EXERCICES – CHAPITRE 1

NOMBRES ET CALCULS

Fractions

EXERCICE 1 ⋆

Simplifier chacune des fractions suivantes afin de la rendre irréductible :

a) $\dfrac{12}{18}$

b) $\dfrac{45}{60}$

c) $\dfrac{84}{126}$

d) $\dfrac{-105}{45}$

e) $\dfrac{144}{60}$

f) $\dfrac{2\times 3^2\times 5}{3\times 5^2}$

g) $\dfrac{462}{546}$

h) $\dfrac{2^2\times 3^3\times 5}{2^3\times 3\times 5^2}$

EXERCICE 2 ⋆

Calculer et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible :

a) $\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{6}$

b) $\dfrac{7}{10}-\dfrac{2}{15}$

c) $5-\dfrac{3}{7}$

d) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{12}-\dfrac{1}{4}$

e) $\dfrac{3}{8}-\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{2}$

f) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}$

g) $\dfrac{5}{12}+\dfrac{7}{18}-\dfrac{3}{8}$

h) $\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{6}+\dfrac{7}{12}-\dfrac{1}{3}$

EXERCICE 3 ⋆

Calculer en simplifiant *avant* d'effectuer les produits :

a) $\dfrac{14}{15}\times\dfrac{25}{21}$

b) $\dfrac{3}{8}\div\dfrac{9}{4}$

c) $-\dfrac{4}{9}\times\dfrac{27}{16}$

d) $\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{10}{3}}$

e) $\dfrac{2}{7}\times\dfrac{21}{4}\times\dfrac{2}{3}$

f) $\dfrac{7}{12}\div\dfrac{14}{9}$

g) $\dfrac{5}{6}\times\dfrac{9}{10}\times\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{2}$

h) $\dfrac{8}{15}\div\dfrac{4}{5}\times\dfrac{9}{4}$

EXERCICE 4 ⋆

En respectant les priorités opératoires, calculer les nombres suivants :

$$A=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{8}{5} \qquad B=\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)\times\frac{15}{11} \qquad C=\frac{5}{6}-\frac{2}{3}\times\frac{9}{4} \qquad D=\left(1-\frac{3}{5}\right)\div\left(1+\frac{1}{5}\right)$$

$$E=\frac{2}{3}\times\left(\frac{9}{8}-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2} \qquad F=\frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}-\frac{1}{4}} \qquad G=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\div\frac{5}{36}$$

EXERCICE 5 ⋆⋆

Écrire chacun des nombres suivants sous la forme d'une fraction irréductible :

$$E=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} \qquad F=\frac{\frac{3}{4}}{2+\frac{1}{2}} \qquad G=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}} \qquad H=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$$

EXERCICE 6 ⋆⋆

Un terrain rectangulaire de 1 200 m^2 est aménagé de la façon suivante : les $\frac{2}{5}$ de sa surface sont occupés par un potager, puis le tiers de la surface restante est recouvert de pelouse. Enfin, le quart de ce qu'il reste alors sert d'allée, et le reste est planté de fleurs.

1. Quelle fraction du terrain la pelouse occupe-t-elle ?
2. Quelle fraction du terrain l'allée occupe-t-elle ? Et le massif de fleurs ?
3. Vérifier que la somme des quatre fractions obtenues vaut bien 1.
4. En déduire l'aire, en m^2, de chacune des quatre zones.

Nombres premiers et décomposition

EXERCICE 7 ⋆

1. Parmi les entiers suivants, déterminer ceux qui sont premiers. On justifiera chaque réponse négative en donnant un diviseur autre que 1 et le nombre lui-même :

   a) 51 c) 61 e) 91 g) 101

   b) 57 d) 87 f) 97 h) 111

2. Expliquer pourquoi 1 n'est pas un nombre premier, alors que 2 l'est.
3. Un nombre premier autre que 2 peut-il être pair ? Justifier.
4. Pour savoir si 101 est premier, il a suffi de tester les diviseurs 2, 3, 5 et 7. Expliquer pourquoi il était inutile de tester 11 ou davantage. On pourra remarquer que $11 \times 11 = 121$.

EXERCICE 8 ⋆

Décomposer chacun des entiers suivants en produit de facteurs premiers, en présentant les divisions successives dans une potence comme dans le cours :

a) 84 c) 225 e) 504

b) 126 d) 300 f) 1 001

Pour le dernier, on remarquera qu'il n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

EXERCICE 9 ⋆

Rendre chacune des fractions suivantes irréductible, en décomposant le numérateur et le dénominateur en facteurs premiers puis en barrant les facteurs communs :

a) $\frac{84}{126}$ c) $\frac{588}{840}$

b) $\frac{225}{300}$ d) $\frac{1\,001}{1\,430}$

Pour chacune, vérifier sur les décompositions obtenues que la fraction finale ne peut plus être simplifiée.

EXERCICE 10 ⋆⋆

1. Écrire la liste des diviseurs positifs de 12, puis celle des diviseurs positifs de 18. Combien y en a-t-il à chaque fois ?
2. On sait que $12 = 2^2 \times 3$ et que $18 = 2 \times 3^2$. Observer le lien entre les exposants de la décomposition et le nombre de diviseurs trouvé à la question précédente.
3. En déduire, sans les énumérer, le nombre de diviseurs positifs de $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.
4. Décomposer 90 en facteurs premiers. Quel est le plus petit entier k non nul tel que $90 \times k$ soit le carré d'un entier ? On précisera ce carré.
5. Même question avec 504, dont la décomposition a été obtenue à l'exercice 8.
6. Soit n un entier naturel. Démontrer que si n^2 est divisible par 3, alors n l'est aussi. On pourra raisonner sur la décomposition en facteurs premiers de n.

PUISSANCES

EXERCICE 11 ⋆

Écrire chaque expression sous la forme a^n, où n est un entier relatif :

a) $2^5 \times 2^3$

b) $\dfrac{3^7}{3^4}$

c) $\left(5^2\right)^3$

d) $7^{-2} \times 7^5$

e) $\dfrac{2^3 \times 2^{-5}}{2^{-4}}$

f) $\dfrac{10^6 \times 10^{-9}}{10^{-2}}$

g) $\dfrac{\left(2^3\right)^2 \times 2^{-5}}{\left(2^{-2}\right)^3}$

h) $\dfrac{\left(3^{-1}\right)^4 \times 3^7}{3^2 \times 3^{-3}}$

EXERCICE 12 ⋆

Calculer les nombres suivants, en prêtant attention aux parenthèses :

a) $(-2)^4$

b) -2^4

c) $(-1)^{2024}$

d) 3^{-2}

e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$

f) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$

g) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \times \left(\dfrac{9}{4}\right)^2$

h) $\dfrac{(-2)^5 \times 3^{-2}}{(-2)^3 \times 3^{-4}}$

EXERCICE 13 ⋆

1. Écrire les nombres suivants en écriture scientifique :

   a) 43 000 000

   b) 0,000 29

   c) 128,4

   d) 0,000 000 07

   e) 6 543,21

   f) 0,058

2. Écrire les nombres suivants en écriture décimale :

   a) $3{,}2 \times 10^5$

   b) $7{,}1 \times 10^{-3}$

   c) $1{,}05 \times 10^7$

   d) 9×10^{-6}

EXERCICE 14 ⋆

Calculer les nombres suivants et donner le résultat en écriture scientifique :

$$A = \left(4 \times 10^5\right) \times \left(3 \times 10^{-8}\right) \qquad B = \frac{6 \times 10^7}{1{,}5 \times 10^{-2}} \qquad C = \left(2 \times 10^3\right)^4 \qquad D = \left(3 \times 10^{-4}\right)^2 \times 5 \times 10^9$$

EXERCICE 15 ⋆⋆

Soient a et b deux nombres non nuls. Simplifier les expressions suivantes, de manière à n'écrire que des exposants positifs :

a) $\dfrac{a^3 b^{-2}}{a^{-1} b^3}$

b) $(2a^2)^3 \times 3a^{-4}$

c) $\dfrac{(a^2 b)^3}{(ab^2)^2}$

d) $(5a^{-1}b^2)^{-2}$

EXERCICE 16 ⋆⋆

On donne les valeurs approchées suivantes :

$$\text{masse du Soleil} \approx 2 \times 10^{30}\ \text{kg} \quad ; \quad \text{masse de la Terre} \approx 6 \times 10^{24}\ \text{kg}$$

$$\text{distance Terre-Soleil} \approx 1{,}5 \times 10^{11}\ \text{m} \quad ; \quad \text{vitesse de la lumière} \approx 3 \times 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

1. Combien de fois la masse du Soleil est-elle plus grande que celle de la Terre ? Donner le résultat en écriture scientifique, arrondi à l'unité près sur le premier facteur.
2. Combien de temps la lumière du Soleil met-elle à nous parvenir ? Convertir le résultat en minutes et secondes.
3. Une année-lumière est la distance parcourue par la lumière en une année. Sachant qu'une année compte environ $3{,}15 \times 10^7$ secondes, exprimer une année-lumière en mètres, en écriture scientifique.
4. À combien de distances Terre-Soleil une année-lumière correspond-elle ?

Racines carrées

EXERCICE 17 ⋆

Écrire chacun des nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers, b étant le plus petit possible :

a) $\sqrt{50}$
b) $\sqrt{72}$
c) $\sqrt{48}$
d) $\sqrt{98}$
e) $\sqrt{300}$
f) $\sqrt{147}$
g) $\sqrt{288}$
h) $\sqrt{500}$
i) $\sqrt{1\,008}$
j) $\sqrt{2\,352}$

Pour les deux derniers, on pourra s'appuyer sur la décomposition en facteurs premiers.

EXERCICE 18 ⋆

Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ la plus simple possible :

$$A = \sqrt{50} - \sqrt{18} + \sqrt{8} \qquad B = 3\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75} \qquad C = \sqrt{45} + 2\sqrt{20} - \sqrt{80} \qquad D = \sqrt{98} - 2\sqrt{50} + 3\sqrt{2}$$

$$E = 2\sqrt{1\,008} - 3\sqrt{112} + \sqrt{343} \qquad F = \sqrt{720} - \sqrt{245} + \sqrt{180}$$

EXERCICE 19 ⋆

Calculer les nombres suivants, et préciser à chaque fois s'il s'agit d'un entier :

a) $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$

b) $\sqrt{8} \times \sqrt{18}$

c) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$

d) $\left(2\sqrt{5}\right)^2$

e) $\sqrt{\dfrac{45}{5}}$

f) $\sqrt{6} \times \sqrt{10}$

g) $\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{6}$

h) $\dfrac{\sqrt{50} \times \sqrt{8}}{\sqrt{4}}$

i) $\left(3\sqrt{2}\right)^2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$

EXERCICE 20 ⋆⋆

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant par une démonstration ou par un contre-exemple :

1. Pour tout nombre réel x, $\sqrt{x^2} = x$.
2. Si $x^2 = 5$, alors $x = \sqrt{5}$.
3. Le nombre $\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)^2$ est un entier.
4. Le nombre $\sqrt{2} \times \sqrt{18}$ est un entier.
5. Le nombre $\left(\sqrt{5} - 2\right)\left(\sqrt{5} + 2\right)$ est un entier.
6. Pour tout nombre positif a, on a $\sqrt{a} \leqslant a$.
7. Il existe un nombre positif a, différent de 0 et de 1, tel que $\sqrt{a} = a$.
8. Le nombre $\sqrt{50} - \sqrt{18} - \sqrt{8}$ est nul.
9. Pour tous nombres réels positifs a et b, $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Pour les affirmations 7. et 9., on pourra élever au carré.

EXERCICE 21 ⋆⋆

Développer et réduire les expressions suivantes :

$$A = \sqrt{3}\left(\sqrt{12} + 5\right) \qquad B = 2\sqrt{5}\left(3\sqrt{5} - \sqrt{20}\right) \qquad C = \sqrt{2}\left(\sqrt{8} - \sqrt{18} + 3\sqrt{2}\right)$$

$$P = \sqrt{6}\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) - \sqrt{2}\left(\sqrt{12} - \sqrt{3}\right) \qquad D = \left(\sqrt{2} + 3\right)\left(\sqrt{8} - 1\right)$$

$$E = \left(2\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{3} + 4\right) \qquad F = \left(\sqrt{5} + 2\right)\left(\sqrt{5} - 3\right) \qquad G = \left(3\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2} + 2\sqrt{5}\right)$$

$$N = \left(\sqrt{5} - 2\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{5} + \sqrt{3}\right) \qquad Q = \left(\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$$

EXERCICE 22 ⋆⋆

Développer et réduire les expressions suivantes :

$$H = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2 \qquad I = \left(3 - \sqrt{5}\right)\left(3 + \sqrt{5}\right) \qquad J = \left(\sqrt{7} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7} - \sqrt{2}\right)$$

$$K = \left(\sqrt{3} + 1\right)^2 - \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 \qquad L = \left(\sqrt{2} + 1\right)\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{5} + 2\right)$$

$$M = \left(2\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2$$

EXERCICE 23 ⋆⋆

Le but de l'exercice est d'écrire les nombres suivants sans racine carrée au dénominateur.

1. Écrire $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $\dfrac{5}{2\sqrt{5}}$ sans racine carrée au dénominateur, en multipliant le numérateur et le dénominateur par un même nombre bien choisi.
2. Vérifier que $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)=1$.
3. En s'inspirant de la question précédente, écrire $\dfrac{2}{1+\sqrt{2}}$ puis $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ sans racine carrée au dénominateur.

EXERCICE 24 ⋆⋆

Un rectangle $ABCD$ a pour longueur $\sqrt{50}$ cm et pour largeur $2\sqrt{2}$ cm.

1. Écrire la longueur sous la forme $a\sqrt{2}$.
2. Calculer le périmètre du rectangle sous la forme $a\sqrt{2}$, puis en donner une valeur arrondie au dixième.
3. Calculer l'aire du rectangle. Que remarque-t-on ?
4. Calculer la longueur exacte de la diagonale $[AC]$, puis la simplifier si possible.

Ensembles de nombres

EXERCICE 25 ⋆

Recopier et compléter le tableau suivant en cochant les cases correspondant aux ensembles auxquels chaque nombre appartient :

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-7					
$\dfrac{3}{4}$					
$\dfrac{-12}{3}$					
$\sqrt{16}$					
$\sqrt{3}$					
$\dfrac{7}{3}$					
10^{-2}					
$-\pi$					
$\left(\sqrt{2}\right)^2$					

EXERCICE 26 ⋆

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est toujours vraie. Si elle est fausse, donner un contre-exemple.

1. Tout entier naturel est un nombre décimal.
2. Tout nombre décimal est un nombre rationnel.
3. Tout nombre rationnel est un nombre décimal.
4. Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $-x \in \mathbb{N}$.
5. Le nombre π appartient à $\mathbb{R}$ mais pas à $\mathbb{Q}$.
6. La somme de deux nombres irrationnels est toujours irrationnelle.
7. La différence de deux nombres entiers naturels est un entier naturel.
8. Le quotient de deux nombres décimaux est un nombre décimal.
9. Le quotient de deux nombres réels est un nombre rationnel.
10. Le produit d'un nombre rationnel par un nombre entier relatif est un nombre rationnel.
11. Le quotient de deux nombres premiers distincts peut être un entier relatif.
12. Le quotient de deux nombres premiers distincts peut être un nombre décimal.

Répondre enfin aux deux questions suivantes :

a) Trouver deux nombres irrationnels différents dont le produit est un nombre irrationnel.

b) Trouver deux nombres irrationnels différents dont le produit est un entier naturel.

EXERCICE 27 ⋆⋆

On considère le nombre $x = 0{,}777\ldots$, dont l'écriture décimale est infinie et périodique.

1. Calculer $10x$, puis $10x - x$. En déduire l'écriture de x sous forme de fraction.
2. En procédant de la même manière avec $100y$, écrire $y = 0{,}272727\ldots$ sous forme d'une fraction irréductible.
3. Écrire de même $z = 1{,}2333\ldots$ sous forme d'une fraction irréductible. *(On pourra calculer* $100z - 10z$*.)*
4. À quel ensemble de nombres ces trois nombres appartiennent-ils ?

EXERCICE 28 ⋆⋆

Pour chacun des nombres suivants, déterminer le plus petit ensemble parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ auquel il appartient. On justifiera en calculant d'abord une écriture simplifiée du nombre.

a) $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$

b) $\left(1 + \sqrt{3}\right)\left(1 - \sqrt{3}\right)$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$

d) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{6}$

e) $\left(2 + \sqrt{2}\right) + \left(2 - \sqrt{2}\right)$

f) $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$

EXERCICE 29 ⋆⋆⋆

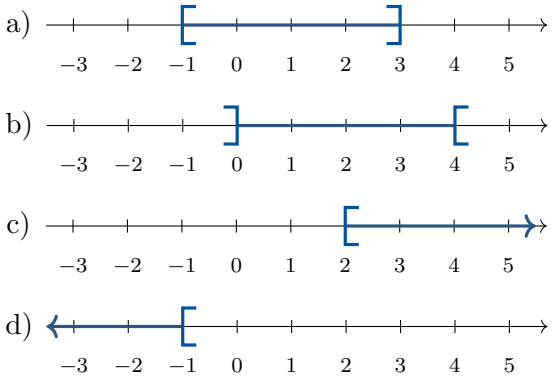
On admet dans cet exercice que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1. On souhaite démontrer que le nombre $3+\sqrt{2}$ est irrationnel. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que $3+\sqrt{2}$ est rationnel.
   (a) Justifier qu'il existe alors deux entiers a et b, avec b non nul, tels que $3+\sqrt{2}=\dfrac{a}{b}$.
   (b) En déduire une écriture de $\sqrt{2}$ sous la forme d'un quotient de deux entiers.
   (c) Conclure.
2. En adaptant ce raisonnement, démontrer que $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ est irrationnel.
3. Donner deux nombres irrationnels dont la somme est un entier. Que peut-on en conclure quant à l'affirmation 6. de l'exercice 26 ?

INTERVALLES

EXERCICE 30 ⋆

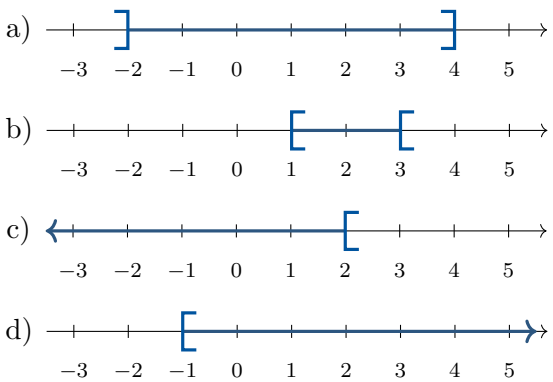
Pour chacune des droites graduées suivantes, donner l'intervalle représenté, ainsi que l'inégalité vérifiée par les réels x de cet intervalle :



Représenter ensuite sur une droite graduée les intervalles $[-2\,;1]$, $]0\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;3]$.

EXERCICE 31 ⋆

Pour chacune des droites graduées suivantes, donner l'intervalle représenté, ainsi que l'inégalité vérifiée par les réels x de cet intervalle :



Représenter ensuite sur une droite graduée les intervalles $]-3\,;0]$, $[1\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;-2[$.

EXERCICE 32 ⋆

Traduire chacune des phrases suivantes par une appartenance à un intervalle (ou à une réunion d'intervalles) :

1. x est un nombre réel positif ou nul.
2. x est un nombre réel strictement négatif.
3. x est compris entre -3 et 8, ces deux valeurs étant comprises.
4. x est supérieur ou égal à 2 et strictement inférieur à 9.
5. x est un nombre réel non nul.
6. x est un nombre réel différent de 3.

EXERCICE 33 ⋆

Déterminer les ensembles suivants, en les écrivant sous la forme d'un intervalle lorsque c'est possible :

a) $[-2\,;5]\cap[0\,;8]$

b) $[-2\,;5]\cup[0\,;8]$

c) $]-\infty\,;3]\cap]0\,;+\infty[$

d) $[1\,;4[\cap]4\,;7]$

e) $]-5\,;2]\cup[2\,;6[$

f) $[0\,;3[\cup]5\,;9]$

EXERCICE 34 ⋆⋆

On considère les trois intervalles :

$$A=[-4\,;2[\qquad B=]-1\,;5]\qquad C=[2\,;7[$$

1. Représenter ces trois intervalles sur une même droite graduée.
2. Déterminer $A\cap B$, $A\cup B$, $B\cap C$ et $A\cap C$.
3. Déterminer $(A\cup B)\cap C$ et $A\cap(B\cup C)$. Ces deux ensembles sont-ils égaux ?

EXERCICE 35 ⋆⋆

Dans chaque cas, dire si le nombre proposé appartient ou non à l'intervalle donné. On justifiera en comparant des écritures décimales.

1. $\dfrac{22}{7}$ et l'intervalle $[3\,;3{,}14]$.
2. $\sqrt{2}$ et l'intervalle $]1\,;1{,}41]$.
3. π et l'intervalle $[3{,}14\,;3{,}15]$.
4. $-\sqrt{5}$ et l'intervalle $[-2{,}3\,;-2{,}2]$.
5. $\dfrac{5}{3}$ et l'intervalle $]1{,}66\,;1{,}67[$.

EXERCICE 36 ⋆⋆

On rappelle que donner un *encadrement* d'un nombre, c'est donner une inégalité de la forme $a\leqslant x\leqslant b$, ou de manière équivalente l'intervalle auquel ce nombre appartient : les deux écritures disent exactement la même chose.

Soit x un nombre réel appartenant à l'intervalle $[2\,;5]$.

1. Traduire l'appartenance de x à cet intervalle par un encadrement de x.
2. Donner un encadrement de $3x$, puis de $x+4$, puis de $3x-1$.
3. Donner un encadrement de $-2x$. *(Attention au sens des inégalités.)*
4. Donner un encadrement de x^2, puis de $\dfrac{1}{x}$.
5. Soit maintenant $y \in]-1\,;4[$. Donner un encadrement de $5-2y$, et préciser l'intervalle auquel appartient $5-2y$.

Exercices de synthèse

EXERCICE 37 ⋆⋆

On considère le nombre :

$$N = \frac{(2\times 10^{-3})^2 \times 15 \times 10^5}{4\times 10^{-1}}$$

1. Calculer N et donner son écriture scientifique.
2. Le nombre N est-il un entier naturel ? Un nombre décimal ? Justifier.
3. Le nombre $\dfrac{N}{9}$ est-il un nombre décimal ? Justifier.
4. Le nombre N appartient-il à l'intervalle $[14\,;16]$? Et à l'intervalle $]15\,;20]$?

EXERCICE 38 ⋆⋆

D'après une légende, l'inventeur du jeu d'échecs demanda pour récompense un grain de riz sur la première case, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, et ainsi de suite en doublant à chaque case jusqu'à la 64$^{\text{e}}$.

1. Combien de grains de riz la 10$^{\text{e}}$ case porte-t-elle ? Et la 64$^{\text{e}}$? Exprimer les réponses sous la forme d'une puissance de 2.
2. À l'aide de la calculatrice, donner l'écriture scientifique du nombre de grains de la dernière case, arrondie au dixième.
3. Un grain de riz pèse environ 25 mg. Quelle masse, en kilogrammes, représente la dernière case ? Donner le résultat en écriture scientifique.
4. La production mondiale annuelle de riz est d'environ 8×10^{11} kg. Pendant combien d'années faudrait-il produire du riz pour honorer cette seule case ?

EXERCICE 39 ⋆⋆

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Déterminer laquelle et justifier.

	Réponse A	**Réponse B**	**Réponse C**
1. $\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}$ vaut	$\dfrac{5}{7}$	$\dfrac{17}{12}$	$\dfrac{6}{12}$
2. $(-3)^2\times 3^{-4}$ vaut	3^{-2}	-3^{-2}	3^6
3. $\sqrt{45}$ vaut	$5\sqrt{3}$	$9\sqrt{5}$	$3\sqrt{5}$
4. $\dfrac{15}{6}$ appartient à	$\mathbb{N}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
5. $[-1\,;4[\cap[4\,;6]$ vaut	$\{4\}$	$\emptyset$	$[-1\,;6]$
6. $\left(\sqrt{3}-1\right)^2$ vaut	$4-2\sqrt{3}$	2	$4+2\sqrt{3}$

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆

1. Développer $\left(1+\sqrt{2}\right)^2$, puis en déduire une écriture simplifiée de $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.
2. En procédant de la même manière, simplifier $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$.
3. En déduire la valeur exacte, puis la nature, du nombre :

$$K = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

EXERCICE 41 ⋆⋆⋆

Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$S = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n\times(n+1)}$$

1. Vérifier que $\dfrac{1}{1\times 2} = 1 - \dfrac{1}{2}$, puis que $\dfrac{1}{2\times 3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$.
2. Soit k un entier naturel non nul. Vérifier que $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k\times(k+1)}$.
3. Calculer S pour $n = 3$, puis pour $n = 4$, en utilisant les simplifications précédentes.
4. Conjecturer une expression de S en fonction de n, puis vérifier la conjecture pour $n = 10$.
5. Le nombre S peut-il être égal à 1 ? Peut-il dépasser 1 ?

EXERCICE 42 ⋆⋆

On pose $a = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $b = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$.

1. Calculer a et b.
2. Sans effectuer la division, écrire la fraction $\dfrac{a}{b}$ sous forme irréductible en barrant les facteurs communs.
3. Le nombre $a \times b$ est-il le carré d'un entier ? Justifier en examinant les exposants de sa décomposition.
4. Déterminer le plus petit entier k non nul tel que $a \times k$ soit le carré d'un entier.
5. Le nombre $\sqrt{a}$ est-il rationnel ? Et $\sqrt{a\times 10}$? Justifier.
6. Combien b possède-t-il de diviseurs positifs ?