 10^{-2}}$

2. On déplace la virgule dans l'autre sens :

   a) $\boxed{320\,000}$ b) $\boxed{0{,}0071}$ c) $\boxed{10\,500\,000}$ d) $\boxed{0{,}000\,009}$

EXERCICE 14 ⋆

On regroupe d'un côté les nombres décimaux, de l'autre les puissances de 10, puis on ajuste l'écriture pour que le premier facteur soit compris entre 1 et 10 :

$A = (4 \times 3) \times 10^{5+(-8)} = 12 \times 10^{-3} = 1{,}2 \times 10^{1} \times 10^{-3}$ d'où $\boxed{A = 1{,}2 \times 10^{-2}}$

$B = \dfrac{6}{1{,}5} \times 10^{7-(-2)}$ d'où $\boxed{B = 4 \times 10^{9}}$

$C = 2^4 \times 10^{3\times 4} = 16 \times 10^{12}$ d'où $\boxed{C = 1{,}6 \times 10^{13}}$

$D = 9 \times 10^{-8} \times 5 \times 10^{9} = 45 \times 10^{1}$ d'où $\boxed{D = 4{,}5 \times 10^{2}}$

EXERCICE 15 ⋆⋆

On applique les règles de calcul sur les puissances, en n'oubliant pas que l'exposant extérieur s'applique à *chaque* facteur :

a) $\dfrac{a^3b^{-2}}{a^{-1}b^3} = a^{3-(-1)} \times b^{-2-3} = a^4b^{-5} = \boxed{\dfrac{a^4}{b^5}}$

b) $(2a^2)^3 \times 3a^{-4} = 2^3a^6 \times 3a^{-4} = 8 \times 3 \times a^{6-4} = \boxed{24a^2}$

c) $\dfrac{(a^2b)^3}{(ab^2)^2} = \dfrac{a^6b^3}{a^2b^4} = a^{6-2}b^{3-4} = \boxed{\dfrac{a^4}{b}}$

d) $(5a^{-1}b^2)^{-2} = 5^{-2} \times a^2 \times b^{-4} = \boxed{\dfrac{a^2}{25b^4}}$

EXERCICE 16 ⋆⋆

1. On calcule le quotient des deux masses :

$$\frac{2 \times 10^{30}}{6 \times 10^{24}} = \frac{2}{6} \times 10^{30-24} = 0{,}333\ldots \times 10^{6} \approx 3{,}33 \times 10^{5}$$

$\boxed{\text{le Soleil est environ } 3 \times 10^5 \text{ fois plus lourd que la Terre}}$

2. On utilise la relation $t = \dfrac{d}{v}$:

$$t = \frac{1{,}5 \times 10^{11}}{3 \times 10^{8}} = 0{,}5 \times 10^{3} = 500 \text{ s}$$

Or $500 = 8 \times 60 + 20$, d'où :

$\boxed{t = 500 \text{ s, soit } 8 \text{ min } 20 \text{ s}}$

3. Une année-lumière est la distance $d = v \times t$ parcourue en une année :

$$d = 3 \times 10^{8} \times 3{,}15 \times 10^{7} = 9{,}45 \times 10^{8+7}$$

$\boxed{1 \text{ année-lumière} \approx 9{,}45 \times 10^{15} \text{ m}}$

4. On divise cette distance par la distance Terre-Soleil :

$$\frac{9{,}45 \times 10^{15}}{1{,}5 \times 10^{11}} = 6{,}3 \times 10^{4}$$

$\boxed{\text{une année-lumière vaut environ 63 000 fois la distance Terre-Soleil}}$

Racines carrées

EXERCICE 17 ⋆

On cherche à chaque fois le plus grand carré parfait contenu dans le nombre sous la racine :

a) $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = \boxed{5\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \boxed{6\sqrt{2}}$

c) $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \boxed{4\sqrt{3}}$

d) $\sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = \boxed{7\sqrt{2}}$

e) $\sqrt{300} = \sqrt{100 \times 3} = \boxed{10\sqrt{3}}$

f) $\sqrt{147} = \sqrt{49 \times 3} = \boxed{7\sqrt{3}}$

g) $\sqrt{288} = \sqrt{144 \times 2} = \boxed{12\sqrt{2}}$

h) $\sqrt{500} = \sqrt{100 \times 5} = \boxed{10\sqrt{5}}$

Pour les deux derniers, le plus grand carré ne se devine pas : on passe par la décomposition en facteurs premiers, en sortant chaque facteur présent en nombre *pair*.

$$1\,008 = 2^4 \times 3^2 \times 7 \qquad \text{donc} \qquad \sqrt{1\,008} = 2^2 \times 3 \times \sqrt{7} = \boxed{12\sqrt{7}}$$

$$2\,352 = 2^4 \times 3 \times 7^2 \qquad \text{donc} \qquad \sqrt{2\,352} = 2^2 \times 7 \times \sqrt{3} = \boxed{28\sqrt{3}}$$

Un facteur d'exposant pair sort entièrement de la racine, en divisant son exposant par 2 ; un facteur d'exposant impair y laisse un exemplaire.

EXERCICE 18 ⋆

On commence par simplifier chaque racine, puis on regroupe les termes semblables :

$$A = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = (5 - 3 + 2)\sqrt{2} \qquad \text{d'où} \quad \boxed{A = 4\sqrt{2}}$$

$$B = 3 \times 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = (6 + 3 - 5)\sqrt{3} \qquad \text{d'où} \quad \boxed{B = 4\sqrt{3}}$$

$$C = 3\sqrt{5} + 2 \times 2\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = (3 + 4 - 4)\sqrt{5} \qquad \text{d'où} \quad \boxed{C = 3\sqrt{5}}$$

$$D = 7\sqrt{2} - 2 \times 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (7 - 10 + 3)\sqrt{2} \qquad \text{d'où} \quad \boxed{D = 0}$$

Pour E et F, on décompose d'abord chaque nombre sous la racine :

$$1\,008 = 2^4 \times 3^2 \times 7 \quad ; \quad 112 = 2^4 \times 7 \quad ; \quad 343 = 7^3$$

$$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \quad ; \quad 245 = 5 \times 7^2 \quad ; \quad 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

$$E = 2 \times 12\sqrt{7} - 3 \times 4\sqrt{7} + 7\sqrt{7} = (24 - 12 + 7)\sqrt{7} \qquad \text{d'où} \quad \boxed{E = 19\sqrt{7}}$$

$$F = 12\sqrt{5} - 7\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = (12 - 7 + 6)\sqrt{5} \qquad \text{d'où} \quad \boxed{F = 11\sqrt{5}}$$

Les trois racines de E se ramènent toutes à $\sqrt{7}$, et celles de F à $\sqrt{5}$: c'est ce qui permet de regrouper les termes.

EXERCICE 19 ⋆

On utilise la propriété $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$:

a) $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{36} = \boxed{6}$: entier.

b) $\sqrt{8} \times \sqrt{18} = \sqrt{144} = \boxed{12}$: entier.

c) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{27}{3}} = \sqrt{9} = \boxed{3}$: entier.

d) $\left(2\sqrt{5}\right)^2 = 2^2 \times \left(\sqrt{5}\right)^2 = 4 \times 5 = \boxed{20}$: entier.

e) $\sqrt{\dfrac{45}{5}} = \sqrt{9} = \boxed{3}$: entier.

f) $\sqrt{6} \times \sqrt{10} = \sqrt{60} = \sqrt{4 \times 15} = \boxed{2\sqrt{15}}$: **pas** un entier.

g) $\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{6} = \sqrt{36} = \boxed{6}$: entier.

h) $\dfrac{\sqrt{50} \times \sqrt{8}}{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{400}}{2} = \dfrac{20}{2} = \boxed{10}$: entier.

i) $\left(3\sqrt{2}\right)^2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = 18 \times \sqrt{\dfrac{2}{8}} = 18 \times \dfrac{1}{2} = \boxed{9}$: entier.

Dans **i)**, les trois racines se regroupent en une seule : $2 \times 3 \times 6 = 36$. Dans **k)**, on traite séparément le carré, qui vaut $3^2 \times 2 = 18$, et le quotient de racines, qui vaut $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 20 ⋆⋆

1. **Fausse** : pour $x = -3$, on a $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$, qui est différent de -3. Une racine carrée est toujours positive : on a en réalité $\sqrt{x^2} = |x|$, donc l'égalité n'est vraie que pour $x \geqslant 0$.

2. **Fausse** : le nombre $-\sqrt{5}$ vérifie aussi $\left(-\sqrt{5}\right)^2 = 5$. L'équation $x^2 = 5$ possède *deux* solutions, $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.

3. **Fausse** : la double distributivité donne $\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)^2 = 3 + 2\sqrt{3} \times \sqrt{5} + 5 = 8 + 2\sqrt{15}$. Comme $\sqrt{15}$ n'est pas un entier — car $3^2 = 9 < 15 < 16 = 4^2$ —, le résultat n'en est pas un.

4. **Vraie** : la racine carrée traverse les produits, donc $\sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$. C'est un entier, bien qu'aucun des deux facteurs n'en soit un.

5. **Vraie** : la double distributivité donne
$$\left(\sqrt{5} - 2\right)\left(\sqrt{5} + 2\right) = 5 + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 4 = 5 - 4 = 1$$
Les deux termes du milieu s'éliminent, et le résultat est bien un entier, alors qu'aucun des deux facteurs n'en est un.

6. **Fausse** : la propriété est vraie pour $a \geqslant 1$, mais fausse pour les nombres compris strictement entre 0 et 1. Avec $a = \dfrac{1}{4}$:
$$\sqrt{a} = \frac{1}{2} \qquad \text{alors que} \qquad a = \frac{1}{4}$$
et $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{4}$. Prendre la racine carrée d'un nombre plus petit que 1 l'*augmente*.

7. **Fausse** : supposons $\sqrt{a} = a$ avec a positif. En élevant au carré, $a = a^2$, donc $a^2 - a = 0$, c'est-à-dire $a \times (a - 1) = 0$. Un produit est nul lorsque l'un de ses facteurs l'est, donc $a = 0$ ou $a = 1$.
$$\boxed{\text{Les seuls nombres positifs vérifiant } \sqrt{a} = a \text{ sont 0 et 1.}}$$

8. **Vraie** : on simplifie chaque racine avant de conclure.
$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2} \qquad \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \qquad \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$\text{donc} \qquad \sqrt{50} - \sqrt{18} - \sqrt{8} = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0$$

9. **Vraie** : les deux membres étant positifs, comparons leurs carrés.
$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b = (a + b) + 2\sqrt{ab}$$
Comme $2\sqrt{ab} \geqslant 0$, ce carré est supérieur ou égal à $a + b = \left(\sqrt{a + b}\right)^2$. Deux nombres positifs étant rangés comme leurs carrés, on conclut.
$$\boxed{\sqrt{a + b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}, \text{ avec égalité si et seulement si } a = 0 \text{ ou } b = 0.}$$

À retenir. Les affirmations 3., 4. et 5. montrent qu'il ne faut jamais conclure sur la nature d'un nombre avant de l'avoir simplifié : $\sqrt{2}\times\sqrt{18}$ a l'air d'un nombre compliqué et vaut 6, tandis que $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2$ a l'air d'un entier et n'en est pas un.

EXERCICE 21 ⋆⋆

On utilise la distributivité, sous ses deux formes, ainsi que la règle $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$:

$$k(a+b)=ka+kb \qquad \text{et} \qquad (a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

$A=\sqrt{3}\times\sqrt{12}+\sqrt{3}\times 5=\sqrt{36}+5\sqrt{3}$ d'où $\boxed{A=6+5\sqrt{3}}$

$B=2\sqrt{5}\times 3\sqrt{5}-2\sqrt{5}\times\sqrt{20}=6\times 5-2\sqrt{100}=30-20$ d'où $\boxed{B=10}$

$C=\sqrt{16}-\sqrt{36}+3\times 2=4-6+6$ d'où $\boxed{C=4}$

$P=\sqrt{18}+\sqrt{12}-\left(\sqrt{24}-\sqrt{6}\right)=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\sqrt{6}+\sqrt{6}$ d'où $\boxed{P=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}}$

$D=\sqrt{2}\times\sqrt{8}-\sqrt{2}+3\sqrt{8}-3=\sqrt{16}-\sqrt{2}+3\times 2\sqrt{2}-3$

$=4-\sqrt{2}+6\sqrt{2}-3$ d'où $\boxed{D=1+5\sqrt{2}}$

$E=2\sqrt{3}\times\sqrt{3}+2\sqrt{3}\times 4-\sqrt{3}-4=2\times 3+8\sqrt{3}-\sqrt{3}-4$

$=6+7\sqrt{3}-4$ d'où $\boxed{E=2+7\sqrt{3}}$

$F=5-3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-6$ d'où $\boxed{F=-1-\sqrt{5}}$

$G=3\times 2+6\sqrt{10}-\sqrt{10}-2\times 5=6+5\sqrt{10}-10$ d'où $\boxed{G=-4+5\sqrt{10}}$

$N=2\times 5+\sqrt{15}-4\sqrt{15}-2\times 3=10-3\sqrt{15}-6$ d'où $\boxed{N=4-3\sqrt{15}}$

$Q=2\times 3-\sqrt{6}+4\sqrt{6}-2\times 2=6+3\sqrt{6}-4$ d'où $\boxed{Q=2+3\sqrt{6}}$

Pour B, on prendra garde au signe : le facteur $2\sqrt{5}$ multiplie *les deux* termes de la parenthèse, y compris celui qui est précédé du signe moins. Pour P, le signe moins devant la seconde parenthèse change les deux signes qu'elle contient.
Dans G, N et Q, les quatre produits font intervenir des coefficients *devant* les racines : on multiplie séparément les nombres et les racines, par exemple $3\sqrt{2}\times 2\sqrt{5}=6\sqrt{10}$.

EXERCICE 22 ⋆⋆

Un carré est un produit : $(a+b)^2=(a+b)(a+b)$, et l'on développe donc encore par double distributivité.

$H=1\times 1+1\times\sqrt{2}+\sqrt{2}\times 1+\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1+\sqrt{2}+\sqrt{2}+2$ d'où $\boxed{H=3+2\sqrt{2}}$

$I=9+3\sqrt{5}-3\sqrt{5}-5$ d'où $\boxed{I=4}$

$J=7-\sqrt{14}+\sqrt{14}-2$ d'où $\boxed{J=5}$

Dans I et J, les deux termes du milieu s'éliminent : le résultat est un entier, alors que les deux facteurs contenaient des racines.

Pour les trois dernières expressions, on développe chaque morceau séparément *avant* de réduire.

$$K = \left(4+2\sqrt{3}\right) - \left(4-2\sqrt{3}\right) = 4+2\sqrt{3}-4+2\sqrt{3} \qquad \text{d'où} \quad \boxed{K = 4\sqrt{3}}$$

$$L = \underbrace{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}_{=2-1=1} \times \left(\sqrt{5}+2\right) \qquad \text{d'où} \quad \boxed{L = \sqrt{5}+2}$$

$$M = \left(12-4\sqrt{6}+2\right) + \left(12+4\sqrt{6}+2\right) = 14-4\sqrt{6}+14+4\sqrt{6} \qquad \text{d'où} \quad \boxed{M = 28}$$

Dans K et M, les termes en $\sqrt{3}$ et en $\sqrt{6}$ se simplifient entre eux à la fin. Dans L, le produit des deux premiers facteurs vaut 1 : il ne reste plus rien à développer.

EXERCICE 23 ⋆⋆

1. On multiplie le numérateur et le dénominateur par la racine présente au dénominateur :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad ; \qquad \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{2\times 5} = \frac{5\sqrt{5}}{10}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

2. On développe le produit par double distributivité :

$$\begin{aligned}\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right) &= 1\times\sqrt{2} - 1\times 1 + \sqrt{2}\times\sqrt{2} - \sqrt{2}\times 1\\ &= \sqrt{2}-1+2-\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right) = 1}$$

3. D'après la question précédente, multiplier par $\left(\sqrt{2}-1\right)$ fait disparaître la racine du dénominateur :

$$\frac{2}{1+\sqrt{2}} = \frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} = \frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{1} \qquad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{2}{1+\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}-2}$$

On procède de même en multipliant par $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$: en développant le nouveau dénominateur, les deux termes du milieu s'éliminent.

$$\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right) = 5+\sqrt{10}-\sqrt{10}-2 = 3$$

$$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)} = \frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{3}$$

$$\boxed{\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \sqrt{5}+\sqrt{2}}$$

EXERCICE 24 ⋆⋆

1. On extrait le plus grand carré parfait :

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \boxed{5\sqrt{2}}$$

2. Le périmètre d'un rectangle vaut $2 \times$ (longueur + largeur) :

$$P = 2\left(5\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right) = 2 \times 7\sqrt{2}$$

$$\boxed{P = 14\sqrt{2} \text{ cm} \approx 19{,}8 \text{ cm}}$$

3. L'aire vaut le produit de la longueur par la largeur :

$$\mathcal{A} = 5\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 10 \times \left(\sqrt{2}\right)^2 = 10 \times 2$$

$$\boxed{\mathcal{A} = 20 \text{ cm}^2}$$

On remarque que, bien que les deux côtés s'écrivent à l'aide de racines carrées, l'aire est un nombre entier.

4. Le triangle ABC étant rectangle en B, le théorème de Pythagore donne :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 50 + 8 = 58$$

Or $58 = 2 \times 29$ ne contient aucun carré parfait autre que 1 :

$$\boxed{AC = \sqrt{58} \text{ cm} \approx 7{,}6 \text{ cm}}$$

Ensembles de nombres

EXERCICE 25 ⋆

On simplifie d'abord chaque écriture, puisque c'est la *valeur* du nombre qui décide, et non son apparence : $\dfrac{-12}{3} = -4$, $\sqrt{16} = 4$, $10^{-2} = 0{,}01$ et $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-7		✓	✓	✓	✓
$\dfrac{3}{4} = 0{,}75$			✓	✓	✓
$\dfrac{-12}{3} = -4$		✓	✓	✓	✓
$\sqrt{16} = 4$	✓	✓	✓	✓	✓
$\sqrt{3}$					✓
$\dfrac{7}{3}$				✓	✓
$10^{-2} = 0{,}01$			✓	✓	✓
$-\pi$					✓
$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$	✓	✓	✓	✓	✓

On remarque que les croix se propagent toujours vers la droite, ce qui traduit les inclusions :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

EXERCICE 26 ⋆

1. **Vraie** : un entier naturel n s'écrit $n = \dfrac{n}{10^0}$, son écriture décimale s'arrête donc immédiatement.
2. **Vraie** : un décimal s'écrit $\dfrac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, et 10^n est un entier non nul : c'est donc bien un quotient de deux entiers.
3. **Fausse** : le nombre $\dfrac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ est rationnel, mais son écriture décimale ne s'arrête jamais : il n'est pas décimal.
4. **Fausse** : pour $x = 5 \in \mathbb{Z}$, on a $-x = -5$, qui n'appartient pas à $\mathbb{N}$.
5. **Vraie** : π est repérable sur la droite graduée donc $\pi \in \mathbb{R}$, mais c'est un nombre irrationnel : son écriture décimale est infinie et non périodique.
6. **Fausse** : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont irrationnels, mais $\sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}\right) = 0$, qui est un entier.
7. **Fausse** : 3 et 5 sont des entiers naturels, mais $3 - 5 = -2$ n'appartient pas à $\mathbb{N}$.
8. **Fausse** : 1 et 3 sont des nombres décimaux, mais $\dfrac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ n'est pas décimal.
9. **Fausse** : $\sqrt{2}$ et 1 sont des nombres réels, mais $\dfrac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$ est irrationnel.
10. **Vraie** : soit $\dfrac{a}{b}$ un rationnel (avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$) et $k \in \mathbb{Z}$. Alors $\dfrac{a}{b} \times k = \dfrac{a \times k}{b}$, qui est bien un quotient de deux entiers avec $b \neq 0$.
11. **Fausse** : soient p et q deux nombres premiers distincts. Si $\dfrac{p}{q}$ était un entier k, on aurait $p = k \times q$, donc q serait un diviseur de p. Or les seuls diviseurs positifs de p sont 1 et p : comme q est premier, $q \neq 1$, et comme les deux nombres sont distincts, $q \neq p$. C'est donc impossible.
12. **Vraie** : 2 et 5 sont deux nombres premiers distincts, et $\dfrac{2}{5} = 0{,}4$ est bien un nombre décimal.

a) Les nombres $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ conviennent, car $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$, qui est irrationnel :

$$\boxed{\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}}$$

b) Les nombres $\sqrt{2}$ et $\sqrt{8}$ conviennent, car ils sont bien différents et :

$$\boxed{\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4}$$

Ces deux questions montrent que le produit de deux irrationnels peut être aussi bien irrationnel que rationnel : on ne peut rien affirmer en général.

EXERCICE 27 ⋆⋆

1. Multiplier par 10 décale la virgule d'un rang, sans changer la partie qui se répète :

$$10x = 7{,}777\ldots \qquad \text{donc} \qquad 10x - x = 7{,}777\ldots - 0{,}777\ldots = 7$$

Or $10x - x = 9x$, d'où $9x = 7$:

$$\boxed{x = \frac{7}{9}}$$

2. Ici c'est un bloc de deux chiffres qui se répète, on multiplie donc par 100 :

$$100y = 27{,}2727\ldots \qquad \text{donc} \qquad 100y - y = 27 \qquad \text{soit} \qquad 99y = 27$$

$$\boxed{y = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}}$$

3. Le chiffre 2 ne fait pas partie de la période : on décale d'abord d'un rang, puis de deux.

$$10z = 12{,}333\ldots \quad ; \quad 100z = 123{,}333\ldots$$

En soustrayant, les parties décimales disparaissent :

$$100z - 10z = 123 - 12 = 111 \qquad \text{soit} \qquad 90z = 111$$

$$\boxed{z = \frac{111}{90} = \frac{37}{30}}$$

4. Chacun de ces trois nombres s'écrit comme un quotient de deux entiers, ce sont donc des nombres rationnels. En revanche leur écriture décimale ne s'arrête pas : ils ne sont pas décimaux.

$$\boxed{x,\ y \text{ et } z \text{ appartiennent à } \mathbb{Q} \text{ mais pas à } \mathbb{D}}$$

EXERCICE 28 ⋆⋆

On simplifie d'abord chaque écriture :

a) $\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$, donc ce nombre appartient à $\boxed{\mathbb{N}}$.

b) $\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right) = 1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 3 = -2$, donc ce nombre appartient à $\boxed{\mathbb{Z}}$.

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\dfrac{2}{8}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$, donc ce nombre appartient à $\boxed{\mathbb{D}}$.

d) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$. Le dénominateur de cette fraction irréductible n'est pas une puissance de 10 simplifiable ($\frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots$), donc ce nombre appartient à $\boxed{\mathbb{Q}}$.

e) $\left(2+\sqrt{2}\right) + \left(2-\sqrt{2}\right) = 4$, donc ce nombre appartient à $\boxed{\mathbb{N}}$.

f) $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$, qui est irrationnel, donc ce nombre appartient à $\boxed{\mathbb{R}}$ seulement.

EXERCICE 29 ⋆⋆⋆

1. (a) Si $3 + \sqrt{2}$ est rationnel, alors par définition d'un nombre rationnel, il s'écrit comme un quotient de deux entiers : il existe donc $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ tels que $3 + \sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$.

   (b) On isole alors $\sqrt{2}$ en réduisant au même dénominateur :

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} - 3 = \frac{a}{b} - \frac{3b}{b} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\sqrt{2} = \frac{a-3b}{b}}$$

   (c) Or $a - 3b$ est un entier relatif et b est un entier non nul : l'égalité précédente signifie que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. L'hypothèse de départ est donc fausse :

$$\boxed{3 + \sqrt{2} \text{ est irrationnel}}$$

2. On raisonne de la même façon par l'absurde : supposons que $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ soit rationnel. Il existe alors $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ tels que $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a}{b}$, et en multipliant par 2 :

$$\sqrt{2} = \frac{2a}{b}$$

Or $2a$ est un entier relatif et b un entier non nul, donc $\sqrt{2}$ serait rationnel, ce qui est absurde :

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ est irrationnel}}$$

3. Les nombres $\sqrt{2}$ et $2-\sqrt{2}$ sont tous deux irrationnels (le second d'après un raisonnement identique à celui de la question 1.), et pourtant :

$$\boxed{\sqrt{2} + \left(2 - \sqrt{2}\right) = 2}$$

La somme de deux irrationnels peut donc être un entier : cela confirme que l'affirmation 6. de l'exercice 26 est bien fausse.

Intervalles

EXERCICE 30 ⋆

On lit les bornes, puis l'orientation des crochets : un crochet tourné vers l'intérieur signifie que la borne appartient à l'intervalle.

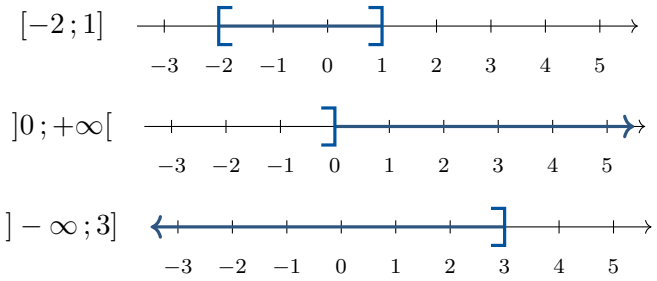
a) $\boxed{[-1\,;3] \quad \text{c'est-à-dire} \quad -1 \leqslant x \leqslant 3}$

b) $\boxed{]0\,;4[\quad \text{c'est-à-dire} \quad 0 < x < 4}$

c) $\boxed{[2\,;+\infty[\quad \text{c'est-à-dire} \quad x \geqslant 2}$

d) $\boxed{]-\infty\,;-1[\quad \text{c'est-à-dire} \quad x < -1}$

Les trois intervalles demandés se représentent enfin ainsi :



EXERCICE 31 ⋆

On procède exactement de la même manière :

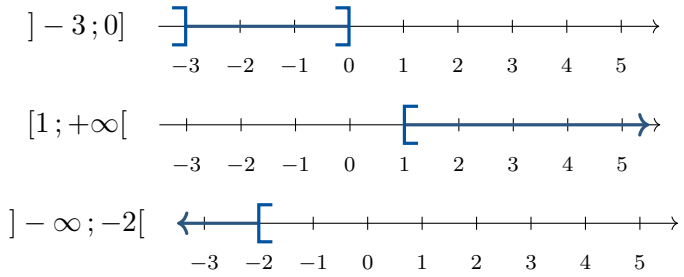
a) $\boxed{]-2\,;4] \quad \text{c'est-à-dire} \quad -2 < x \leqslant 4}$

b) $\boxed{[1\,;3[\quad \text{c'est-à-dire} \quad 1 \leqslant x < 3}$

c) $\boxed{]-\infty\,;2[\quad \text{c'est-à-dire} \quad x < 2}$

d) $\boxed{[-1\,;+\infty[\qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x \geqslant -1}$

Les trois intervalles demandés se représentent enfin ainsi :



EXERCICE 32 ⋆

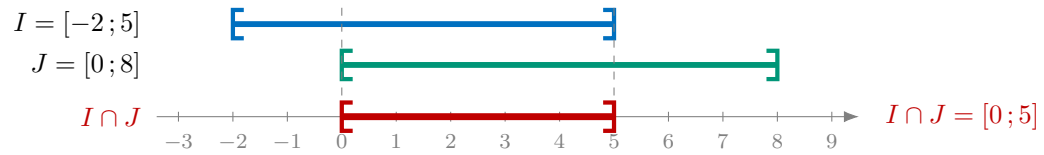
On traduit chaque phrase en faisant attention aux mots « strictement » (crochet vers l'extérieur) et « ou nul » (crochet vers l'intérieur) :

1. $\boxed{x \in [0\,;+\infty[}$
2. $\boxed{x \in]-\infty\,;0[}$
3. $\boxed{x \in [-3\,;8]}$
4. $\boxed{x \in [2\,;9[}$
5. $\boxed{x \in]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[}$ (ensemble également noté $\mathbb{R}^*$)
6. $\boxed{x \in]-\infty\,;3[\cup]3\,;+\infty[}$

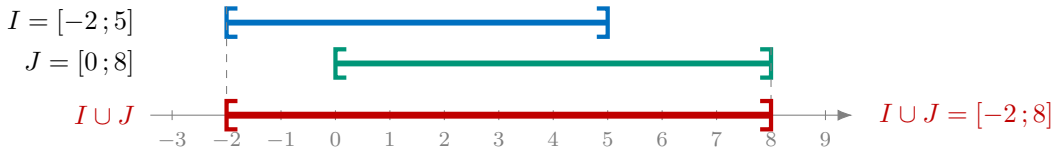
EXERCICE 33 ⋆

On s'aide d'une droite graduée : l'intersection correspond à la partie commune aux deux intervalles, la réunion à la partie totale recouverte. Sur chaque figure, les deux intervalles de départ sont tracés au-dessus de l'axe, et le résultat sur l'axe lui-même.

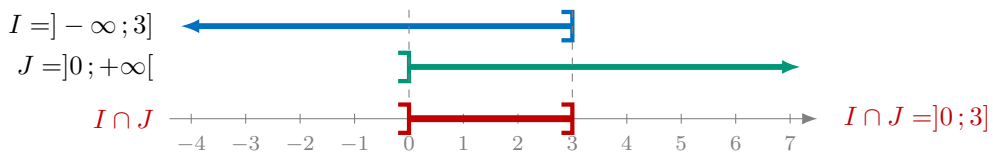
a) $\boxed{[-2\,;5] \cap [0\,;8] = [0\,;5]}$



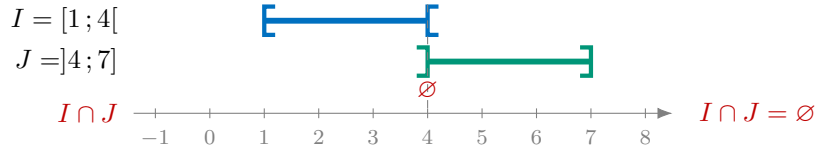
b) $\boxed{[-2\,;5] \cup [0\,;8] = [-2\,;8]}$



c) $\boxed{]-\infty\,;3] \cap]0\,;+\infty[=]0\,;3]}$

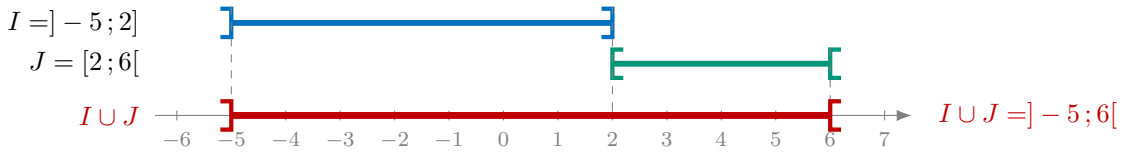


d) $\boxed{[1\,;4[\,\cap\,]4\,;7] = \emptyset}$



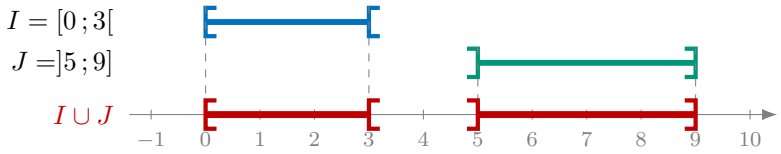
Aucun réel ne peut être à la fois strictement inférieur à 4 et strictement supérieur à 4 : les deux intervalles sont disjoints, la valeur 4 étant exclue de l'un comme de l'autre.

e) $\boxed{]-5\,;2] \cup [2\,;6[=]-5\,;6[}$



La valeur 2 appartient au second intervalle : les deux morceaux se recollent, et la réunion est bien un seul intervalle.

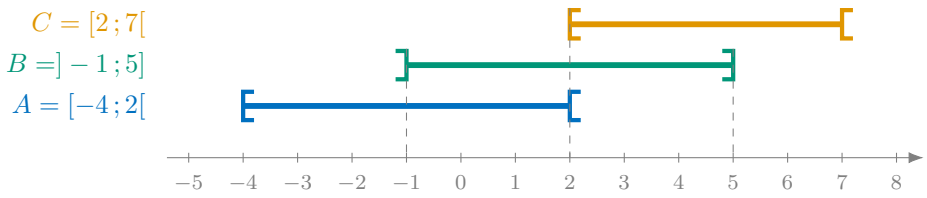
f) $\boxed{[0\,;3[\,\cup\,]5\,;9]}$



L'ensemble obtenu est « en deux morceaux » : il ne peut pas s'écrire comme un seul intervalle, et on conserve donc l'écriture avec le symbole $\cup$.

EXERCICE 34 ⋆⋆

1. On représente les trois intervalles sur une même droite graduée :



2. On lit alors directement les résultats sur la figure :

$$\boxed{A \cap B =]-1\,;2[} \quad ; \quad \boxed{A \cup B = [-4\,;5]}$$

$$\boxed{B \cap C = [2\,;5]} \quad ; \quad \boxed{A \cap C = \emptyset}$$

Pour cette dernière intersection, on remarque que 2 n'appartient pas à A (crochet vers l'extérieur) alors qu'il appartient à C : les deux intervalles n'ont donc aucun point commun.

3. On utilise les résultats précédents :

$$(A \cup B) \cap C = [-4\,;5] \cap [2\,;7[= \boxed{[2\,;5]}$$

$$B \cup C =]-1\,;7[\quad \text{donc} \quad A \cap (B \cup C) = [-4\,;2[\,\cap\,]-1\,;7[= \boxed{]-1\,;2[}$$

Ces deux ensembles sont donc **différents** : l'ordre dans lequel on effectue une intersection et une réunion a une réelle importance.

EXERCICE 35 ⋆⋆

On compare les écritures décimales, en poussant le calcul assez loin pour pouvoir conclure :

1. $\dfrac{22}{7} = 3{,}142857\ldots$ Or $3{,}142857 > 3{,}14$, donc $\boxed{\dfrac{22}{7} \notin [3\,;3{,}14]}$
2. $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$ Or $1{,}41421 > 1{,}41$, donc $\boxed{\sqrt{2} \notin \,]1\,;1{,}41]}$
3. $\pi = 3{,}14159\ldots$ Or $3{,}14 \leqslant 3{,}14159 \leqslant 3{,}15$, donc $\boxed{\pi \in [3{,}14\,;3{,}15]}$
4. $\sqrt{5} = 2{,}2360\ldots$ donc $-\sqrt{5} = -2{,}2360\ldots$ Or $-2{,}3 \leqslant -2{,}236 \leqslant -2{,}2$, donc $\boxed{-\sqrt{5} \in [-2{,}3\,;-2{,}2]}$
   (attention : plus un nombre négatif est « grand » en valeur absolue, plus il est petit).
5. $\dfrac{5}{3} = 1{,}6666\ldots$ Or $1{,}66 < 1{,}6666 < 1{,}67$, donc $\boxed{\dfrac{5}{3} \in \,]1{,}66\,;1{,}67[}$

EXERCICE 36 ⋆⋆

1. Les deux bornes appartenant à l'intervalle, les inégalités sont larges :

$$\boxed{x \in [2\,;5] \iff 2 \leqslant x \leqslant 5}$$

2. On multiplie l'encadrement par 3, puis on lui ajoute 4, ce qui ne change pas le sens des inégalités :

$$2 \leqslant x \leqslant 5 \implies \boxed{6 \leqslant 3x \leqslant 15}$$

$$2 \leqslant x \leqslant 5 \implies \boxed{6 \leqslant x+4 \leqslant 9}$$

   En enlevant enfin 1 au premier encadrement :

$$\boxed{5 \leqslant 3x-1 \leqslant 14}$$

3. Multiplier par un nombre négatif *inverse* le sens des inégalités :

$$2 \leqslant x \leqslant 5 \implies -4 \geqslant -2x \geqslant -10 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{-10 \leqslant -2x \leqslant -4}$$

4. Les trois nombres de l'encadrement étant positifs, on peut élever au carré sans changer le sens des inégalités, et passer à l'inverse en le changeant :

$$2 \leqslant x \leqslant 5 \implies \boxed{4 \leqslant x^2 \leqslant 25}$$

$$2 \leqslant x \leqslant 5 \implies \boxed{\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{2}}$$

5. On part de $-1 < y < 4$, on multiplie par -2 (ce qui inverse le sens), puis on ajoute 5 :

$$-1 < y < 4 \implies 2 > -2y > -8 \implies -8 < -2y < 2 \implies -3 < 5-2y < 7$$

$$\boxed{-3 < 5-2y < 7 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad 5-2y \in \,]-3\,;7[}$$

Exercices de synthèse

EXERCICE 37 ⋆⋆

1. On calcule d'abord le carré, puis on regroupe les puissances de 10 :

$$\begin{aligned} N &= \frac{(2\times10^{-3})^2\times15\times10^5}{4\times10^{-1}} \\ &= \frac{4\times10^{-6}\times15\times10^5}{4\times10^{-1}} \\ &= \frac{60\times10^{-1}}{4\times10^{-1}} = \frac{60}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{N = 15 = 1{,}5\times10^1}$$

2. Le nombre N vaut 15 : c'est un entier naturel, et donc également un nombre décimal (puisque $\mathbb{N}\subset\mathbb{D}$) :

$$\boxed{N\in\mathbb{N} \text{ et } N\in\mathbb{D}}$$

3. On simplifie la fraction :

$$\frac{N}{9} = \frac{15}{9} = \frac{3\times5}{3\times3} = \frac{5}{3} = 1{,}666\ldots$$

Cette écriture décimale ne s'arrête pas :

$$\boxed{\frac{N}{9} \text{ n'est pas un nombre décimal}}$$

4. Comme $14\leqslant15\leqslant16$, le nombre N appartient au premier intervalle. En revanche la borne 15 est exclue du second (crochet vers l'extérieur) :

$$\boxed{N\in[14\,;16] \qquad \text{mais} \qquad N\notin\,]15\,;20]}$$

EXERCICE 38 ⋆⋆

1. La première case porte $1 = 2^0$ grain, la deuxième $2 = 2^1$, la troisième $4 = 2^2$: à chaque fois l'exposant vaut le numéro de la case diminué de 1.

$$\boxed{\text{la } 10^{\text{e}} \text{ case porte } 2^9 = 512 \text{ grains, et la } 64^{\text{e}} \text{ case } 2^{63} \text{ grains}}$$

2. La calculatrice donne $2^{63} = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,808$, soit :

$$\boxed{2^{63}\approx9{,}2\times10^{18} \text{ grains}}$$

3. On convertit d'abord la masse d'un grain en kilogrammes : 25 mg = 0,000 025 kg = $2{,}5\times10^{-5}$ kg. Ainsi :

$$m\approx9{,}2\times10^{18}\times2{,}5\times10^{-5} = 23\times10^{13}$$

$$\boxed{m\approx2{,}3\times10^{14} \text{ kg}}$$

4. On divise cette masse par la production annuelle :

$$\frac{2{,}3\times10^{14}}{8\times10^{11}} = 0{,}2875\times10^3\approx288$$

$$\boxed{\text{il faudrait environ 288 années de production mondiale}}$$

EXERCICE 39 ⋆⋆

1. $\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{8}{12}+\dfrac{9}{12}=\dfrac{17}{12}$: réponse B
2. $(-3)^2\times 3^{-4}=9\times 3^{-4}=3^2\times 3^{-4}=3^{-2}$: réponse A
3. $\sqrt{45}=\sqrt{9\times 5}=3\sqrt{5}$: réponse C
4. $\dfrac{15}{6}=\dfrac{5}{2}=2{,}5$, dont l'écriture décimale s'arrête, mais qui n'est pas un entier : réponse B
5. Aucun réel ne peut être à la fois strictement inférieur à 4 et supérieur ou égal à 4 : réponse B
6. $\left(\sqrt{3}-1\right)^2=\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)=3-\sqrt{3}-\sqrt{3}+1=4-2\sqrt{3}$: réponse A

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆

1. On développe le carré par double distributivité :

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^2=\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)=1+\sqrt{2}+\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}$$

Or $1+\sqrt{2}$ est positif, et la racine carrée d'un nombre est l'unique nombre *positif* dont le carré vaut ce nombre :

$$\boxed{\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}}$$

2. On cherche de même un carré donnant $6+2\sqrt{5}$:

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^2=\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)=1+\sqrt{5}+\sqrt{5}+5=6+2\sqrt{5}$$

Comme $1+\sqrt{5}$ est positif :

$$\boxed{\sqrt{6+2\sqrt{5}}=1+\sqrt{5}}$$

3. On remplace les deux racines par les expressions obtenues :

$$\begin{aligned}K&=\left(1+\sqrt{2}\right)-\left(1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{5}-\sqrt{2}\\&=1+\sqrt{2}-1-\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{K=0}$$

Bien que son écriture fasse intervenir plusieurs irrationnels, K est donc un entier naturel.

EXERCICE 41 ⋆⋆⋆

1. On vérifie les deux égalités :

$$\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\qquad;\qquad\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{6}\quad\text{et}\quad\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$$

2. Soit k un entier naturel non nul. On réduit au même dénominateur $k(k+1)$:

$$\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{k+1}{k(k+1)}-\frac{k}{k(k+1)}=\frac{k+1-k}{k(k+1)}$$

$$\boxed{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k\times(k+1)}}$$

3. On remplace chaque terme par une différence : les termes intermédiaires se simplifient deux à deux.

$$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}} \qquad \text{pour } n = 3$$

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = 1 - \frac{1}{5} = \boxed{\frac{4}{5}} \qquad \text{pour } n = 4$$

4. Dans les deux cas, il ne reste que le premier et le dernier terme, ce qui conduit à conjecturer :

$$\boxed{S = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}}$$

Pour $n = 10$, la formule donne $S = \dfrac{10}{11}$, ce que l'on retrouve bien en calculant $1 - \dfrac{1}{11}$.

5. Le nombre $\dfrac{1}{n+1}$ est strictement positif quel que soit l'entier $n \geqslant 1$, donc $S = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ est toujours strictement inférieur à 1 :

$$\boxed{S \text{ ne peut ni valoir 1, ni le dépasser}}$$

En revanche, en prenant n de plus en plus grand, S s'approche autant que l'on veut de 1.

EXERCICE 42 ⋆⋆

1. On effectue les produits :

$$a = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 8 \times 9 \times 5 \qquad b = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 4 \times 3 \times 25 \times 7$$

$$\boxed{a = 360 \qquad \text{et} \qquad b = 2\,100}$$

2. Les facteurs communs sont 2^2, 3 et 5 :

$$\frac{a}{b} = \frac{\cancel{2^2} \times 2 \times \cancel{3} \times 3 \times \cancel{5}}{\cancel{2^2} \times \cancel{3} \times \cancel{5} \times 5 \times 7} = \frac{2 \times 3}{5 \times 7} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{a}{b} = \frac{6}{35}}$$

On vérifie que $6 = 2 \times 3$ et $35 = 5 \times 7$ n'ont plus de facteur commun.

3. On additionne les exposants de chaque facteur premier :

$$a \times b = 2^{3+2} \times 3^{2+1} \times 5^{1+2} \times 7 = 2^5 \times 3^3 \times 5^3 \times 7$$

Les exposants 5, 3, 3 et 1 sont tous impairs.

$$\boxed{a \times b \text{ n'est pas un carré parfait.}}$$

4. Dans $a = 2^3 \times 3^2 \times 5$, les exposants impairs sont ceux de 2 et de 5 :

$$\boxed{k = 2 \times 5 = 10 \qquad \text{et} \qquad a \times 10 = 3\,600 = 60^2}$$

5. Si $\sqrt{a}$ était rationnel, ce serait un entier n vérifiant $n^2 = a$, et a serait un carré parfait — ce qu'il n'est pas, d'après la question 4. En revanche $a \times 10 = 3\,600 = 60^2$.

$$\boxed{\sqrt{a} \text{ est irrationnel, tandis que } \sqrt{a \times 10} = 60 \text{ est un entier.}}$$

6. On ajoute 1 à chaque exposant de $b = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$, puis on multiplie :

$$\boxed{(2+1) \times (1+1) \times (2+1) \times (1+1) = 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 36 \text{ diviseurs}}$$