CORRIGÉ – CHAPITRE 2

CALCUL LITTÉRAL

Expressions littérales

EXERCICE 1 ⋆

On remplace x par la valeur indiquée, en encadrant systématiquement les nombres négatifs par des parenthèses.

1. Pour $A(x) = 3x^2 - 5x + 2$:

$$A(0) = 3 \times 0^2 - 5 \times 0 + 2 \quad \text{d'où} \quad \boxed{A(0) = 2}$$

$$A(2) = 3 \times 4 - 10 + 2 = 12 - 10 + 2 \quad \text{d'où} \quad \boxed{A(2) = 4}$$

$$A(-1) = 3 \times (-1)^2 - 5 \times (-1) + 2 = 3 + 5 + 2 \quad \text{d'où} \quad \boxed{A(-1) = 10}$$

$$A\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3 \times \frac{1}{4} - \frac{5}{2} + 2 = \frac{3}{4} - \frac{10}{4} + \frac{8}{4} \quad \text{d'où} \quad \boxed{A\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}}$$

2. Pour $B(x) = (2x - 1)(x + 3)$:

$$B(0) = (-1) \times 3 \quad \text{d'où} \quad \boxed{B(0) = -3}$$

$$B(4) = 7 \times 7 \quad \text{d'où} \quad \boxed{B(4) = 49}$$

$$B(-3) = (2 \times (-3) - 1) \times (-3 + 3) = (-7) \times 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{B(-3) = 0}$$

$$B\left(-\tfrac{1}{2}\right) = (-1 - 1) \times \left(-\frac{1}{2} + 3\right) = (-2) \times \frac{5}{2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{B\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -5}$$

3. Pour $C(x) = -x^2 + 4x - 1$:

$$C(1) = -1 + 4 - 1 \quad \text{d'où} \quad \boxed{C(1) = 2}$$

$$C(-2) = -(-2)^2 + 4 \times (-2) - 1 = -4 - 8 - 1 \quad \text{d'où} \quad \boxed{C(-2) = -13}$$

$$C(0{,}5) = -0{,}25 + 2 - 1 \quad \text{d'où} \quad \boxed{C(0{,}5) = 0{,}75}$$

EXERCICE 2 ⋆

On repère la *dernière* opération que l'on effectuerait pour calculer l'expression : si c'est une addition ou une soustraction, il s'agit d'une somme ; si c'est une multiplication, d'un produit.

a) $\boxed{\text{somme}}$: le $+5$ vient en dernier.

b) $\boxed{\text{produit}}$: 3 multiplie la parenthèse.

c) $\boxed{\text{produit}}$: deux facteurs.

d) $\boxed{\text{somme}}$: trois termes.

e) $\boxed{\text{produit}}$: $5 \times x \times x$.

f) $\boxed{\text{somme}}$: le -3 vient en dernier.

g) $\boxed{\text{produit}}$: trois facteurs.

h) $\boxed{\text{produit}}$: c'est $-1 \times (x - 7)$.

EXERCICE 3 ⋆

On traduit chaque phrase en respectant l'ordre des opérations, puis on remplace x par 3 :

1. $\boxed{2(x+5)}$ et pour $x=3$: $2\times 8=\boxed{16}$
2. $\boxed{2x+5}$ et pour $x=3$: $6+5=\boxed{11}$
3. $\boxed{(x-3)^2}$ et pour $x=3$: $0^2=\boxed{0}$
4. $\boxed{x^2-3}$ et pour $x=3$: $9-3=\boxed{6}$
5. $\boxed{x(x+4)}$ et pour $x=3$: $3\times 7=\boxed{21}$
6. $\boxed{\dfrac{1}{x+1}}$ et pour $x=3$: $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

Les deux premières expressions, comme les deux suivantes, montrent l'importance des parenthèses : $2(x+5)$ et $2x+5$ ne désignent pas le même nombre.

EXERCICE 4 ⋆⋆

1. On applique les quatre étapes :

$$5 \longmapsto 8 \longmapsto 16 \longmapsto 16-10=6$$
$$0 \longmapsto 3 \longmapsto 6 \longmapsto 6-0=6$$
$$-4 \longmapsto -1 \longmapsto -2 \longmapsto -2-(-8)=6$$

$\boxed{\text{On obtient toujours 6}}$

2. En notant x le nombre choisi, le programme calcule successivement $x+3$, puis $2(x+3)$, et enfin :

$$\boxed{2(x+3)-2x}$$

3. On développe puis on réduit :

$$2(x+3)-2x=2x+6-2x=6$$

$\boxed{\text{le résultat vaut 6 quel que soit le nombre choisi}}$

Développement et réduction

EXERCICE 5 ⋆

On applique la simple distributivité $k(a+b)=ka+kb$, en distribuant le facteur à *chaque* terme de la parenthèse :

a) $5(2x-3)=5\times 2x-5\times 3=\boxed{10x-15}$

b) $-3(x+4)=-3\times x-3\times 4=\boxed{-3x-12}$

c) $2x(x-1)=2x\times x-2x\times 1=\boxed{2x^2-2x}$

d) $-(x-3)=-1\times x-1\times(-3)=\boxed{-x+3}$

e) $x(3-2x)=x\times 3-x\times 2x=\boxed{3x-2x^2}$

f) $-4(2-3x)=-4\times 2-4\times(-3x)=\boxed{-8+12x}$

g) $\frac{1}{2}(4x+6) = \frac{1}{2} \times 4x + \frac{1}{2} \times 6 = \boxed{2x+3}$

h) $-2x(5-x) = -2x \times 5 - 2x \times (-x) = \boxed{-10x + 2x^2}$

EXERCICE 6 ⋆

On regroupe les termes semblables, c'est-à-dire ceux qui contiennent la même puissance de x :

a) $3x^2 + 5x - 2x^2 + 7x - 1 = (3-2)x^2 + (5+7)x - 1 = \boxed{x^2 + 12x - 1}$

b) $4x - 7 + 2x^2 - 3x + 9 = 2x^2 + (4-3)x + (-7+9) = \boxed{2x^2 + x + 2}$

c) $-x^2 + 6x - 4x^2 - x = (-1-4)x^2 + (6-1)x = \boxed{-5x^2 + 5x}$

d) $2x^2 - 3x + 5 - x^2 + 3x - 5 = (2-1)x^2 + (-3+3)x + (5-5) = \boxed{x^2}$

e) $7x^2 - 2x + 1 - 7x^2 + 2x = (7-7)x^2 + (-2+2)x + 1 = \boxed{1}$

f) $x^2 + x + x^2 + x = (1+1)x^2 + (1+1)x = \boxed{2x^2 + 2x}$

g) $-3x + 4x^2 - 2 + x - 4x^2 = (4-4)x^2 + (-3+1)x - 2 = \boxed{-2x - 2}$

h) $5x^3 - 2x^2 + x^3 + 3x^2 = (5+1)x^3 + (-2+3)x^2 = \boxed{6x^3 + x^2}$

EXERCICE 7 ⋆

On développe chaque parenthèse, puis on réduit :

a) $3(x+2) + 4(x-1) = 3x + 6 + 4x - 4 = \boxed{7x + 2}$

b) $5(2x-1) - 2(3x+4) = 10x - 5 - 6x - 8 = \boxed{4x - 13}$

c) $-2(x-5) - 3(2x+1) = -2x + 10 - 6x - 3 = \boxed{-8x + 7}$

d) $x(x+3) + 2(x+3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = \boxed{x^2 + 5x + 6}$

e) $4(3-x) + x(x-1) = 12 - 4x + x^2 - x = \boxed{x^2 - 5x + 12}$

f) $2x(x+1) - x(3x-4) = 2x^2 + 2x - 3x^2 + 4x = \boxed{-x^2 + 6x}$

g) $7 - 3(2x-5) = 7 - 6x + 15 = \boxed{-6x + 22}$

h) $-x(2x-3) - 4(x-2) = -2x^2 + 3x - 4x + 8 = \boxed{-2x^2 - x + 8}$

EXERCICE 8 ⋆

On applique la double distributivité $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$, puis on réduit :

a) $(x+4)(3x-2) = 3x^2 - 2x + 12x - 8 = \boxed{3x^2 + 10x - 8}$

b) $(2x-1)(x+5) = 2x^2 + 10x - x - 5 = \boxed{2x^2 + 9x - 5}$

c) $(3-x)(2x+7) = 6x + 21 - 2x^2 - 7x = \boxed{-2x^2 - x + 21}$

d) $(5x+2)(x-3) = 5x^2 - 15x + 2x - 6 = \boxed{5x^2 - 13x - 6}$

e) $(-x+4)(2x-1) = -2x^2 + x + 8x - 4 = \boxed{-2x^2 + 9x - 4}$

f) $(3x-1)(3x+4) = 9x^2 + 12x - 3x - 4 = \boxed{9x^2 + 9x - 4}$

EXERCICE 9 ⋆

On développe, en n'oubliant pas qu'un signe $-$ devant une parenthèse revient à multiplier *tous* ses termes par -1 :

$A = 2x(x-1) - 3(x+5) = 2x^2 - 2x - 3x - 15$ d'où $\boxed{A = 2x^2 - 5x - 15}$

$B = 3(2x+1) - 2(x-4) = 6x + 3 - 2x + 8$ d'où $\boxed{B = 4x + 11}$

$C = 5 - 2(3x-1) + x = 5 - 6x + 2 + x$ d'où $\boxed{C = -5x + 7}$

$D = (x+2)(x+3) - (x+1)(x-4)$

$= \left(x^2 + 5x + 6\right) - \left(x^2 - 3x - 4\right) = x^2 + 5x + 6 - x^2 + 3x + 4$ d'où $\boxed{D = 8x + 10}$

$E = 4x(x-2) - (2x-3)(x+1)$

$= 4x^2 - 8x - \left(2x^2 - x - 3\right) = 4x^2 - 8x - 2x^2 + x + 3$ d'où $\boxed{E = 2x^2 - 7x + 3}$

$F = -(x-1)(x+6) + 2x^2$

$= -\left(x^2 + 5x - 6\right) + 2x^2 = -x^2 - 5x + 6 + 2x^2$ d'où $\boxed{F = x^2 - 5x + 6}$

EXERCICE 10 ⋆⋆

Pour un produit de trois facteurs, on développe les deux premiers, puis on multiplie le résultat par le troisième.

1. Pour $G = (x+1)(x+2)(x+3)$, on développe d'abord $(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$, puis :

   $G = \left(x^2 + 3x + 2\right)(x+3) = x^3 + 3x^2 + 3x^2 + 9x + 2x + 6$ d'où $\boxed{G = x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$

2. Pour $H = (2x-1)(x+3)(x-2)$, on développe d'abord $(2x-1)(x+3) = 2x^2 + 5x - 3$, puis :

   $H = \left(2x^2 + 5x - 3\right)(x-2) = 2x^3 - 4x^2 + 5x^2 - 10x - 3x + 6$ d'où $\boxed{H = 2x^3 + x^2 - 13x + 6}$

3. Pour $I = x\big(3 - 2(x+4)\big)$, on commence par la parenthèse intérieure :

   $I = x(3 - 2x - 8) = x(-2x - 5)$ d'où $\boxed{I = -2x^2 - 5x}$

4. De même pour $J = (x+2)\big(x - (3x-1)\big)$:

   $J = (x+2)(x - 3x + 1) = (x+2)(-2x+1) = -2x^2 + x - 4x + 2$ d'où $\boxed{J = -2x^2 - 3x + 2}$

EXERCICE 11 ⋆⋆

1. On remplace directement x dans l'écriture $K(x) = (2x-3)(x+1) - (x-4)(x+2)$:

   $K(0) = (-3) \times 1 - (-4) \times 2 = -3 + 8$ d'où $\boxed{K(0) = 5}$

   $K(2) = 1 \times 3 - (-2) \times 4 = 3 + 8$ d'où $\boxed{K(2) = 11}$

2. On développe les deux produits, puis on soustrait :

$$\begin{aligned} K(x) &= (2x-3)(x+1) - (x-4)(x+2) \\ &= \left(2x^2 + 2x - 3x - 3\right) - \left(x^2 + 2x - 4x - 8\right) \\ &= \left(2x^2 - x - 3\right) - \left(x^2 - 2x - 8\right) \\ &= 2x^2 - x - 3 - x^2 + 2x + 8 \end{aligned}$$

$$\boxed{K(x) = x^2 + x + 5}$$

3. Avec cette écriture : $K(0) = 5$ et $K(2) = 4 + 2 + 5 = 11$, ce qui confirme les résultats de la question 1.

   Pour $x = 0$, l'écriture développée est la plus rapide (tous les termes en x disparaissent) ; pour $x = 2$, les deux écritures demandent un travail comparable. C'est donc la *valeur choisie* qui rend une écriture plus commode que l'autre, et non l'écriture elle-même.

Identités remarquables

EXERCICE 12 ⋆

On identifie à chaque fois les nombres a et b avant d'appliquer la formule :

a) $(x+5)^2 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = \boxed{x^2 + 10x + 25}$ $\quad (a = x \text{ et } b = 5)$

b) $(3x-2)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = \boxed{9x^2 - 12x + 4}$ $\quad (a = 3x \text{ et } b = 2)$

c) $(x+7)(x-7) = x^2 - 7^2 = \boxed{x^2 - 49}$ $\quad (a = x \text{ et } b = 7)$

d) $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = \boxed{4x^2 + 12x + 9}$ $\quad (a = 2x \text{ et } b = 3)$

e) $(5-x)^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times x + x^2 = \boxed{25 - 10x + x^2}$ $\quad (a = 5 \text{ et } b = x)$

f) $(4x+1)(4x-1) = (4x)^2 - 1^2 = \boxed{16x^2 - 1}$ $\quad (a = 4x \text{ et } b = 1)$

On prendra garde au fait que le carré porte sur le facteur tout entier : $(3x)^2 = 9x^2$ et non $3x^2$.

EXERCICE 13 ⋆

a) $(x+2y)^2 = \boxed{x^2 + 4xy + 4y^2}$

b) $(3a-b)^2 = \boxed{9a^2 - 6ab + b^2}$

c) $(2x+5)(2x-5) = \boxed{4x^2 - 25}$

d) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{x^2 + x + \frac{1}{4}}$

e) $(-x+3)^2 = \boxed{x^2 - 6x + 9}$

f) $(7x-4)(7x+4) = \boxed{49x^2 - 16}$

g) $(5x-3)^2 = \boxed{25x^2 - 30x + 9}$

h) $(a+4b)(a-4b) = \boxed{a^2 - 16b^2}$

i) $(3x+2y)^2 = \boxed{9x^2 + 12xy + 4y^2}$

j) $(2-9x)(2+9x) = \boxed{4 - 81x^2}$

k) $(6x+1)^2 = \boxed{36x^2 + 12x + 1}$

l) $(-2x-5)^2 = \boxed{4x^2 + 20x + 25}$

m) $(4x+7)^2 = \boxed{16x^2 + 56x + 49}$

n) $(x-3y)^2 = \boxed{x^2 - 6xy + 9y^2}$

o) $(8x-1)(8x+1) = \boxed{64x^2 - 1}$

p) $(2a+3b)(2a-3b) = \boxed{4a^2 - 9b^2}$

q) $(9-2x)^2 = \boxed{81 - 36x + 4x^2}$

r) $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{9x^2 - 3x + \frac{1}{4}}$

s) $(-3x+4)^2 = \boxed{9x^2 - 24x + 16}$

t) $(5a-2b)^2 = \boxed{25a^2 - 20ab + 4b^2}$

u) $(x+10)(x-10) = \boxed{x^2 - 100}$

v) $(-x-7)^2 = \boxed{x^2 + 14x + 49}$

w) $(6-y)(6+y) = \boxed{36 - y^2}$

x) $(x^2+1)(x^2-1) = \boxed{x^4 - 1}$

Quelques points de vigilance :

- en e), l), s) et v), les deux termes sont précédés d'un signe $-$ ou commencent par un $-$: $(-x+3)^2 = (3-x)^2$ et $(-2x-5)^2 = (2x+5)^2$, car un carré ne dépend pas du signe global ;

- en x), le rôle de a est tenu par x^2, et $\left(x^2\right)^2 = x^4$.

EXERCICE 14 ⋆

On écrit chaque nombre à l'aide de 100, 50 ou 1 000, de façon à faire apparaître une identité remarquable :

$$101^2 = (100+1)^2 = 10\,000 + 200 + 1 \quad \text{d'où} \quad \boxed{101^2 = 10\,201}$$
$$99^2 = (100-1)^2 = 10\,000 - 200 + 1 \quad \text{d'où} \quad \boxed{99^2 = 9\,801}$$
$$97 \times 103 = (100-3)(100+3) = 10\,000 - 9 \quad \text{d'où} \quad \boxed{97 \times 103 = 9\,991}$$
$$102 \times 98 = (100+2)(100-2) = 10\,000 - 4 \quad \text{d'où} \quad \boxed{102 \times 98 = 9\,996}$$
$$45 \times 55 = (50-5)(50+5) = 2\,500 - 25 \quad \text{d'où} \quad \boxed{45 \times 55 = 2\,475}$$
$$1\,001^2 = (1\,000+1)^2 = 1\,000\,000 + 2\,000 + 1 \quad \text{d'où} \quad \boxed{1\,001^2 = 1\,002\,001}$$

EXERCICE 15 ⋆⋆

On développe chaque morceau séparément, puis on réduit en surveillant les signes :

$$\begin{aligned} L &= (x+3)^2 - (x-2)(x+5) \\ &= \left(x^2+6x+9\right) - \left(x^2+3x-10\right) \\ &= x^2+6x+9-x^2-3x+10 \end{aligned} \quad \text{d'où} \quad \boxed{L = 3x+19}$$

$$\begin{aligned} M &= 2(x-1)^2 - 3(x+2)(x-2) \\ &= 2\left(x^2-2x+1\right) - 3\left(x^2-4\right) \\ &= 2x^2-4x+2-3x^2+12 \end{aligned} \quad \text{d'où} \quad \boxed{M = -x^2-4x+14}$$

$$\begin{aligned} N &= (2x+1)^2 - (x-3)^2 \\ &= \left(4x^2+4x+1\right) - \left(x^2-6x+9\right) \\ &= 4x^2+4x+1-x^2+6x-9 \end{aligned} \quad \text{d'où} \quad \boxed{N = 3x^2+10x-8}$$

$$\begin{aligned} P &= (x+4)^2 + (x-4)^2 \\ &= \left(x^2+8x+16\right) + \left(x^2-8x+16\right) \end{aligned} \quad \text{d'où} \quad \boxed{P = 2x^2+32}$$

Dans le calcul de P, les doubles produits se compensent : le résultat ne contient plus de terme en x.

EXERCICE 16 ⋆

1. **Fausse** : le carré porte sur le facteur tout entier, donc $\boxed{(2x)^2 = 4x^2}$.
2. **Fausse** : c'est l'erreur la plus fréquente ; il manque le double produit : $\boxed{(x+3)^2 = x^2+6x+9}$.
3. **Vraie** : avec $a = x$ et $b = 5$, on a bien $x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$.
4. **Vraie** : le signe $-$ se distribue à tous les termes de la parenthèse.
5. **Vraie** : avec $a = 3x$ et $b = 1$, on obtient $(3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2 = 9x^2 - 6x + 1$.
6. **Fausse** : une *somme* de deux carrés ne se factorise pas.
   Seule la différence se factorise : $\boxed{x^2 - 16 = (x+4)(x-4)}$.

Factorisation

EXERCICE 17 ⋆

On repère le facteur commun à tous les termes, puis on le met en évidence :

a) $6x + 15 = 3 \times 2x + 3 \times 5 = \boxed{3(2x + 5)}$

b) $4x^2 - 7x = x \times 4x - x \times 7 = \boxed{x(4x - 7)}$

c) $12x^2 + 18x = 6x \times 2x + 6x \times 3 = \boxed{6x(2x + 3)}$

d) $-5x + 10 = -5 \times x - 5 \times (-2) = \boxed{-5(x - 2)}$

e) $x^2 + x = x \times x + x \times 1 = \boxed{x(x + 1)}$

f) $14x^3 - 21x^2 = 7x^2 \times 2x - 7x^2 \times 3 = \boxed{7x^2(2x - 3)}$

g) $9x - 3x^2 = 3x \times 3 - 3x \times x = \boxed{3x(3 - x)}$

h) $8x^2 + 4x - 12 = 4 \times 2x^2 + 4 \times x - 4 \times 3 = \boxed{4\left(2x^2 + x - 3\right)}$

EXERCICE 18 ⋆

On procède de la même manière :

a) $10x + 25 = \boxed{5(2x + 5)}$

b) $x^2 - 6x = \boxed{x(x - 6)}$

c) $15x^2 - 10x = \boxed{5x(3x - 2)}$

d) $-4x - 12 = \boxed{-4(x + 3)}$

e) $7x^3 + 7x^2 = \boxed{7x^2(x + 1)}$

f) $3x^2 + 9x - 6 = \boxed{3\left(x^2 + 3x - 2\right)}$

g) $2x - x^2 = \boxed{x(2 - x)}$

h) $6x^4 - 4x^3 + 2x^2 = \boxed{2x^2\left(3x^2 - 2x + 1\right)}$

On cherchera toujours le plus grand facteur commun possible : en h), $2x^2$ convient, alors que x ou $2x$ ne factoriseraient l'expression qu'à moitié.

EXERCICE 19 ⋆

Le facteur commun est ici l'expression entre parenthèses ; on l'extrait, puis on réduit le second facteur.

1. $(x + 2)(3x - 1) + (x + 2)(x + 8) = (x + 2)\big[(3x - 1) + (x + 8)\big] = \boxed{(x + 2)(4x + 7)}$
2. Dans $(2x - 1)(x + 4) + (2x - 1)$, le second terme s'écrit $(2x - 1) \times 1$: il ne faut pas oublier ce facteur 1.

$$(2x - 1)(x + 4) + (2x - 1) = (2x - 1)\big[(x + 4) + 1\big] = \boxed{(2x - 1)(x + 5)}$$

3. $(x - 3)(2x + 1) - (x - 3)(x - 5) = (x - 3)\big[(2x + 1) - (x - 5)\big] = (x - 3)(2x + 1 - x + 5)$, d'où $\boxed{(x - 3)(x + 6)}$
4. Dans $(5x + 2)^2 - (5x + 2)(x - 1)$, on écrit $(5x + 2)^2 = (5x + 2)(5x + 2)$:

$$(5x + 2)\big[(5x + 2) - (x - 1)\big] = (5x + 2)(5x + 2 - x + 1) = \boxed{(5x + 2)(4x + 3)}$$

5. $4(x+1)-x(x+1)=(x+1)\big[4-x\big]=\boxed{(x+1)(4-x)}$

6. $(x+6)(x-2)-(x+6)=(x+6)\big[(x-2)-1\big]=\boxed{(x+6)(x-3)}$

EXERCICE 20 ⋆

On reconnaît la forme développée d'une identité remarquable, puis on la lit de droite à gauche :

a) $x^2-16=x^2-4^2=\boxed{(x+4)(x-4)}$

b) $x^2+6x+9=x^2+2\times x\times 3+3^2=\boxed{(x+3)^2}$

c) $25x^2-20x+4=(5x)^2-2\times 5x\times 2+2^2=\boxed{(5x-2)^2}$

d) $9x^2-49=(3x)^2-7^2=\boxed{(3x+7)(3x-7)}$

e) $x^2-2x+1=x^2-2\times x\times 1+1^2=\boxed{(x-1)^2}$

f) $4x^2+12x+9=(2x)^2+2\times 2x\times 3+3^2=\boxed{(2x+3)^2}$

g) $x^2-\dfrac{1}{4}=x^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\boxed{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}$

h) $16x^2-1=(4x)^2-1^2=\boxed{(4x+1)(4x-1)}$

i) $49-14x+x^2=7^2-2\times 7\times x+x^2=\boxed{(7-x)^2}$

Dans les cas b), c), e), f) et i), c'est le terme central qui permet de confirmer l'identité : il doit être égal au double produit.

EXERCICE 21 ⋆

a) $\boxed{x^2+10x+25=(x+5)^2}$

b) $\boxed{x^2-14x+49=(x-7)^2}$

c) $\boxed{4x^2-81=(2x+9)(2x-9)}$

d) $\boxed{4x^2+12x+9=(2x+3)^2}$

e) $\boxed{x^2-8x+16=(x-4)^2}$

f) $\boxed{9x^2-25=(3x+5)(3x-5)}$

On vérifie à chaque fois en développant le membre de droite.

EXERCICE 22 ⋆⋆

On extrait d'abord le facteur commun, ce qui fait apparaître une identité remarquable :

$2x^2-18=2\left(x^2-9\right)$ d'où $\boxed{2(x+3)(x-3)}$

$3x^2+12x+12=3\left(x^2+4x+4\right)$ d'où $\boxed{3(x+2)^2}$

$5x^2-45=5\left(x^2-9\right)$ d'où $\boxed{5(x+3)(x-3)}$

$x^3-4x=x\left(x^2-4\right)$ d'où $\boxed{x(x+2)(x-2)}$

$-2x^2+8=-2\left(x^2-4\right)$ d'où $\boxed{-2(x+2)(x-2)}$

$4x^3+4x^2+x=x\left(4x^2+4x+1\right)$ d'où $\boxed{x(2x+1)^2}$

EXERCICE 23 ⋆⋆

On reconnaît une différence de deux carrés, dont les rôles de a et b sont tenus par des expressions :

1. Dans $(x-1)^2-9$: $a=x-1$ et $b=3$.

$$(x-1)^2-9=(x-1)^2-3^2=[(x-1)+3][(x-1)-3] \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{(x+2)(x-4)}$$

2. Dans $(2x+1)^2-(x+3)^2$: $a=2x+1$ et $b=x+3$.

$$(2x+1)^2-(x+3)^2=[(2x+1)+(x+3)][(2x+1)-(x+3)] \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{(3x+4)(x-2)}$$

3. Dans $16-(x+2)^2$: $a=4$ et $b=x+2$.

$$16-(x+2)^2=4^2-(x+2)^2=[4+(x+2)][4-(x+2)] \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{(x+6)(2-x)}$$

4. Dans $(3x-2)^2-(x-5)^2$: $a=3x-2$ et $b=x-5$.

$$(3x-2)^2-(x-5)^2=[(3x-2)+(x-5)][(3x-2)-(x-5)] \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{(4x-7)(2x+3)}$$

5. Dans $(x+4)^2-x^2$: $a=x+4$ et $b=x$.

$$(x+4)^2-x^2=[(x+4)+x][(x+4)-x]=(2x+4)\times 4 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{8(x+2)}$$

Expressions rationnelles

EXERCICE 24 ⋆

Une valeur est interdite lorsqu'elle annule le dénominateur ; on factorise donc celui-ci lorsque c'est nécessaire.

a) $x-2$ s'annule pour $\boxed{x=2}$

b) $x^2-9=(x+3)(x-3)$ s'annule pour $\boxed{x=-3 \text{ et } x=3}$

c) $3x+6=3(x+2)$ s'annule pour $\boxed{x=-2}$

d) Le produit s'annule pour $\boxed{x=1 \text{ et } x=-7}$

e) x^2+1 est toujours strictement positif : $\boxed{\text{aucune valeur interdite}}$

f) $x^2-5x=x(x-5)$ s'annule pour $\boxed{x=0 \text{ et } x=5}$

EXERCICE 25 ⋆⋆

1. Le dénominateur se factorise : $x^2-4=(x+2)(x-2)$, et ce produit s'annule lorsque l'un de ses facteurs est nul :

$$\boxed{\text{les valeurs interdites sont } -2 \text{ et } 2}$$

2. Ces trois valeurs sont autorisées, on peut donc calculer :

$$R(0)=\frac{-1}{-4}=\boxed{\frac{1}{4}} \qquad R(3)=\frac{6-1}{9-4}=\frac{5}{5}=\boxed{1} \qquad R\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1-1}{\frac{1}{4}-4}=\boxed{0}$$

3. Le nombre -2 est une valeur interdite : il annule le dénominateur, et la division par zéro est impossible.

$$\boxed{-2 \text{ n'a pas d'image par } R}$$

EXERCICE 26 ⋆⋆

On factorise le numérateur et le dénominateur, puis on supprime le facteur commun. On rappelle qu'on ne simplifie que des *facteurs*, jamais des termes.

a) Valeur interdite : -2. $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+2)^2} = \boxed{\dfrac{x-2}{x+2}}$

b) Valeurs interdites : -2 et 2. $\dfrac{3x+6}{x^2-4} = \dfrac{3(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \boxed{\dfrac{3}{x-2}}$

c) Valeur interdite : 3. $\dfrac{x^2-9}{2x-6} = \dfrac{(x+3)(x-3)}{2(x-3)} = \boxed{\dfrac{x+3}{2}}$

d) Valeur interdite : $-\dfrac{1}{2}$. $\dfrac{4x^2-1}{2x+1} = \dfrac{(2x+1)(2x-1)}{2x+1} = \boxed{2x-1}$

e) Valeurs interdites : -2 et 2. $\dfrac{x^2+2x}{x^2-4} = \dfrac{x(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \boxed{\dfrac{x}{x-2}}$

f) Valeurs interdites : -3 et 3. $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9} = \dfrac{(x-3)^2}{(x+3)(x-3)} = \boxed{\dfrac{x-3}{x+3}}$

EXERCICE 27 ⋆⋆

On réduit au même dénominateur avant d'additionner, et on multiplie numérateurs entre eux et dénominateurs entre eux pour un produit.

a) Valeurs interdites : 0 et -1.

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} = \frac{2(x+1)}{x(x+1)} + \frac{3x}{x(x+1)} = \frac{2x+2+3x}{x(x+1)} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{5x+2}{x(x+1)}}$$

b) Valeur interdite : 3.

$$x + \frac{1}{x-3} = \frac{x(x-3)}{x-3} + \frac{1}{x-3} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{x^2-3x+1}{x-3}}$$

c) Valeurs interdites : 1 et -1.

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} - \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1-x+1}{(x-1)(x+1)} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{2}{(x-1)(x+1)}}$$

d) Valeur interdite : -2.

$$\frac{x}{x+2} + 2 = \frac{x}{x+2} + \frac{2(x+2)}{x+2} = \frac{x+2x+4}{x+2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{3x+4}{x+2}}$$

e) Valeurs interdites : 0 et 2.

$$\frac{3}{x} \times \frac{x+1}{x-2} = \frac{3 \times (x+1)}{x \times (x-2)} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{3(x+1)}{x(x-2)}}$$

f) Valeurs interdites : 0, 4 et -1 (cette dernière annulerait le diviseur).

$$\frac{x+1}{x} \div \frac{x+1}{x-4} = \frac{x+1}{x} \times \frac{x-4}{x+1} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{x-4}{x}}$$

EXERCICE 28 ⋆⋆

1. La surface coloriée est le grand carré, d'aire x^2, privé du petit carré, d'aire 3^2 :

$$\boxed{\mathcal{A} = x^2 - 9}$$

2. Le trait violet est tracé à la hauteur du côté du petit carré. Il partage la surface en :
   - un rectangle du bas, de largeur x et de hauteur $x - 3$;
   - un rectangle du haut, de largeur $x - 3$ et de hauteur 3.

$$\boxed{\mathcal{A} = x(x-3) + 3(x-3)}$$

3. Le facteur commun est $(x - 3)$:

$$x(x-3) + 3(x-3) = (x-3)(x+3)$$

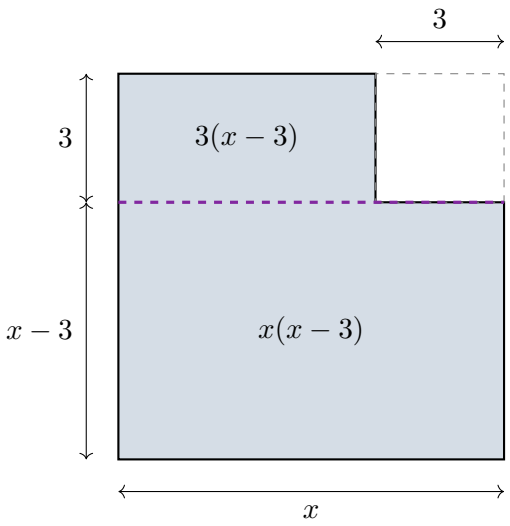
   Les deux écritures désignant la même aire, on en déduit que :

$$\boxed{x^2 - 9 = (x+3)(x-3)}$$

4. On développe le membre de droite :

$$(x+3)(x-3) = x^2 - 3x + 3x - 9 = x^2 - 9$$

   ce qui confirme l'égalité : on retrouve géométriquement l'identité de la différence de deux carrés.

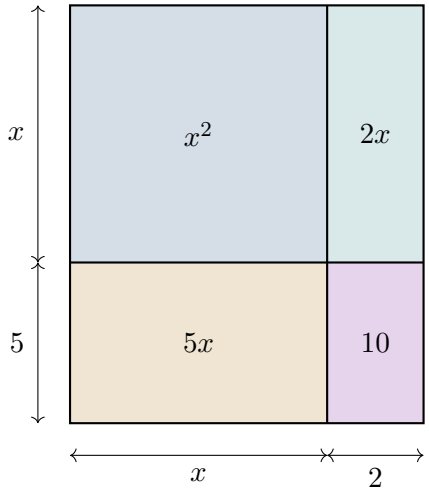


EXERCICE 29 ⋆

1. Le grand rectangle a pour largeur $x+2$ et pour hauteur $x+5$:

$$\boxed{\mathcal{A} = (x+2)(x+5)}$$

2. On calcule l'aire de chacun des quatre morceaux :



En sommant les quatre aires :

$$\boxed{\mathcal{A} = x^2 + 2x + 5x + 10 = x^2 + 7x + 10}$$

3. Les deux questions précédentes donnent deux écritures d'une même aire :

$$(x+2)(x+5) = x^2 + 7x + 10$$

$$\boxed{\text{on vient d'illustrer la double distributivité}}$$

4. En remplaçant 2 et 5 par un même nombre a, le grand rectangle devient un carré de côté $x+a$, et les quatre morceaux ont pour aires x^2, ax, ax et a^2 :

$$\boxed{(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2}$$

On retrouve le carré d'une somme, et l'on voit géométriquement d'où vient le facteur 2 du double produit : les deux rectangles ax sont superposables.

EXERCICE 30 ⋆⋆

1. On applique les quatre étapes :

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 5 \longmapsto 5 \times 1 = 5 \longmapsto 9 \\ 3 &\longmapsto 7 \longmapsto 7 \times 3 = 21 \longmapsto 25 \\ -5 &\longmapsto -1 \longmapsto (-1) \times (-5) = 5 \longmapsto 9 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{on obtient 9, 25 et 9}}$$

2. Ces trois nombres sont des carrés : $9 = 3^2$ et $25 = 5^2$.

$$\boxed{\text{On conjecture que le résultat est toujours un carré}}$$

3. En notant x le nombre choisi, le programme calcule $x+4$, puis $x(x+4)$, puis :

$$x(x+4)+4 = x^2+4x+4$$

$$\boxed{\text{le résultat vaut } x^2+4x+4}$$

4. On reconnaît une identité remarquable, avec $a = x$ et $b = 2$:

$$x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 = (x+2)^2$$

$$\boxed{\text{le résultat est toujours le carré de } x+2}$$

ce qui démontre la conjecture. On retrouve bien $(1+2)^2 = 9$, $(3+2)^2 = 25$ et $(-5+2)^2 = 9$.

5. Un carré est toujours positif ou nul, donc :

$$\boxed{\text{le programme ne peut jamais renvoyer un nombre strictement négatif}}$$

Il renvoie d'ailleurs 0 lorsque l'on choisit $x = -2$.

EXERCICE 31 ⋆⋆

1. On développe le carré, puis on réduit :

$$f(x) = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 - 4 = 4x^2 - 12x + 9 - 4$$

$$\boxed{f(x) = 4x^2 - 12x + 5}$$

2. On reconnaît une différence de deux carrés, avec $a = 2x-3$ et $b = 2$:

$$f(x) = (2x-3)^2 - 2^2 = [(2x-3)+2][(2x-3)-2]$$

$$\boxed{f(x) = (2x-1)(2x-5)}$$

3. Pour $x = 0$, la forme développée est immédiate ; pour $x = \dfrac{3}{2}$, c'est l'écriture de départ qui l'est, puisque la parenthèse s'annule :

$$f(0) = 5 \qquad ; \qquad f\left(\frac{3}{2}\right) = (3-3)^2 - 4 = 0 - 4$$

$$\boxed{f(0) = 5 \qquad \text{et} \qquad f\left(\frac{3}{2}\right) = -4}$$

4. Avec la forme factorisée :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = (1-1)(1-5) = 0 \times (-4) \qquad ; \qquad f\left(\frac{5}{2}\right) = (5-1)(5-5) = 4 \times 0$$

$$\boxed{f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) = 0}$$

Pour chacune de ces deux valeurs, l'un des deux facteurs s'annule, donc le produit est nul.

5. Avec la forme développée :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \times \frac{1}{4} - 12 \times \frac{1}{2} + 5 = 1 - 6 + 5 = 0$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 4 \times \frac{25}{4} - 12 \times \frac{5}{2} + 5 = 25 - 30 + 5 = 0$$

ce qui confirme les résultats précédents, au prix de calculs nettement plus longs.

EXERCICE 32 ⋆⋆

1. Les deux entiers suivants sont $\boxed{n+1 \text{ et } n+2}$

2. On développe :
$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$
$$\boxed{(n+1)^2 - n^2 = 2n+1, \text{ qui est un nombre impair}}$$
En effet $2n$ est pair, donc $2n+1$ est impair.

3. La somme des deux entiers consécutifs n et $n+1$ vaut :
$$n + (n+1) = 2n + 1$$
On reconnaît le résultat de la question précédente, d'où :
$$\boxed{(n+1)^2 - n^2 = n + (n+1)}$$
La différence des carrés de deux entiers consécutifs est donc toujours égale à leur somme.

4. La somme de trois entiers consécutifs s'écrit :
$$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1)$$
Comme $n+1$ est un entier, ce nombre est bien un multiple de 3 :
$$\boxed{n + (n+1) + (n+2) = 3(n+1)}$$

5. On développe les deux carrés :
$$(n+1)^2 - (n-1)^2 = \left(n^2 + 2n + 1\right) - \left(n^2 - 2n + 1\right) = 4n$$
$$\boxed{(n+1)^2 - (n-1)^2 = 4n}$$
La différence des carrés de deux entiers séparés par un troisième est donc toujours un multiple de 4, égal au quadruple de l'entier du milieu.

EXERCICE 33 ⋆⋆

1. $-2(3x-4) = -6x + 8$: le signe $-$ se distribue aussi au second terme. — réponse B
2. $(x-3)^2 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$. — réponse B
3. $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x+5)(x-5)$. — réponse B
4. $x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \times x \times 4 + 4^2 = (x+4)^2$. — réponse A
5. $\dfrac{6x+3}{3} = \dfrac{3(2x+1)}{3} = 2x + 1$: on simplifie un *facteur*, pas un terme. — réponse B
6. $2x - 6$ s'annule lorsque $2x = 6$, c'est-à-dire pour $x = 3$. — réponse C

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

1. On développe les deux carrés, puis on soustrait :
$$\begin{aligned}(a+b)^2 - (a-b)^2 &= \left(a^2 + 2ab + b^2\right) - \left(a^2 - 2ab + b^2\right) \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2\end{aligned}$$
$$\boxed{(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab}$$

2. En posant $a = 15$ et $b = 2$, on a $a + b = 17$ et $a - b = 13$, donc :

$$17^2 - 13^2 = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab = 4 \times 15 \times 2$$

$$\boxed{17^2 - 13^2 = 120}$$

Le calcul est immédiat, alors que $289 - 169$ demande deux carrés et une soustraction.

3. On additionne cette fois les deux développements :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 + (a-b)^2 &= \left(a^2 + 2ab + b^2\right) + \left(a^2 - 2ab + b^2\right) \\ &= 2a^2 + 2b^2\end{aligned}$$

$$\boxed{(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)}$$

4. D'après la question 1., $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$, donc :

$$(a-b)^2 = 7^2 - 4 \times 10 = 49 - 40 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{(a-b)^2 = 9}$$

D'après la question 3., $2\left(a^2 + b^2\right) = (a+b)^2 + (a-b)^2 = 49 + 9 = 58$, d'où :

$$\boxed{a^2 + b^2 = 29}$$

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

1. Le dénominateur se factorise : $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, et ce carré s'annule uniquement lorsque $x + 1 = 0$:

$$\boxed{\text{la seule valeur interdite est } -1}$$

2. On factorise le numérateur à l'aide de la différence de deux carrés :

$$F(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+1)}$$

On simplifie alors par le facteur commun $(x + 1)$, non nul :

$$\boxed{F(x) = \frac{x-1}{x+1}}$$

3. Avec cette écriture simplifiée :

$$F(0) = \frac{-1}{1} = \boxed{-1} \qquad F(2) = \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}} \qquad F(-3) = \frac{-4}{-2} = \boxed{2}$$

4. On écrit $1 = \dfrac{x+1}{x+1}$ afin d'obtenir le même dénominateur :

$$\begin{aligned}F(x) - 1 &= \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} \\ &= \frac{x-1-(x+1)}{x+1} = \frac{x-1-x-1}{x+1}\end{aligned}$$

$$\boxed{F(x) - 1 = \frac{-2}{x+1}}$$

5. En ajoutant 1 à chaque membre de l'égalité précédente, on obtient immédiatement, pour toute valeur de x différente de -1 :

$$\boxed{F(x) = 1 - \frac{2}{x+1}}$$

Cette écriture montre au passage que $F(x)$ ne vaut jamais exactement 1, puisque le quotient $\dfrac{2}{x+1}$ ne s'annule pour aucune valeur de x.