CORRIGÉ – CHAPITRE 3

PROBABILITÉS

Vocabulaire et événements

EXERCICE 1 ⋆

1. Le résultat n'est pas prévisible et l'on connaît la liste des résultats possibles : c'est bien une expérience aléatoire.

$$\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\,;11\,;12\} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{12 \text{ issues.}}$$

2. C'est une expérience aléatoire. L'univers Ω est l'ensemble des cartes du jeu (chaque carte est décrite par sa valeur et sa couleur), donc $\boxed{52 \text{ issues.}}$

3. Le résultat n'est pas connu à l'avance, mais les résultats possibles ne forment pas une liste que l'on peut écrire : une taille peut prendre *toutes* les valeurs d'un intervalle (par exemple entre 1,50 m et 2,00 m). On ne peut donc pas décrire Ω par une liste d'issues, ni compter ces issues : $\boxed{\text{cette expérience sort du cadre du chapitre.}}$

   Remarque : si l'on convient d'arrondir la taille au centimètre, on retombe sur un univers fini et l'on peut de nouveau compter les issues.

4. C'est une expérience aléatoire. On note P pour « pile » et F pour « face ». Comme on tient compte de l'ordre :

$$\Omega = \{(P\,;P)\,;\,(P\,;F)\,;\,(F\,;P)\,;\,(F\,;F)\} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{4 \text{ issues.}}$$

5. C'est une expérience aléatoire :

$$\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{8 \text{ issues.}}$$

6. C'est une expérience aléatoire. Le mot `probabilite` comporte 11 lettres, mais les lettres `b` et `i` y figurent deux fois. Si l'on s'intéresse à la lettre obtenue :

$$\Omega = \{\text{p}\,;\text{r}\,;\text{o}\,;\text{b}\,;\text{a}\,;\text{i}\,;\text{l}\,;\text{t}\,;\text{e}\} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{9 \text{ issues.}}$$

   On remarque que ces 9 issues ne sont **pas** équiprobables : on a deux fois plus de chances d'obtenir un `b` ou un `i` que n'importe quelle autre lettre.

EXERCICE 2 ⋆

Ici $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$.

1. On liste les issues qui réalisent chaque événement :

   - $A = \{2\,;4\,;6\}$
   - $B = \{5\,;6\}$
   - $C = \{3\,;6\}$
   - $D = \{1\}$
   - $E = \{2\,;3\,;5\}$

   Attention : 1 n'est pas un nombre premier, il n'appartient donc pas à E.

2. L'événement contraire est formé de *toutes les autres* issues de Ω :

$$\boxed{\overline{A} = \{1\,;3\,;5\}} \qquad \boxed{\overline{E} = \{1\,;4\,;6\}}$$

3. On rappelle que $\cap$ signifie « et » (issues communes) et $\cup$ signifie « ou » (issues de l'un ou de l'autre, sans les compter deux fois).

- $A \cap B = \{2\,;4\,;6\} \cap \{5\,;6\} = \boxed{\{6\}}$
- $A \cup B = \{2\,;4\,;6\} \cup \{5\,;6\} = \boxed{\{2\,;4\,;5\,;6\}}$
- $B \cap C = \{5\,;6\} \cap \{3\,;6\} = \boxed{\{6\}}$
- $A \cap C = \{2\,;4\,;6\} \cap \{3\,;6\} = \boxed{\{6\}}$
- $A \cap E = \{2\,;4\,;6\} \cap \{2\,;3\,;5\} = \boxed{\{2\}}$
- $C \cup E = \{3\,;6\} \cup \{2\,;3\,;5\} = \boxed{\{2\,;3\,;5\,;6\}}$

On remarque que trois de ces intersections sont réduites à la seule issue 6 : c'est normal, 6 est le seul nombre du dé qui soit à la fois pair, supérieur ou égal à 5 et multiple de 3.

4. $A \cap C$: « obtenir un nombre **pair** qui est aussi un **multiple de** 3 », c'est-à-dire un multiple de 6 : ici, obtenir 6.

   $A \cap E$: « obtenir un nombre **pair** qui est aussi **premier** », c'est-à-dire obtenir 2, seul nombre pair premier.

5. Deux événements sont incompatibles lorsqu'ils n'ont aucune issue commune.
   - $A \cap B = \{6\} \neq \varnothing$: A et B **ne sont pas** incompatibles.
   - $A \cap D = \{2\,;4\,;6\} \cap \{1\} = \varnothing$: A et D **sont** incompatibles.
   - $B \cap C = \{6\} \neq \varnothing$: B et C **ne sont pas** incompatibles.
   - $D \cap E = \{1\} \cap \{2\,;3\,;5\} = \varnothing$: D et E **sont** incompatibles.

   $\boxed{\text{Seuls les couples } (A\,;D) \text{ et } (D\,;E) \text{ sont formés d'événements incompatibles.}}$

6. On constate que $D \cap E = \varnothing$, mais que $D \cup E = \{1\,;2\,;3\,;5\} \neq \Omega$ (les issues 4 et 6 manquent). Deux événements contraires doivent vérifier *les deux* conditions, donc

   $\boxed{D \text{ et } E \text{ ne sont pas contraires : ils sont seulement incompatibles.}}$

   D'ailleurs $\overline{D} = \{2\,;3\,;4\,;5\,;6\} \neq E$.

EXERCICE 3 ⋆

Le jeu comporte 32 cartes : 4 couleurs de 8 cartes (7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as).

1. - $R \cap C$: « la carte est un roi **et** un cœur », autrement dit « la carte est le roi de cœur ».
   - $R \cup C$: « la carte est un roi **ou** un cœur » (le roi de cœur convient aussi, le « ou » est inclusif).
   - $\overline{R}$: « la carte n'est **pas** un roi ».

2. On dénombre les cartes de chaque événement :
   - R : un roi par couleur, soit $\boxed{4}$ cartes.
   - C : $\boxed{8}$ cartes de cœur.
   - F : 3 figures par couleur, soit $3 \times 4 = \boxed{12}$ cartes.
   - $R \cap C$: le seul roi de cœur, soit $\boxed{1}$ carte.
   - $R \cup C$: $4 + 8 - 1 = \boxed{11}$ cartes.
   - $C \cap F$: valet, dame et roi de cœur, soit $\boxed{3}$ cartes.

   Piège : pour $R \cup C$, on ne peut pas faire $4 + 8 = 12$, car le roi de cœur serait compté deux fois ; on le retire donc une fois.

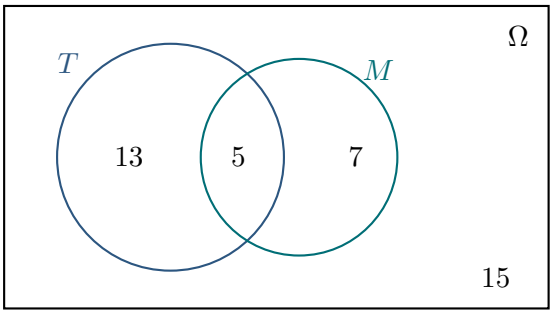
3. $R \cap C$ contient le roi de cœur, donc $\boxed{R \text{ et } C \text{ ne sont pas incompatibles.}}$ En revanche, une carte ne peut pas être à la fois un roi et un as, donc $\boxed{R \text{ et « la carte est un as » sont incompatibles.}}$

4. Les figures sont les valets, les dames et **les rois** : toute carte de R est donc une figure, c'est-à-dire une issue de F. On en déduit que R est inclus dans F, et donc que les issues communes à R et F sont exactement celles de R :

   $\boxed{R \cap F = R \quad (4 \text{ cartes})}$

EXERCICE 4 ⋆

1. Sur les 18 élèves de théâtre, 5 font aussi de la musique : il y en a donc $18-5=13$ qui font *uniquement* du théâtre. De même $12-5=7$ élèves font uniquement de la musique. Enfin $40-(13+5+7)=40-25=15$ élèves ne suivent aucune des deux options.



2. Il y a équiprobabilité (l'élève est choisi au hasard parmi 40) :

$$P(T)=\frac{18}{40}=\boxed{\frac{9}{20}=0{,}45} \qquad P(M)=\frac{12}{40}=\boxed{\frac{3}{10}=0{,}3} \qquad P(T\cap M)=\frac{5}{40}=\boxed{\frac{1}{8}=0{,}125}$$

3. **Par lecture du diagramme :** les élèves qui suivent au moins une des deux options sont au nombre de $13+5+7=25$, donc

$$P(T\cup M)=\frac{25}{40}=\boxed{\frac{5}{8}=0{,}625}$$

Par la formule du cours :

$$P(T\cup M)=P(T)+P(M)-P(T\cap M)=0{,}45+0{,}3-0{,}125=\boxed{0{,}625}$$

On retrouve bien le même résultat.

4. $P\left(\overline{T}\right)=1-P(T)=1-0{,}45=\boxed{0{,}55}$.

« Ne suivre aucune des deux options » est l'événement contraire de $T\cup M$, donc

$$P\left(\overline{T\cup M}\right)=1-P(T\cup M)=1-0{,}625=\boxed{0{,}375}$$

Ce qui correspond bien aux 15 élèves lus sur le diagramme : $\frac{15}{40}=0{,}375$.

EXERCICE 5 ⋆

1. **Fausse**. Une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1 : elle ne peut pas valoir 1,2. *Énoncé correct :* pour tout événement A, on a $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.
2. **Vraie**. Si A et $\overline{A}$ sont contraires, alors aucune issue ne peut réaliser les deux à la fois : $A\cap\overline{A}=\varnothing$, ce qui est exactement la définition de l'incompatibilité.
3. **Fausse**. *Contre-exemple :* on lance un dé à six faces, $A=\{1\}$ et $B=\{2\}$. Ces deux événements sont incompatibles, pourtant $A\cup B=\{1\,;2\}\neq\Omega$: ils ne sont pas contraires. *Énoncé correct :* deux événements sont contraires lorsque $A\cap B=\varnothing$ **et** $A\cup B=\Omega$.
4. **Vraie**. Le « ou » des mathématiques est inclusif : $A\cup B$ contient les issues qui réalisent A, celles qui réalisent B, et donc aussi celles qui réalisent les deux.
5. **Vraie**. C'est la formule du cours : comme $A\cap B=\varnothing$, aucune issue n'est comptée deux fois, et $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-0=P(A)+P(B)$.

6. **Vraie**. Si $P(A) = 1$, alors $P\left(\overline{A}\right) = 1 - 1 = 0$: aucune issue de probabilité non nulle ne réalise le contraire de A, donc A se produit à coup sûr.

Lois de probabilité

EXERCICE 6 ⋆

1. La somme des probabilités de toutes les issues vaut toujours 1. Les cinq premières issues donnent

$$0{,}05 + 0{,}15 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}7$$

Il reste donc pour la face 6 :

$$a = 1 - 0{,}7 = \boxed{a = 0{,}3}$$

2. Si le dé était équilibré, chaque face aurait la probabilité $\dfrac{1}{6} \approx 0{,}167$. Or ici $P(1) = 0{,}05$ et $P(6) = 0{,}3$:

$$\boxed{\text{le dé n'est pas équilibré (les six issues ne sont pas équiprobables).}}$$

3. L'événement « obtenir un nombre pair » est $\{2\,;4\,;6\}$. Ces issues étant deux à deux incompatibles, on additionne leurs probabilités :

$$P(\text{pair}) = 0{,}15 + 0{,}2 + 0{,}3 = \boxed{0{,}65}$$

4. $P(\text{nombre} \geqslant 4) = P(4) + P(5) + P(6) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 = \boxed{0{,}6}$

$P(\text{nombre} < 4) = P(1) + P(2) + P(3) = 0{,}05 + 0{,}15 + 0{,}2 = \boxed{0{,}4}$

On remarque que $0{,}6 + 0{,}4 = 1$: c'est normal, ces deux événements sont **contraires** l'un de l'autre.

EXERCICE 7 ⋆

1. Les dix secteurs sont *identiques* : la roue a donc autant de chances de s'arrêter sur l'un que sur l'autre. On est bien en situation d'équiprobabilité, et chaque secteur a la probabilité $\dfrac{1}{10}$.
Comme 5 secteurs sont rouges, 3 verts et 2 bleus :

Couleur	Rouge	Vert	Bleu
Probabilité	$\dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$

2. $\dfrac{5}{10} + \dfrac{3}{10} + \dfrac{2}{10} = \dfrac{10}{10} = \boxed{1}$: la loi de probabilité est bien cohérente.
3. **Première façon** (les couleurs sont incompatibles deux à deux) :

$$P(\text{rouge ou bleu}) = P(\text{rouge}) + P(\text{bleu}) = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \boxed{\frac{7}{10} = 0{,}7}$$

Deuxième façon (par l'événement contraire, « obtenir un secteur vert ») :

$$P(\text{rouge ou bleu}) = 1 - P(\text{vert}) = 1 - \frac{3}{10} = \boxed{\frac{7}{10} = 0{,}7}$$

4. On multiplie chaque probabilité par 100 :

rouge : 50 %	vert : 30 %	bleu : 20 %	rouge ou bleu : 70 %

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. $98 + 171 + 165 + 159 + 172 + 235 = 1\,000$: le total est bien correct.
   La fréquence d'une face s'obtient en divisant son effectif par 1 000 :

Face	1	2	3	4	5	6
Effectif	98	171	165	159	172	235
Fréquence	0,098	0,171	0,165	0,159	0,172	0,235

2. Si le dé était équilibré, chaque face aurait la probabilité

$$\frac{1}{6} \approx \boxed{0{,}167}$$

   On constate que les fréquences des faces 2, 3, 4 et 5 sont assez proches de 0,167, mais que celle de la face 1 est nettement plus petite (0,098) et celle de la face 6 nettement plus grande (0,235).

3. Sur un aussi grand nombre de lancers, de tels écarts ne peuvent pas s'expliquer par le seul hasard :

$$\boxed{\text{le dé semble truqué, en faveur de la face 6.}}$$

4. On assimile les probabilités aux fréquences observées :

$$P(\text{pair}) = 0{,}171 + 0{,}159 + 0{,}235 = \boxed{0{,}565}$$

   (à comparer à 0,5 pour un dé équilibré).

EXERCICE 9 ⋆

1. Les quatre modes de transport forment toutes les possibilités, donc la somme des pourcentages vaut 100 % :

$$P(\text{à pied}) = 1 - (0{,}45 + 0{,}20 + 0{,}25) = 1 - 0{,}9 = \boxed{0{,}1}$$

   soit 10 % des élèves.

2.

Transport	Bus	Vélo	Voiture	À pied
Probabilité	0,45	0,20	0,25	0,10

$$0{,}45 + 0{,}20 + 0{,}25 + 0{,}10 = \boxed{1}$$

3. Un élève ne peut pas venir à la fois en bus et à vélo : ces deux événements sont incompatibles, donc

$$P(\text{bus ou vélo}) = 0{,}45 + 0{,}20 = \boxed{0{,}65}$$

4. On passe par l'événement contraire :

$$P(\text{pas en voiture}) = 1 - P(\text{voiture}) = 1 - 0{,}25 = \boxed{0{,}75}$$

5. 20 % des 400 élèves viennent à vélo :

$$0{,}20 \times 400 = \boxed{80 \text{ élèves.}}$$

EXERCICE 10 ⋆

La carte étant tirée au hasard dans un jeu bien mélangé, les 32 issues sont équiprobables. On applique donc à chaque fois

$$P(\text{événement}) = \frac{\text{nombre de cartes favorables}}{32}$$

a) Il y a 8 cœurs : $P = \frac{8}{32} = \boxed{\frac{1}{4}}$

b) Il y a 4 rois : $P = \frac{4}{32} = \boxed{\frac{1}{8}}$

c) Il y a $3 \times 4 = 12$ figures : $P = \frac{12}{32} = \boxed{\frac{3}{8}}$

d) Il n'y a qu'un roi de cœur : $P = \boxed{\frac{1}{32}}$

e) Il y a $8 + 4 - 1 = 11$ cartes qui sont un cœur ou un roi (le roi de cœur ne doit pas être compté deux fois) : $P = \boxed{\frac{11}{32}}$

f) C'est l'événement contraire du précédent : $P = 1 - \frac{11}{32} = \frac{32}{32} - \frac{11}{32} = \boxed{\frac{21}{32}}$

EXERCICE 11 ⋆

Les 20 jetons sont indiscernables au toucher : il y a équiprobabilité, et chaque issue a la probabilité $\frac{1}{20}$.

1. Les numéros pairs sont 2, 4, …, 20, soit 10 jetons :

$$P(\text{pair}) = \frac{10}{20} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

2. Les multiples de 3 sont $\{3\,;6\,;9\,;12\,;15\,;18\}$, soit 6 jetons :

$$P(\text{multiple de 3}) = \frac{6}{20} = \boxed{\frac{3}{10}}$$

3. Être à la fois pair et multiple de 3, c'est être un multiple de 6 : $\{6\,;12\,;18\}$, soit 3 jetons :

$$P(\text{pair et multiple de 3}) = \boxed{\frac{3}{20}}$$

4. On applique la formule du cours :

$$P(\text{pair ou multiple de 3}) = \frac{10}{20} + \frac{6}{20} - \frac{3}{20} = \boxed{\frac{13}{20}}$$

Piège : il ne faut surtout pas oublier de retrancher $P(\text{pair et multiple de 3})$, sinon les jetons 6, 12 et 18 seraient comptés deux fois.

5. Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 20 sont $\{2\,;3\,;5\,;7\,;11\,;13\,;17\,;19\}$, soit 8 jetons (rappelons que 1 n'est pas premier) :

$$P(\text{premier}) = \frac{8}{20} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

EXERCICE 12 ⋆

1. Tous les bonbons ont la même forme : on ne peut pas les distinguer au toucher, donc chacun a la même chance d'être tiré. Il y a équiprobabilité, et le nombre d'issues est

$$12 + 8 + 5 = \boxed{25 \text{ issues.}}$$

2. $P(\text{fraise}) = \dfrac{12}{25} = \boxed{\dfrac{12}{25} = 0{,}48}$

3. **Première façon** (par l'événement contraire) :

$$P(\text{pas menthe}) = 1 - P(\text{menthe}) = 1 - \frac{5}{25} = \frac{20}{25} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

Deuxième façon (en comptant directement les bonbons favorables : fraise ou citron) :

$$P(\text{pas menthe}) = \frac{12+8}{25} = \frac{20}{25} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

4. « Fraise » et « citron » sont incompatibles (un bonbon n'a qu'un seul parfum) :

$$P(\text{fraise ou citron}) = \frac{12}{25} + \frac{8}{25} = \frac{20}{25} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

On retrouve le résultat de la question précédente, ce qui est logique : ne pas tirer de menthe, c'est exactement tirer une fraise ou un citron.

EXERCICE 13 ⋆⋆

1. $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}35$ et $P(A \cap B) = 0{,}15$.
   (a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}35 - 0{,}15 = \boxed{0{,}6}$
   (b) $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}4 = \boxed{0{,}6}$
   Remarque : l'égalité des deux résultats est ici une pure coïncidence.
   (c) « Ni A ni B ne se réalise » est l'événement contraire de « A ou B se réalise », c'est-à-dire le contraire de $A \cup B$:

$$P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}6 = \boxed{0{,}4}$$

2. $P(C) = 0{,}5$, $P(D) = 0{,}3$ et $P(C \cup D) = 0{,}7$.
   (a) On repart de la même formule, en isolant le terme cherché :

$$P(C \cap D) = P(C) + P(D) - P(C \cup D) = 0{,}5 + 0{,}3 - 0{,}7 = \boxed{0{,}1}$$

   (b) On constate que $P(C \cap D) = 0{,}1 \neq 0$: il existe donc des issues qui réalisent C et D en même temps, et

$$\boxed{C \text{ et } D \text{ ne sont pas incompatibles.}}$$

EXERCICE 14 ⋆⋆

1. On complète le tableau par différences, ligne par ligne puis colonne par colonne. Le nombre de femmes est $250 - 120 = 130$; les hommes sans lunettes sont $120 - 45 = 75$; les femmes sans lunettes sont $130 - 65 = 65$.

	Lunettes	Pas de lunettes	Total
Hommes	45	75	120
Femmes	65	65	130
Total	110	140	250

   Vérification : $110 + 140 = 250$ et $120 + 130 = 250$.

2. $P(\text{femme}) = \dfrac{130}{250} = \boxed{\dfrac{13}{25} = 0{,}52}$

3. $P(\text{lunettes}) = \dfrac{110}{250} = \boxed{\dfrac{11}{25} = 0{,}44}$

4. $P(\text{femme et lunettes}) = \dfrac{65}{250} = \boxed{\dfrac{13}{50} = 0{,}26}$

5. On applique la formule du cours :

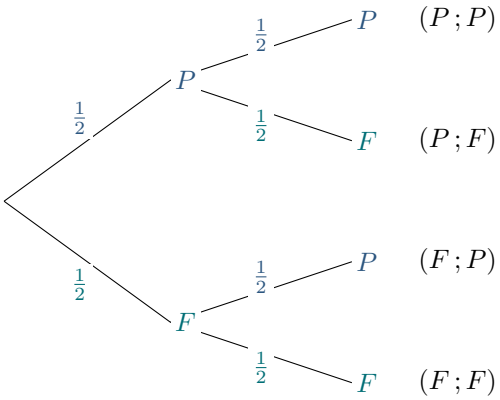
$$P(\text{femme ou lunettes}) = 0{,}52 + 0{,}44 - 0{,}26 = \boxed{0{,}70}$$

   Vérification par le tableau : les personnes concernées sont les 130 femmes auxquelles on ajoute les 45 hommes à lunettes, soit 175 personnes, et $\dfrac{175}{250} = 0{,}7$.

Expériences à plusieurs étapes

EXERCICE 15 ⋆

1. On note P pour « pile » et F pour « face ».



   L'arbre possède $2 \times 2 = \boxed{4 \text{ issues.}}$

2. La pièce est équilibrée et les deux lancers se font dans les mêmes conditions : à chaque étape, « pile » et « face » ont la même probabilité $\dfrac{1}{2}$. Les quatre chemins de l'arbre sont donc équiprobables, chacun de probabilité

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

3. Un seul chemin donne deux fois « pile » : $P = \boxed{\frac{1}{4}}$

4. Deux chemins conviennent, $(P\,;F)$ et $(F\,;P)$:

$$P(\text{exactement un pile}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Attention : « exactement une fois pile » n'est pas « pile au premier lancer » ; il faut bien compter les deux ordres possibles.

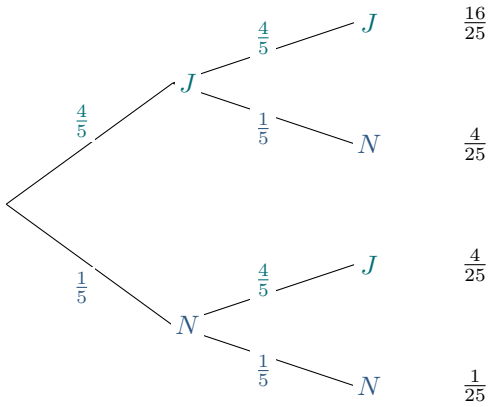
5. L'événement contraire de « au moins une fois pile » est « aucune fois pile », c'est-à-dire l'issue $(F\,;F)$:

$$P(\text{au moins un pile}) = 1 - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

EXERCICE 16 ⋆

1. La boule tirée est **remise** dans l'urne avant le second tirage : l'urne contient donc à nouveau 4 boules jaunes et 1 boule noire. Les deux tirages se déroulent bien dans les mêmes conditions, et le résultat du premier n'a aucune influence sur le second.

2. On note J « obtenir une boule jaune » et N « obtenir une boule noire ». À chaque tirage, $P(J) = \frac{4}{5}$ et $P(N) = \frac{1}{5}$.



3. On multiplie les probabilités le long de chaque chemin :

- $P(J\,;J) = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$
- $P(J\,;N) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$
- $P(N\,;J) = \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{25}$
- $P(N\,;N) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$

$$\frac{16}{25} + \frac{4}{25} + \frac{4}{25} + \frac{1}{25} = \frac{25}{25} = \boxed{1}$$

4. $P(\text{deux jaunes}) = \boxed{\frac{16}{25}}$

5. Deux chemins conviennent :

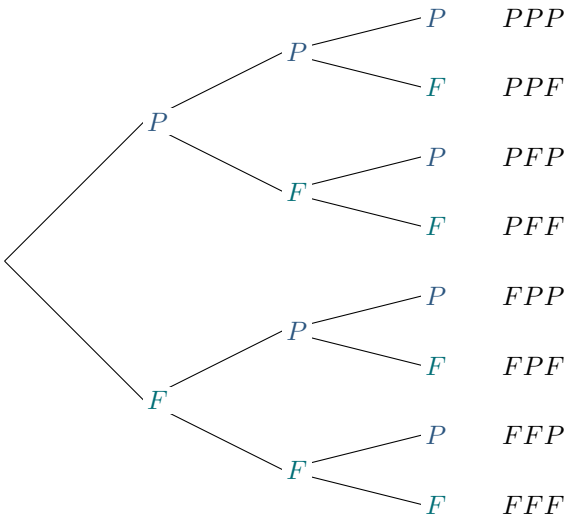
$$P(\text{exactement une noire}) = \frac{4}{25} + \frac{4}{25} = \boxed{\frac{8}{25}}$$

6. Le contraire de « au moins une noire » est « deux jaunes » :

$$P(\text{au moins une noire}) = 1 - \frac{16}{25} = \boxed{\frac{9}{25}}$$

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. L'arbre comporte trois niveaux, chacun à deux branches :



Toutes les branches portent la probabilité $\frac{1}{2}$ (la pièce est équilibrée). Il y a $2 \times 2 \times 2 = \boxed{8 \text{ issues,}}$ toutes équiprobables, de probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

2. Un seul chemin, FFF : $P = \boxed{\frac{1}{8}}$
3. Trois chemins conviennent : PPF, PFP et FPP :

$$P(\text{exactement deux piles}) = \frac{3}{8} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

4. Le contraire est « aucun pile », c'est-à-dire FFF :

$$P(\text{au moins un pile}) = 1 - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{7}{8}}$$

5. Deux chemins donnent trois résultats identiques : PPP et FFF :

$$P = \frac{2}{8} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. Chaque case contient le produit du numéro de la ligne par celui de la colonne :

Vert \ Rouge	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

   Les deux dés étant équilibrés et distinguables, il y a $6 \times 6 = \boxed{36 \text{ issues}}$ équiprobables, chacune de probabilité $\frac{1}{36}$.

2. Le produit 6 apparaît dans 4 cases : 1×6, 6×1, 2×3 et 3×2 :

$$P(\text{produit} = 6) = \frac{4}{36} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

3. Le produit 12 apparaît lui aussi dans 4 cases : 2×6, 6×2, 3×4 et 4×3 :

$$P(\text{produit} = 12) = \frac{4}{36} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

   On obtient la même probabilité qu'à la question précédente.

4. Un produit est impair si et seulement si les *deux* facteurs sont impairs. Il y a 3 possibilités pour chaque dé (1, 3 ou 5), soit $3 \times 3 = 9$ cases :

$$P(\text{produit impair}) = \frac{9}{36} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

   Par événement contraire :

$$P(\text{produit pair}) = 1 - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

5. On relève dans le tableau les cases dont le produit vaut au moins 20 : 20, 24, 20, 25, 30, 24, 30 et 36, soit 8 cases :

$$P(\text{produit} \geqslant 20) = \frac{8}{36} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

6. Le produit est un multiple de 5 si et seulement si au moins un des deux dés donne 5. Le contraire est « aucun des deux dés ne donne 5 », soit $5 \times 5 = 25$ cases :

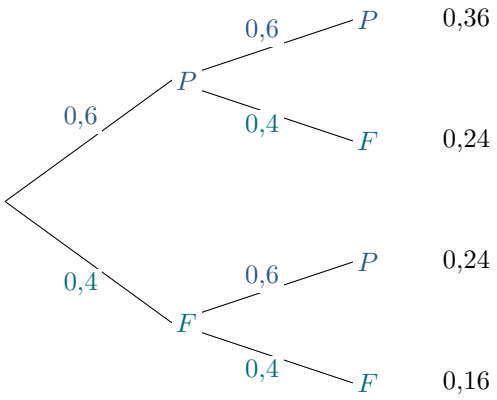
$$P(\text{multiple de 5}) = 1 - \frac{25}{36} = \boxed{\frac{11}{36}}$$

7. En comptant les apparitions de chaque produit dans le tableau, on constate qu'aucun ne figure plus de 4 fois, et que deux d'entre eux atteignent ce maximum :

$$\boxed{\text{les produits 6 et 12 sont les plus probables, avec } \frac{1}{9} \text{ chacun.}}$$

EXERCICE 19 ⋆⋆

1. Comme $P(P) = 0{,}6$, on a $P(F) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$. Les deux lancers étant indépendants, les probabilités du second niveau sont les mêmes que celles du premier.



2. $P(P\,;P) = 0{,}6 \times 0{,}6 = \boxed{0{,}36}$
3. Deux chemins conviennent :

$$P(\text{exactement un pile}) = 0{,}6 \times 0{,}4 + 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24 + 0{,}24 = \boxed{0{,}48}$$

4. Par événement contraire (« aucun pile », soit $(F\,;F)$) :

$$P(\text{au moins un pile}) = 1 - 0{,}4 \times 0{,}4 = 1 - 0{,}16 = \boxed{0{,}84}$$

5. $0{,}36 + 0{,}24 + 0{,}24 + 0{,}16 = \boxed{1}$: la loi de probabilité est bien cohérente.

Probabilités conditionnelles et indépendance

EXERCICE 20 ⋆

1. L'élève étant choisi au hasard parmi 500 :

$$P(S) = \frac{290}{500} = \boxed{\frac{29}{50} = 0{,}58} \qquad P(D) = \frac{320}{500} = \boxed{\frac{16}{25} = 0{,}64}$$

2. La case commune à la ligne « demi-pensionnaires » et à la colonne « sport en club » contient 200 élèves :

$$P(D \cap S) = \frac{200}{500} = \boxed{\frac{2}{5} = 0{,}4}$$

3. **Par lecture du tableau :** on sait déjà que l'élève est demi-pensionnaire ; on se restreint donc à la ligne des 320 demi-pensionnaires, parmi lesquels 200 font du sport :

$$P_D(S) = \frac{200}{320} = \boxed{\frac{5}{8} = 0{,}625}$$

Par la formule du cours :

$$P_D(S) = \frac{P(D \cap S)}{P(D)} = \frac{0{,}4}{0{,}64} = \boxed{0{,}625}$$

On retrouve bien le même résultat.

4. Cette fois on se restreint à la colonne des 290 sportifs, dont 200 sont demi-pensionnaires :

$$P_S(D) = \frac{P(D \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}4}{0{,}58} = \frac{200}{290} = \boxed{\frac{20}{29} \approx 0{,}690}$$

On constate que $P_D(S) \neq P_S(D)$: ces deux nombres ne mesurent pas du tout la même chose. Le premier est la proportion de sportifs *parmi les demi-pensionnaires*, le second la proportion de demi-pensionnaires *parmi les sportifs*.

5. On compare $P_D(S)$ et $P(S)$:

$$P_D(S) = 0{,}625 \qquad \text{et} \qquad P(S) = 0{,}58$$

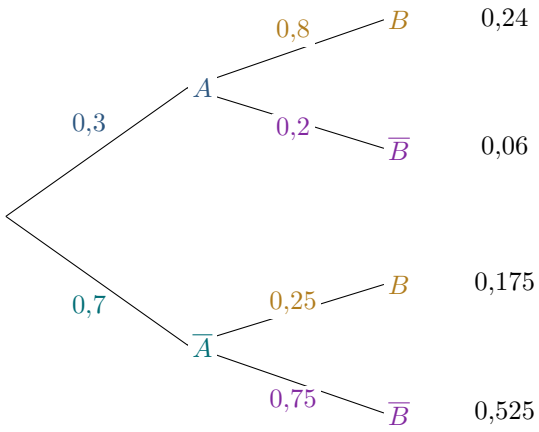
Ces deux nombres sont différents : savoir que l'élève est demi-pensionnaire modifie la probabilité qu'il fasse du sport, donc

$$\boxed{D \text{ et } S \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

Autre méthode : $P(D) \times P(S) = 0{,}64 \times 0{,}58 = 0{,}3712$, alors que $P(D \cap S) = 0{,}4$. Les deux nombres diffèrent, donc les événements ne sont pas indépendants.

EXERCICE 21 ⋆

1. La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut toujours 1. On obtient donc $1 - 0{,}3 = 0{,}7$ pour $\overline{A}$, puis $1 - 0{,}8 = 0{,}2$ et $1 - 0{,}25 = 0{,}75$.



2. Ce sont des probabilités portées par des branches du *second* niveau : ce sont donc des probabilités **conditionnelles**.

$$\boxed{0{,}8 = P_A(B) \qquad \text{et} \qquad 0{,}25 = P_{\overline{A}}(B)}$$

Autrement dit, 0,8 est la probabilité que B se réalise *sachant que* A est réalisé, et 0,25 la probabilité que B se réalise *sachant que* A ne l'est pas.

3. On multiplie les probabilités le long du chemin :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}3 \times 0{,}8 = \boxed{0{,}24}$$

$$P\left(\overline{A} \cap B\right) = P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B) = 0{,}7 \times 0{,}25 = \boxed{0{,}175}$$

4. L'événement B est réalisé par deux chemins de l'arbre, celui qui passe par A et celui qui passe par $\overline{A}$. Ces deux chemins étant incompatibles, on additionne :

$$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0{,}24 + 0{,}175 = \boxed{0{,}415}$$

5. On compare $P_A(B) = 0{,}8$ et $P(B) = 0{,}415$: ces nombres sont différents, donc

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

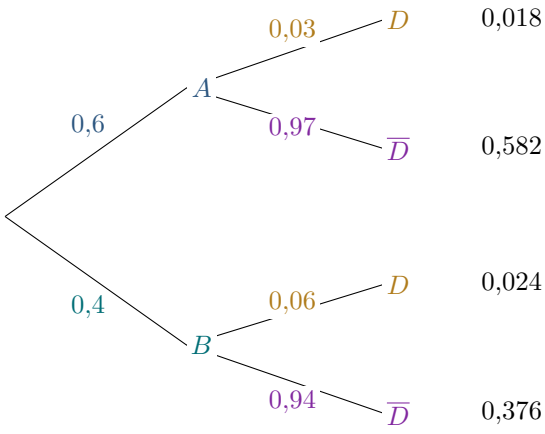
Vérification : $P(A) \times P(B) = 0{,}3 \times 0{,}415 = 0{,}1245 \neq 0{,}24 = P(A \cap B)$.

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. L'atelier A fabrique 60 % de la production, donc $P(A) = 0{,}6$ et $P(B) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$. Les pourcentages de pièces défectueuses sont donnés *à l'intérieur de chaque atelier* : ce sont des probabilités conditionnelles.

$$\boxed{P(A) = 0{,}6 \qquad P(B) = 0{,}4 \qquad P_A(D) = 0{,}03 \qquad P_B(D) = 0{,}06}$$

2.



3. $P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0{,}6 \times 0{,}03 = \boxed{0{,}018}$

4. $P(B \cap D) = P(B) \times P_B(D) = 0{,}4 \times 0{,}06 = \boxed{0{,}024}$

   Une pièce défectueuse provient soit de A, soit de B : ces deux cas sont incompatibles, donc

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0{,}018 + 0{,}024 = \boxed{0{,}042}$$

5. $0{,}042 = \dfrac{4{,}2}{100}$, donc les pièces défectueuses représentent $\boxed{4{,}2\,\%}$ de la production totale.

6. On sait maintenant que la pièce est défectueuse : on cherche $P_D(B)$.

$$P_D(B) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}024}{0{,}042} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7} \approx \boxed{0{,}57}$$

   Bien que l'atelier B fabrique moins de pièces que A, il produit plus de la moitié des pièces défectueuses, car son taux de défaut est deux fois plus élevé.

EXERCICE 23 ⋆⋆

On rappelle que A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

1. $P(A) \times P(B) = 0{,}4 \times 0{,}25 = 0{,}1$, et $P(A \cap B) = 0{,}1$. Les deux nombres sont égaux, donc

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants.}}$$

2. $P(C) \times P(D) = 0{,}5 \times 0{,}2 = 0{,}1$, alors que $P(C \cap D) = 0{,}15$. Les deux nombres sont différents, donc

$$\boxed{C \text{ et } D \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

3. Ici l'indépendance est donnée dans l'énoncé : on peut donc l'utiliser pour *calculer* l'intersection.

$$P(E \cap F) = P(E) \times P(F) = 0{,}3 \times 0{,}6 = \boxed{0{,}18}$$

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 0{,}3 + 0{,}6 - 0{,}18 = \boxed{0{,}72}$$

4. Le dé n'a pas de mémoire : le résultat du premier lancer ne modifie en rien les chances d'obtenir un 6 au second. Les événements U et V sont donc indépendants, et

$$P(U \cap V) = P(U) \times P(V) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{36}}$$

EXERCICE 24 ⋆⋆

1. **Fausse**. *Contre-exemple :* on lance un dé équilibré, $A = \{1\}$ et $B = \{2\}$. Ces événements sont incompatibles, donc $P(A \cap B) = 0$, alors que $P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \neq 0$. Ils ne sont donc pas indépendants. Incompatibilité et indépendance sont même des idées opposées : si A et B sont incompatibles, la réalisation de A interdit celle de B, ce qui est une très forte influence !
2. **Fausse**. *Contre-exemple :* avec les données de l'exercice 20, $P_D(S) = 0{,}625$ et $P_S(D) \approx 0{,}690$. *Énoncé correct :* $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ et $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$: le numérateur est le même, mais pas le dénominateur.
3. **Vraie**. C'est exactement la définition de l'indépendance de deux événements.
4. **Vraie**. Depuis un nœud donné, les branches décrivent toutes les possibilités, deux à deux incompatibles : leurs probabilités totalisent donc 1.
5. **Vraie**. Savoir que A est réalisé peut très bien *augmenter* les chances de B. *Exemple :* dans l'exercice 21, $P_A(B) = 0{,}8$ alors que $P(B) = 0{,}415$.
6. **Fausse**, en toute rigueur. *Contre-exemple :* on lance un dé truqué dont la face 1 ne sort jamais, c'est-à-dire $P(1) = 0$. Avec $A = \{1\,;2\}$ et $B = \{1\,;3\}$, on a $A \cap B = \{1\}$: les événements ne sont pas incompatibles, et pourtant $P(A \cap B) = P(1) = 0$.

   Remarque importante : dès que toutes les issues ont une probabilité non nulle (c'est en particulier le cas en situation d'équiprobabilité), l'affirmation devient vraie.

EXERCICE 25 ⋆⋆

On note R « la boule tirée est rouge » et V « la boule tirée est verte ». L'urne contient au départ 2 boules rouges et 3 boules vertes, soit 5 boules.

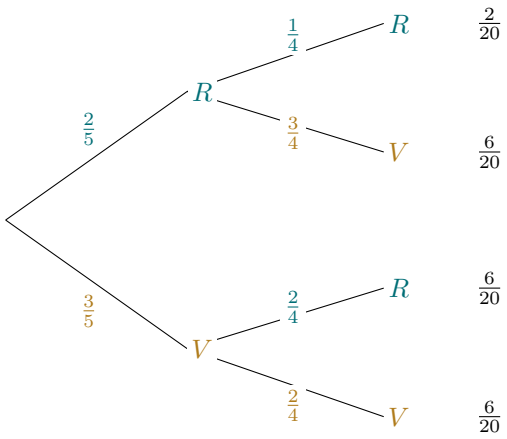
1. $P(R_1) = \boxed{\frac{2}{5}}$
2. **Si la première boule est rouge**, il reste dans l'urne 1 rouge et 3 vertes, soit 4 boules :

$$P_{R_1}(R_2) = \boxed{\frac{1}{4}}$$

   Si la première boule est verte, il reste 2 rouges et 2 vertes, soit 4 boules :

$$P_{V_1}(R_2) = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

3.



Attention : contrairement aux exercices précédents, les probabilités du second niveau **ne sont pas** les mêmes que celles du premier, puisque l'urne a changé de composition.

4. $P(\text{deux rouges}) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{20} = \boxed{\dfrac{1}{10}}$

5. Deux chemins conviennent, $(R\,;V)$ et $(V\,;R)$:

$$P(\text{exactement une rouge}) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{12}{20} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

6. **Avec remise**, l'urne est identique aux deux tirages et

$$P(\text{deux rouges}) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \boxed{\frac{4}{25} = 0{,}16}$$

alors que sans remise on avait $\dfrac{1}{10} = 0{,}1$. Les résultats sont donc différents :

sans remise, les deux tirages ne sont pas indépendants.

En effet, le premier tirage modifie le contenu de l'urne, donc les probabilités du second. Avec remise, en revanche, les deux tirages sont indépendants.

Exercices de synthèse

EXERCICE 26 ⋆⋆

1. On complète par différences : $600 - 350 = 250$ garçons ; $350 - 120 = 230$ filles sans sport ; $240 - 120 = 120$ garçons sportifs ; $250 - 120 = 130$ garçons sans sport.

	Sport en club	Pas de sport	Total
Filles	120	230	350
Garçons	120	130	250
Total	240	360	600

Vérification : $240 + 360 = 600$ et $350 + 250 = 600$.

2.

$$P(F) = \frac{350}{600} = \boxed{\frac{7}{12} \approx 0{,}583} \qquad P(S) = \frac{240}{600} = \boxed{\frac{2}{5} = 0{,}4} \qquad P(F \cap S) = \frac{120}{600} = \boxed{\frac{1}{5} = 0{,}2}$$

3. $$P(F \cup S) = P(F) + P(S) - P(F \cap S) = \frac{7}{12} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{35}{60} + \frac{24}{60} - \frac{12}{60} = \boxed{\frac{47}{60} \approx 0{,}783}$$

   Il y a environ 78,3 % de chances que l'élève choisi soit une fille **ou** pratique un sport en club (ou les deux).

4. $$P_F(S) = \frac{P(F \cap S)}{P(F)} = \frac{120}{350} = \boxed{\frac{12}{35} \approx 0{,}343}$$

   Parmi les filles du lycée, environ 34,3 % pratiquent un sport en club.

   $$P_S(F) = \frac{P(F \cap S)}{P(S)} = \frac{120}{240} = \boxed{\frac{1}{2} = 0{,}5}$$

   Parmi les élèves qui pratiquent un sport en club, exactement la moitié sont des filles.

5. On compare $P_F(S) \approx 0{,}343$ et $P(S) = 0{,}4$: ces nombres sont différents, donc

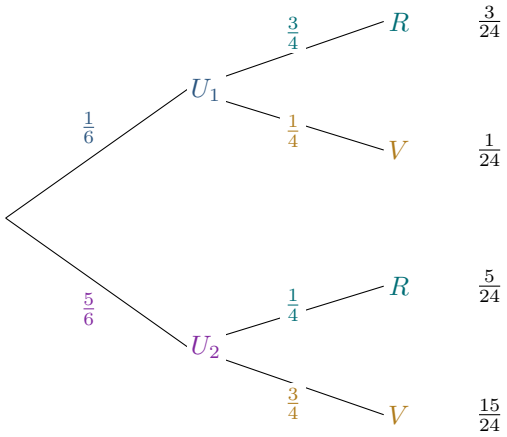
   $$\boxed{F \text{ et } S \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

   Autre méthode : $P(F) \times P(S) = \frac{7}{12} \times \frac{2}{5} = \frac{7}{30} \approx 0{,}233$, alors que $P(F \cap S) = 0{,}2$.

EXERCICE 27 ⋆⋆

On note U_1 « tirer dans l'urne U_1 », U_2 « tirer dans l'urne U_2 » et R « la boule tirée est rouge ».

1. Le dé est équilibré, donc $P(U_1) = \frac{1}{6}$ (on obtient 6) et $P(U_2) = \frac{5}{6}$. Chaque urne contient 4 boules : $P_{U_1}(R) = \frac{3}{4}$ et $P_{U_2}(R) = \frac{1}{4}$.



2. $P(U_1 \cap R) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{24} = \boxed{\frac{1}{8}}$

3. $P(U_2 \cap R) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{5}{24}}$

4. La boule rouge provient soit de U_1, soit de U_2, cas incompatibles :

   $$P(R) = \frac{3}{24} + \frac{5}{24} = \frac{8}{24} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

5. On sait maintenant que la boule est rouge :

$$P_R(U_1) = \frac{P(U_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{3}{24}}{\frac{8}{24}} = \boxed{\frac{3}{8} = 0{,}375}$$

Bien que l'urne U_1 soit riche en boules rouges, on y tire rarement (une fois sur six) : moins de 4 boules rouges sur 10 en proviennent.

EXERCICE 28 ⋆⋆

1. On lance quatre fois un dé équilibré. Les quatre lancers sont indépendants : le dé n'a pas de mémoire.

   (a) Cinq faces sur six ne sont pas des 6 :

   $$P(\text{pas de 6 à un lancer}) = \boxed{\frac{5}{6}}$$

   (b) On multiplie les probabilités le long du chemin de l'arbre « pas de 6 » répété quatre fois :

   $$P(\text{aucun 6}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \boxed{\frac{625}{1\,296} \approx 0{,}4823}$$

   (c) « Obtenir au moins un 6 » est l'événement contraire de « n'obtenir aucun 6 » :

   $$P(\text{au moins un 6}) = 1 - \frac{625}{1\,296} = \frac{671}{1\,296} \approx \boxed{0{,}5177}$$

2. On lance vingt-quatre fois deux dés équilibrés.

   (a) En lançant deux dés distinguables, il y a $6 \times 6 = 36$ issues équiprobables, et une seule donne un double 6 :

   $$P(\text{double 6}) = \boxed{\frac{1}{36}}$$

   (b) La probabilité de ne pas obtenir de double 6 à un lancer vaut $1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$. Les vingt-quatre lancers étant indépendants :

   $$P(\text{aucun double 6}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}5086$$

   $$P(\text{au moins un double 6}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx \boxed{0{,}4914}$$

3. On compare : $0{,}5177 > 0{,}5$ mais $0{,}4914 < 0{,}5$.

   Le chevalier de Méré avait tort : les deux paris ne sont pas équivalents.

   Le premier pari est légèrement *favorable* au joueur (un peu plus d'une chance sur deux), tandis que le second est légèrement *défavorable*. L'écart est faible, mais suffisant pour qu'un joueur assidu finisse par le remarquer… ce qui fut le cas du chevalier, dont la question posée à Pascal est à l'origine du calcul des probabilités.

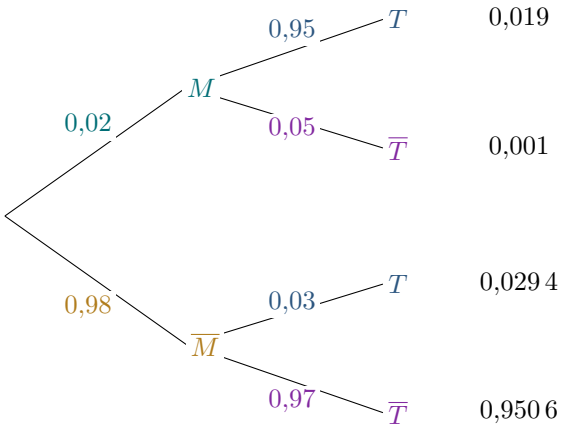
EXERCICE 29 ⋆⋆

1. **Réponse B.** Les multiples de 3 sur un dé sont 3 et 6, donc $P = \dfrac{2}{6} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$.
2. **Réponse A.** $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}7 = \boxed{0{,}3}$. Une probabilité ne peut être ni négative, ni supérieure à 1 : les réponses B et C étaient donc à écarter immédiatement.
3. **Réponse B.** Comme A et B sont incompatibles, $P(A \cap B) = 0$ et
$$P(A \cup B) = 0{,}2 + 0{,}5 - 0 = \boxed{0{,}7}$$
4. **Réponse B.** Par définition, $P_A(B) = \boxed{\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}}$: on divise par la probabilité de l'événement *déjà réalisé*, celui qui est écrit en indice.
5. **Réponse B.** Comme A et B sont indépendants, $P(A \cap B) = 0{,}4 \times 0{,}5 = \boxed{0{,}2}$.
6. **Réponse C.** Le contraire est « aucun pile », de probabilité $\dfrac{1}{4}$, donc
$$P(\text{au moins un pile}) = 1 - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

EXERCICE 30 ⋆⋆⋆

1. 2 % de la population est malade, donc $P(M) = 0{,}02$ et $P\left(\overline{M}\right) = 0{,}98$. Les deux autres données concernent des sous-populations : ce sont des probabilités conditionnelles.

$$\boxed{P(M) = 0{,}02 \qquad P_M(T) = 0{,}95 \qquad P_{\overline{M}}(T) = 0{,}03}$$



2.
$$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}02 \times 0{,}95 = \boxed{0{,}019}$$
$$P\left(\overline{M} \cap T\right) = P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(T) = 0{,}98 \times 0{,}03 = \boxed{0{,}029\,4}$$
3. Un test positif concerne soit un malade, soit une personne saine :
$$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0{,}019 + 0{,}029\,4 = \boxed{0{,}048\,4}$$
4. On sait maintenant que le test est positif :
$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}019}{0{,}048\,4} \approx \boxed{0{,}393}$$

5. Ce résultat est surprenant : le test paraît très fiable (95 % de détection), et pourtant moins de 40 % des personnes testées positives sont réellement malades.

   L'explication tient au nombre de personnes concernées. Sur 10 000 habitants :

   - 200 sont malades, dont $200 \times 0{,}95 = 190$ sont testées positives ;
   - 9 800 sont saines, et même avec seulement 3 % d'erreurs, $9\,800 \times 0{,}03 = 294$ d'entre elles sont testées positives.

   Il y a donc $190 + 294 = 484$ tests positifs, dont seulement 190 correspondent à de vrais malades : $\dfrac{190}{484} \approx 0{,}393$. Les personnes saines étant *très* nombreuses, leurs rares erreurs de test sont plus nombreuses que les vrais malades détectés.

Un test positif doit donc toujours être confirmé par un second examen.