EXERCICES – CHAPITRE 2

CALCUL LITTÉRAL

Expressions littérales

EXERCICE 1 ⋆

Calculer la valeur numérique de chacune des expressions suivantes pour les valeurs indiquées. On prendra garde aux parenthèses lors de la substitution d'un nombre négatif.

1. $A(x) = 3x^2 - 5x + 2$ pour $x = 0$, $x = 2$, $x = -1$ et $x = \dfrac{1}{2}$.
2. $B(x) = (2x - 1)(x + 3)$ pour $x = 0$, $x = 4$, $x = -3$ et $x = -\dfrac{1}{2}$.
3. $C(x) = -x^2 + 4x - 1$ pour $x = 1$, $x = -2$ et $x = 0{,}5$.

EXERCICE 2 ⋆

Pour chacune des expressions suivantes, dire s'il s'agit d'une somme ou d'un produit. On pourra s'aider de la dernière opération que l'on effectuerait pour la calculer.

a) $3(x + 1) + 5$

b) $3(x + 1 + 5)$

c) $(2x - 1)(x + 4)$

d) $2x - 1 + x \times 4$

e) $5x^2$

f) $(x + 2)^2 - 3$

g) $x(x + 1)(x + 2)$

h) $-(x - 7)$

EXERCICE 3 ⋆

Traduire chacune des phrases suivantes par une expression littérale, où x désigne le nombre choisi. Calculer ensuite la valeur de chaque expression pour $x = 3$.

1. Le double de la somme de x et de 5.
2. La somme du double de x et de 5.
3. Le carré de la différence entre x et 3.
4. La différence entre le carré de x et 3.
5. Le produit de x par la somme de x et 4.
6. L'inverse de la somme de x et 1.

EXERCICE 4 ⋆⋆

On considère le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre.
- Lui ajouter 3.
- Multiplier le résultat par 2.
- Soustraire le double du nombre choisi.

1. Appliquer ce programme aux nombres 5, 0 et -4. Que remarque-t-on ?
2. On note x le nombre choisi au départ. Exprimer le résultat du programme en fonction de x.

3. Développer et réduire cette expression, puis conclure.

Développement et réduction

EXERCICE 5 ⋆

Développer les expressions suivantes à l'aide de la simple distributivité :

a) $5(2x-3)$
b) $-3(x+4)$
c) $2x(x-1)$
d) $-(x-3)$
e) $x(3-2x)$
f) $-4(2-3x)$
g) $\frac{1}{2}(4x+6)$
h) $-2x(5-x)$

EXERCICE 6 ⋆

Réduire les expressions suivantes en regroupant les termes semblables :

a) $3x^2+5x-2x^2+7x-1$
b) $4x-7+2x^2-3x+9$
c) $-x^2+6x-4x^2-x$
d) $2x^2-3x+5-x^2+3x-5$
e) $7x^2-2x+1-7x^2+2x$
f) x^2+x+x^2+x
g) $-3x+4x^2-2+x-4x^2$
h) $5x^3-2x^2+x^3+3x^2$

EXERCICE 7 ⋆

Développer puis réduire les expressions suivantes :

a) $3(x+2)+4(x-1)$
b) $5(2x-1)-2(3x+4)$
c) $-2(x-5)-3(2x+1)$
d) $x(x+3)+2(x+3)$
e) $4(3-x)+x(x-1)$
f) $2x(x+1)-x(3x-4)$
g) $7-3(2x-5)$
h) $-x(2x-3)-4(x-2)$

EXERCICE 8 ⋆

Développer et réduire les expressions suivantes à l'aide de la double distributivité :

a) $(x+4)(3x-2)$
b) $(2x-1)(x+5)$
c) $(3-x)(2x+7)$
d) $(5x+2)(x-3)$
e) $(-x+4)(2x-1)$
f) $(3x-1)(3x+4)$

EXERCICE 9 ⋆

Développer puis réduire les expressions suivantes. On prendra garde aux signes $-$ placés devant les parenthèses.

$A=2x(x-1)-3(x+5)$ $\quad B=3(2x+1)-2(x-4)$ $\quad C=5-2(3x-1)+x$

$D=(x+2)(x+3)-(x+1)(x-4)$ $\quad E=4x(x-2)-(2x-3)(x+1)$ $\quad F=-(x-1)(x+6)+2x^2$

EXERCICE 10 ⋆⋆

Développer et réduire les expressions suivantes :

1. $G = (x+1)(x+2)(x+3)$
2. $H = (2x-1)(x+3)(x-2)$
3. $I = x(3-2(x+4))$
4. $J = (x+2)(x-(3x-1))$

EXERCICE 11 ⋆⋆

On considère l'expression $K(x) = (2x-3)(x+1) - (x-4)(x+2)$.

1. Calculer $K(0)$ et $K(2)$ en utilisant directement cette écriture.
2. Développer et réduire $K(x)$.
3. Retrouver les valeurs de $K(0)$ et $K(2)$ à l'aide de l'expression développée. Quelle écriture vous a paru la plus commode ?

Identités remarquables

EXERCICE 12 ⋆

Développer les expressions suivantes en identifiant à chaque fois les nombres a et b de l'identité remarquable utilisée :

a) $(x+5)^2$
b) $(3x-2)^2$
c) $(x+7)(x-7)$
d) $(2x+3)^2$
e) $(5-x)^2$
f) $(4x+1)(4x-1)$

EXERCICE 13 ⋆

Développer de même les expressions suivantes, en prenant garde aux coefficients :

a) $(x+2y)^2$
b) $(3a-b)^2$
c) $(2x+5)(2x-5)$
d) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$
e) $(-x+3)^2$
f) $(7x-4)(7x+4)$
g) $(5x-3)^2$
h) $(a+4b)(a-4b)$
i) $(3x+2y)^2$
j) $(2-9x)(2+9x)$
k) $(6x+1)^2$
l) $(-2x-5)^2$
m) $(4x+7)^2$
n) $(x-3y)^2$
o) $(8x-1)(8x+1)$
p) $(2a+3b)(2a-3b)$
q) $(9-2x)^2$
r) $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$
s) $(-3x+4)^2$
t) $(5a-2b)^2$
u) $(x+10)(x-10)$
v) $(-x-7)^2$
w) $(6-y)(6+y)$
x) $(x^2+1)(x^2-1)$

EXERCICE 14 ⋆

Calculer mentalement, en écrivant chaque nombre à l'aide d'une identité remarquable bien choisie (on détaillera l'étape intermédiaire) :

a) 101^2
b) 99^2
c) 97×103
d) 102×98
e) 45×55
f) $1\,001^2$

EXERCICE 15 ⋆⋆

Développer et réduire les expressions suivantes :

$$L = (x+3)^2 - (x-2)(x+5) \qquad M = 2(x-1)^2 - 3(x+2)(x-2)$$
$$N = (2x+1)^2 - (x-3)^2 \qquad P = (x+4)^2 + (x-4)^2$$

EXERCICE 16 ⋆

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est fausse, donner l'écriture correcte.

1. $(2x)^2 = 2x^2$
2. $(x+3)^2 = x^2 + 9$
3. $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$
4. $-(x-4) = -x + 4$
5. $(3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$
6. $x^2 + 16 = (x+4)(x-4)$

Factorisation

EXERCICE 17 ⋆

Factoriser les expressions suivantes en mettant en évidence un facteur commun :

a) $6x + 15$
b) $4x^2 - 7x$
c) $12x^2 + 18x$
d) $-5x + 10$
e) $x^2 + x$
f) $14x^3 - 21x^2$
g) $9x - 3x^2$
h) $8x^2 + 4x - 12$

EXERCICE 18 ⋆

Factoriser de même les expressions suivantes :

a) $10x + 25$
b) $x^2 - 6x$
c) $15x^2 - 10x$
d) $-4x - 12$
e) $7x^3 + 7x^2$
f) $3x^2 + 9x - 6$
g) $2x - x^2$
h) $6x^4 - 4x^3 + 2x^2$

EXERCICE 19 ⋆

Factoriser les expressions suivantes : le facteur commun est ici une expression entre parenthèses.

1. $(x+2)(3x-1) + (x+2)(x+8)$
2. $(2x-1)(x+4) + (2x-1)$
3. $(x-3)(2x+1) - (x-3)(x-5)$
4. $(5x+2)^2 - (5x+2)(x-1)$

5. $4(x+1)-x(x+1)$
6. $(x+6)(x-2)-(x+6)$

EXERCICE 20 ⋆

Factoriser les expressions suivantes à l'aide d'une identité remarquable :

a) x^2-16
b) x^2+6x+9
c) $25x^2-20x+4$
d) $9x^2-49$
e) x^2-2x+1
f) $4x^2+12x+9$
g) $x^2-\frac{1}{4}$
h) $16x^2-1$
i) $49-14x+x^2$

EXERCICE 21 ⋆

Recopier et compléter les égalités suivantes, où les pointillés désignent un nombre ou une expression à trouver :

a) $x^2+10x+\ldots=(x+\ldots)^2$
b) $x^2-\ldots+49=(x-7)^2$
c) $4x^2-\ldots=(2x+9)(2x-9)$
d) $\ldots+12x+9=(\ldots+3)^2$
e) $x^2-8x+\ldots=(x-\ldots)^2$
f) $9x^2-25=(\ldots)(\ldots)$

EXERCICE 22 ⋆⋆

Factoriser les expressions suivantes. On cherchera d'abord un facteur commun, puis on regardera si une identité remarquable apparaît.

a) $2x^2-18$
b) $3x^2+12x+12$
c) $5x^2-45$
d) x^3-4x
e) $-2x^2+8$
f) $4x^3+4x^2+x$

EXERCICE 23 ⋆⋆

Factoriser les expressions suivantes : une identité remarquable y fait apparaître un facteur commun.

1. $(x-1)^2-9$
2. $(2x+1)^2-(x+3)^2$
3. $16-(x+2)^2$
4. $(3x-2)^2-(x-5)^2$
5. $(x+4)^2-x^2$

Expressions rationnelles

EXERCICE 24 ⋆

Déterminer les valeurs interdites de chacune des expressions suivantes :

a) $\frac{3x+1}{x-2}$
b) $\frac{x+5}{x^2-9}$
c) $\frac{2x}{3x+6}$
d) $\frac{4}{(x-1)(x+7)}$
e) $\frac{x-1}{x^2+1}$
f) $\frac{x^2+2}{x^2-5x}$

EXERCICE 25 ⋆⋆

On considère l'expression $R(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-4}$.

1. Déterminer les valeurs interdites de R.
2. Calculer $R(0)$, $R(3)$ et $R\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
3. Le nombre -2 possède-t-il une image par R ? Justifier.

EXERCICE 26 ⋆⋆

Simplifier les expressions rationnelles suivantes, après avoir précisé les valeurs interdites. On factorisera le numérateur et le dénominateur.

a) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}$

b) $\dfrac{3x+6}{x^2-4}$

c) $\dfrac{x^2-9}{2x-6}$

d) $\dfrac{4x^2-1}{2x+1}$

e) $\dfrac{x^2+2x}{x^2-4}$

f) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$

EXERCICE 27 ⋆⋆

Écrire chacune des expressions suivantes sous la forme d'un quotient unique, après avoir précisé les valeurs interdites :

a) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x+1}$

b) $x+\dfrac{1}{x-3}$

c) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$

d) $\dfrac{x}{x+2}+2$

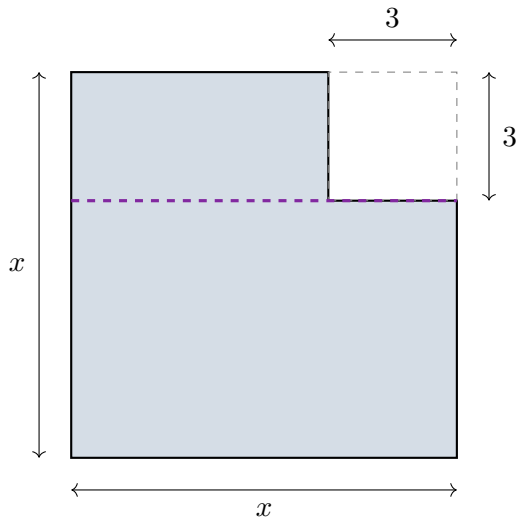
e) $\dfrac{3}{x}\times\dfrac{x+1}{x-2}$

f) $\dfrac{x+1}{x}\div\dfrac{x+1}{x-4}$

Exercices de synthèse

EXERCICE 28 ⋆⋆

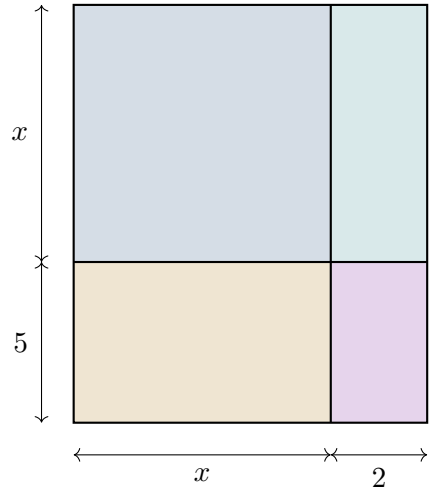
On considère un carré de côté x (avec $x > 3$) auquel on retire, dans un coin, un carré de côté 3. La figure obtenue est coloriée ci-dessous *(la figure n'est pas à l'échelle)* :



1. Exprimer l'aire de la surface coloriée en fonction de x, comme une différence de deux carrés.
2. Le trait violet partage la surface coloriée en deux rectangles. Donner les dimensions de chacun d'eux en fonction de x, puis exprimer l'aire de la surface coloriée sous la forme d'une somme de deux produits.
3. Factoriser l'expression obtenue à la question 2., et en déduire une égalité entre l'écriture de la question 1. et un produit.
4. Vérifier cette égalité en développant.

EXERCICE 29 ⋆

Le rectangle ci-dessous est partagé en quatre rectangles plus petits.



1. Donner les dimensions du grand rectangle, puis exprimer son aire sous la forme d'un produit.
2. Calculer l'aire de chacun des quatre rectangles colorés, puis exprimer l'aire totale sous la forme d'une somme réduite.
3. Quelle propriété du cours vient-on d'illustrer ?
4. Reprendre les questions 1. et 2. en remplaçant à la fois la longueur 2 et la longueur 5 par un même nombre a. Quelle identité remarquable retrouve-t-on alors ?

EXERCICE 30 ⋆⋆

On considère le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre.
- Lui ajouter 4.
- Multiplier le résultat par le nombre choisi.
- Ajouter 4.

1. Appliquer ce programme aux nombres 1, 3 et -5.
2. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature des résultats obtenus ?
3. On note x le nombre choisi. Exprimer le résultat du programme en fonction de x, puis développer et réduire cette expression.
4. Factoriser l'expression obtenue, et démontrer la conjecture.
5. Le programme peut-il renvoyer un nombre strictement négatif ? Justifier à l'aide de la question 4.

EXERCICE 31 ⋆⋆

On considère l'expression $f(x) = (2x-3)^2 - 4$.

1. Développer et réduire $f(x)$.
2. Factoriser $f(x)$.
3. Calculer $f(0)$ et $f\left(\frac{3}{2}\right)$ en choisissant à chaque fois l'écriture la plus commode.
4. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f\left(\frac{5}{2}\right)$ à l'aide de la forme factorisée. Que remarque-t-on ?
5. Vérifier le résultat de la question précédente à l'aide de la forme développée.

EXERCICE 32 ⋆⋆

Soit n un entier naturel.

1. Exprimer en fonction de n les deux entiers qui suivent immédiatement n.
2. Développer et réduire $(n+1)^2 - n^2$. Que peut-on dire du résultat ?
3. Démontrer que la différence des carrés de deux entiers consécutifs est toujours égale à la somme de ces deux entiers.
4. Démontrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.
5. Développer $(n+1)^2 - (n-1)^2$ pour $n \geqslant 1$. Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 33 ⋆⋆

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Déterminer laquelle et justifier.

	Réponse A	**Réponse B**	**Réponse C**
1. $-2(3x-4)$ vaut	$-6x-8$	$-6x+8$	$6x+8$
2. $(x-3)^2$ vaut	x^2-9	x^2-6x+9	x^2+9
3. x^2-25 se factorise en	$(x-5)^2$	$(x+5)(x-5)$	$x(x-25)$
4. $x^2+8x+16$ se factorise en	$(x+4)^2$	$(x+8)^2$	$(x+4)(x-4)$
5. $\dfrac{6x+3}{3}$ vaut	$2x+3$	$2x+1$	$6x+1$
6. La valeur interdite de $\dfrac{x+1}{2x-6}$ est	-1	6	3

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

Soient a et b deux nombres réels.

1. Développer et réduire $(a+b)^2 - (a-b)^2$.
2. En déduire une méthode pour calculer mentalement $17^2 - 13^2$. *(On pourra poser $a = 15$ et $b = 2$.)*
3. Démontrer de même que $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2\left(a^2+b^2\right)$.
4. On suppose que $a+b=7$ et que $ab=10$. Sans chercher les valeurs de a et b, calculer $(a-b)^2$ à l'aide de la question 1., puis a^2+b^2 à l'aide de la question 3.

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

On considère l'expression $F(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$.

1. Déterminer les valeurs interdites de F.
2. Factoriser le numérateur et le dénominateur, puis simplifier $F(x)$.
3. Calculer $F(0)$, $F(2)$ et $F(-3)$ à l'aide de la forme simplifiée.
4. Écrire $F(x) - 1$ sous la forme d'un quotient unique.
5. En déduire que, pour toute valeur de x autorisée, $F(x) = 1 - \dfrac{2}{x + 1}$.