# EXERCICES – CHAPITRE 3

## PROBABILITÉS

### Vocabulaire et événements

**EXERCICE 1** ⋆

Pour chacune des expériences suivantes, dire s'il s'agit d'une expérience aléatoire. Si c'est le cas, décrire l'univers $\Omega$ et préciser le nombre d'issues.

1. On lance un dé équilibré à douze faces numérotées de 1 à 12.
2. On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes bien mélangé.
3. On mesure la taille d'un élève de la classe choisi au hasard.
4. On lance une pièce équilibrée deux fois de suite et on note les deux résultats dans l'ordre.
5. On fait tourner une roue partagée en huit secteurs identiques numérotés de 1 à 8.
6. On choisit au hasard une lettre du mot PROBABILITE.

**EXERCICE 2** ⋆

On lance un dé équilibré à six faces. On considère les événements :

$A$ : « obtenir un nombre pair » $\quad$ $B$ : « obtenir un nombre supérieur ou égal à 5 »

$C$ : « obtenir un multiple de 3 » $\quad$ $D$ : « obtenir un nombre inférieur à 2 »

$E$ : « obtenir un nombre premier »

1. Écrire chacun de ces cinq événements sous la forme d'une liste d'issues.
2. Déterminer de même $\overline{A}$ et $\overline{E}$.
3. Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $A \cap C$, $A \cap E$ et $C \cup E$.
4. Décrire par une phrase les événements $A \cap C$ et $A \cap E$.
5. Parmi les couples $(A\,;B)$, $(A\,;D)$, $(B\,;C)$ et $(D\,;E)$, lesquels sont formés d'événements incompatibles ?
6. Les événements $D$ et $E$ sont-ils contraires l'un de l'autre ? Justifier.

**EXERCICE 3** ⋆

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements :

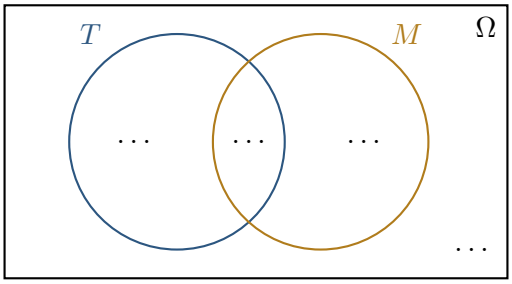
$R$ : « la carte est un roi » $\quad$ $C$ : « la carte est un cœur » $\quad$ $F$ : « la carte est une figure »

(on rappelle que les figures sont les valets, les dames et les rois).

1. Décrire par une phrase les événements $R \cap C$, $R \cup C$ et $\overline{R}$.
2. Combien de cartes composent chacun des événements $R$, $C$, $F$, $R \cap C$, $R \cup C$ et $C \cap F$ ?
3. Les événements $R$ et $C$ sont-ils incompatibles ? Et les événements $R$ et « la carte est un as » ?
4. Justifier que toutes les issues de $R$ appartiennent aussi à $F$. Que vaut alors $R \cap F$ ?

### EXERCICE 4 ⋆

Dans une classe de 40 élèves, 18 suivent l'option théâtre, 12 suivent l'option musique, et 5 suivent les deux options. On choisit un élève au hasard, et on note $T$ l'événement « l'élève suit l'option théâtre » et $M$ l'événement « l'élève suit l'option musique ».




1. Recopier et compléter le diagramme ci-dessus avec les effectifs correspondants.
2. Calculer $P(T)$, $P(M)$ et $P(T \cap M)$.
3. Calculer $P(T \cup M)$ de deux façons : par lecture du diagramme, puis à l'aide de la formule du cours.
4. Calculer $P\left(\overline{T}\right)$, puis la probabilité que l'élève choisi ne suive aucune des deux options.

### EXERCICE 5 ⋆

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est fausse, donner un contre-exemple ou l'énoncé correct.

1. La probabilité d'un événement peut valoir $1,2$.
2. Deux événements contraires sont toujours incompatibles.
3. Deux événements incompatibles sont toujours contraires l'un de l'autre.
4. L'événement $A \cup B$ contient aussi les issues qui réalisent à la fois $A$ et $B$.
5. Si $A$ et $B$ sont incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
6. Si un événement a une probabilité égale à 1, il se produit à coup sûr.

## Lois de probabilité

### EXERCICE 6 ⋆

On lance un dé truqué à six faces. Après un très grand nombre de lancers, on a établi la loi de probabilité suivante :

| Issue | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité | $0,05$ | $0,15$ | $0,2$ | $0,2$ | $0,1$ | $a$ |

1. Déterminer la valeur de $a$.
2. Ce dé est-il équilibré ? Justifier.
3. Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair.
4. Calculer la probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 4, puis celle d'obtenir un nombre strictement inférieur à 4. Que remarque-t-on ?

### EXERCICE 7 ⋆

Une roue de loterie est partagée en dix secteurs identiques : cinq sont rouges, trois sont verts et deux sont bleus. On fait tourner la roue et on note la couleur du secteur obtenu.

1. Justifier que l'on est en situation d'équiprobabilité pour les dix secteurs, puis donner la loi de probabilité de la couleur obtenue sous forme d'un tableau.
2. Vérifier que la somme des probabilités vaut 1.
3. Calculer la probabilité d'obtenir un secteur rouge ou bleu, de deux façons différentes.
4. Exprimer chacune de ces probabilités en pourcentage.

### EXERCICE 8 ⋆⋆

Pour tester un dé, on le lance 1 000 fois et on relève les effectifs suivants :

| Face | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 98 | 171 | 165 | 159 | 172 | 235 |

1. Vérifier que le total des effectifs est bien 1 000, puis calculer la fréquence de chaque face.
2. Quelle serait la probabilité de chaque face si le dé était équilibré ? Comparer.
3. Ce dé semble-t-il truqué ? Si oui, en faveur de quelle face ?
4. On admet que les fréquences observées constituent une bonne estimation de la loi de probabilité du dé. Estimer alors la probabilité d'obtenir un nombre pair.

### EXERCICE 9 ⋆

Une enquête menée auprès des 400 élèves d'un collège porte sur leur mode de transport : 45 % viennent en bus, 20 % à vélo, 25 % en voiture, et les autres à pied. On choisit un élève au hasard.

1. Quelle est la probabilité que l'élève vienne à pied ?
2. Présenter la loi de probabilité dans un tableau, et vérifier que la somme vaut 1.
3. Calculer la probabilité que l'élève vienne en bus ou à vélo.
4. Calculer la probabilité que l'élève ne vienne pas en voiture.
5. Combien d'élèves viennent à vélo ?

## Équiprobabilité et calculs de probabilités

### EXERCICE 10 ⋆

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes bien mélangé. Calculer la probabilité des événements suivants, en donnant le résultat sous forme de fraction irréductible :

a) la carte est un cœur ;
b) la carte est un roi ;
c) la carte est une figure ;
d) la carte est le roi de cœur ;
e) la carte est un cœur ou un roi ;
f) la carte n'est ni un cœur ni un roi.

## EXERCICE 11 ⋆

Une urne contient 20 jetons indiscernables au toucher, numérotés de 1 à 20. On en tire un au hasard.

1. Calculer la probabilité que le numéro soit pair.
2. Calculer la probabilité que le numéro soit un multiple de 3.
3. Calculer la probabilité que le numéro soit à la fois pair et multiple de 3.
4. En déduire la probabilité que le numéro soit pair ou multiple de 3.
5. Calculer la probabilité que le numéro soit un nombre premier.

## EXERCICE 12 ⋆

Un sac contient 12 bonbons à la fraise, 8 au citron et 5 à la menthe, tous de même forme. On en tire un au hasard.

1. Justifier que l'on est en situation d'équiprobabilité, et préciser le nombre d'issues.
2. Calculer la probabilité de tirer un bonbon à la fraise.
3. Calculer la probabilité de ne pas tirer un bonbon à la menthe, de deux façons différentes.
4. Calculer la probabilité de tirer un bonbon à la fraise ou au citron.

## EXERCICE 13 ⋆⋆

1. Soient $A$ et $B$ deux événements tels que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,35$ et $P(A \cap B) = 0,15$.
   (a) Calculer $P(A \cup B)$.
   (b) Calculer $P\left(\overline{A}\right)$.
   (c) En déduire la probabilité que ni $A$ ni $B$ ne se réalise.
2. Soient $C$ et $D$ deux événements tels que $P(C) = 0,5$, $P(D) = 0,3$ et $P(C \cup D) = 0,7$.
   (a) Calculer $P(C \cap D)$.
   (b) Les événements $C$ et $D$ sont-ils incompatibles ? Justifier.

## EXERCICE 14 ⋆⋆

À la sortie d'un cinéma, on interroge 250 spectateurs. Parmi eux, on compte 120 hommes, dont 45 portent des lunettes, et 65 femmes portant des lunettes. On choisit un spectateur au hasard.

1. Recopier et compléter le tableau à double entrée suivant :

| | Lunettes | Pas de lunettes | Total |
|---|---|---|---|
| Hommes | 45 | | 120 |
| Femmes | 65 | | |
| Total | | | 250 |

2. Calculer la probabilité que le spectateur soit une femme.
3. Calculer la probabilité qu'il porte des lunettes.
4. Calculer la probabilité que ce soit une femme portant des lunettes.
5. En déduire la probabilité que ce soit une femme ou une personne portant des lunettes.

## Expériences à plusieurs étapes

### EXERCICE 15 ⋆

On lance deux fois de suite une pièce équilibrée, et on note les résultats dans l'ordre.

1. Représenter l'expérience par un arbre, et en déduire le nombre d'issues.
2. Justifier que les quatre issues sont équiprobables, et donner la probabilité de chacune.
3. Calculer la probabilité d'obtenir deux fois « pile ».
4. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois « pile ».
5. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois « pile », en utilisant l'événement contraire.

### EXERCICE 16 ⋆

Une urne contient quatre boules jaunes et une boule noire, indiscernables au toucher. On tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne, puis on en tire une seconde.

1. Justifier que les deux tirages se déroulent dans les mêmes conditions.
2. Représenter l'expérience par un arbre pondéré.
3. Calculer la probabilité de chacune des quatre issues, et vérifier que la somme vaut 1.
4. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules jaunes.
5. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une boule noire.
6. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule noire.

### EXERCICE 17 ⋆⋆

On lance trois fois de suite une pièce équilibrée.

1. Représenter l'expérience par un arbre à trois niveaux. Combien y a-t-il d'issues ?
2. Calculer la probabilité d'obtenir trois fois « face ».
3. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux fois « pile ».
4. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois « pile ».
5. Calculer la probabilité d'obtenir trois résultats identiques.

### EXERCICE 18 ⋆⋆

On lance deux dés équilibrés à six faces, l'un rouge et l'autre vert, et on s'intéresse au produit des deux résultats.

1. Recopier et compléter le tableau à double entrée donnant le produit obtenu, puis préciser le nombre d'issues de l'expérience.

| Rouge \ Vert | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | | | | |
| 2 | 2 | 4 | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | 36 |

2. Calculer la probabilité que le produit soit égal à 6.
3. Calculer la probabilité que le produit soit égal à 12. Comparer avec la question précédente.
4. Calculer la probabilité que le produit soit impair, puis en déduire la probabilité qu'il soit pair.
5. Calculer la probabilité que le produit soit supérieur ou égal à 20.
6. Calculer la probabilité que le produit soit un multiple de 5.
7. Quel est le produit le plus probable ?

### EXERCICE 19 ⋆⋆

Une pièce est truquée : la probabilité d'obtenir « pile » vaut $0,6$. On lance cette pièce deux fois de suite, les deux lancers étant indépendants.

1. Représenter l'expérience par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité d'obtenir deux fois « pile ».
3. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois « pile ».
4. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois « pile ».
5. Vérifier que la somme des probabilités des quatre issues vaut 1.

## Probabilités conditionnelles et indépendance

### EXERCICE 20 ⋆

Dans un lycée de 500 élèves, on relève le régime des élèves et leur pratique d'un sport en club :

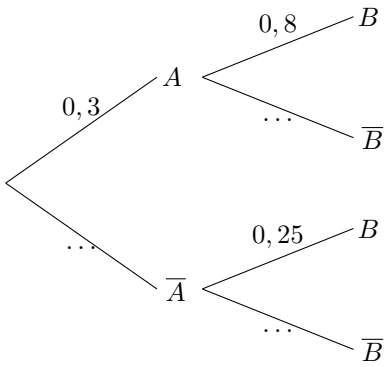
| | Sport en club | Pas de sport | Total |
|---|---|---|---|
| Demi-pensionnaires | 200 | 120 | 320 |
| Externes | 90 | 90 | 180 |
| Total | 290 | 210 | 500 |

On choisit un élève au hasard. On note $S$ l'événement « l'élève pratique un sport en club » et $D$ l'événement « l'élève est demi-pensionnaire ».

1. Calculer $P(S)$ et $P(D)$.
2. Calculer $P(D \cap S)$.
3. L'élève choisi est demi-pensionnaire. Quelle est la probabilité qu'il pratique un sport en club ? On calculera $P_D(S)$ par lecture du tableau, puis à l'aide de la formule du cours.
4. Calculer $P_S(D)$. Comparer avec la question précédente et commenter.
5. Les événements $D$ et $S$ sont-ils indépendants ? Justifier.

## EXERCICE 21 ⋆

On considère l'arbre pondéré incomplet suivant, où $A$ et $B$ sont deux événements :




1. Recopier et compléter l'arbre. Quelle règle permet de trouver les probabilités manquantes ?
2. Que représentent les nombres $0,8$ et $0,25$ ? Les écrire avec les notations du cours.
3. Calculer $P(A \cap B)$, puis $P\left(\overline{A} \cap B\right)$.
4. En déduire $P(B)$.
5. Les événements $A$ et $B$ sont-ils indépendants ?

## EXERCICE 22 ⋆⋆

Une usine possède deux ateliers. L'atelier $A$ fabrique 60 % de la production, et 3 % de ses pièces sont défectueuses. L'atelier $B$ fabrique le reste de la production, et 6 % de ses pièces sont défectueuses. On prélève une pièce au hasard dans la production, et on note $D$ l'événement « la pièce est défectueuse ».

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide des notations $P(A)$, $P_A(D)$ et $P_B(D)$.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Calculer la probabilité que la pièce provienne de l'atelier $A$ et soit défectueuse.
4. Calculer de même $P(B \cap D)$, puis en déduire $P(D)$.
5. Quel pourcentage de la production totale les pièces défectueuses représentent-elles ?
6. La pièce prélevée est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'atelier $B$ ? Arrondir au centième.

## EXERCICE 23 ⋆⋆

1. Soient $A$ et $B$ deux événements tels que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,25$ et $P(A \cap B) = 0,1$. Les événements $A$ et $B$ sont-ils indépendants ?
2. Soient $C$ et $D$ deux événements tels que $P(C) = 0,5$, $P(D) = 0,2$ et $P(C \cap D) = 0,15$. Les événements $C$ et $D$ sont-ils indépendants ?
3. Soient $E$ et $F$ deux événements *indépendants* tels que $P(E) = 0,3$ et $P(F) = 0,6$. Calculer $P(E \cap F)$, puis $P(E \cup F)$.
4. On lance deux fois un dé équilibré. On note $U$ l'événement « le premier lancer donne un 6 » et $V$ l'événement « le second lancer donne un 6 ». Justifier que $U$ et $V$ sont indépendants, puis calculer $P(U \cap V)$.

### EXERCICE 24 ⋆⋆

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

1. Si deux événements sont incompatibles, alors ils sont indépendants.
2. Pour tous événements $A$ et $B$, on a $P_A(B) = P_B(A)$.
3. Si $A$ et $B$ sont indépendants, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
4. Sur un arbre pondéré, la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut toujours 1.
5. La probabilité $P_A(B)$ peut être strictement supérieure à $P(B)$.
6. Si $P(A \cap B) = 0$, alors les événements $A$ et $B$ sont incompatibles.

### EXERCICE 25 ⋆⋆

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux rouges et trois vertes. On tire successivement deux boules, **sans** remettre la première dans l'urne.

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge ?
2. La première boule tirée est rouge. Quelle est alors la probabilité que la seconde le soit aussi ? Et si la première est verte ?
3. Représenter la situation par un arbre pondéré.
4. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges.
5. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une boule rouge.
6. Reprendre la question 4. dans le cas où la première boule est remise dans l'urne. Les résultats sont-ils les mêmes ? Que peut-on en conclure sur l'indépendance des deux tirages ?

## Exercices de synthèse

### EXERCICE 26 ⋆⋆

Dans un lycée de 600 élèves, on compte 350 filles. Par ailleurs, 240 élèves pratiquent un sport en club, dont 120 filles. On choisit un élève au hasard, et on note $F$ l'événement « l'élève est une fille » et $S$ l'événement « l'élève pratique un sport en club ».

1. Recopier et compléter le tableau à double entrée suivant :

| | Sport en club | Pas de sport | Total |
|---|---|---|---|
| Filles | 120 | | 350 |
| Garçons | | | |
| Total | 240 | | 600 |

2. Calculer $P(F)$, $P(S)$ et $P(F \cap S)$.
3. En déduire $P(F \cup S)$, et interpréter ce résultat par une phrase.
4. Calculer $P_F(S)$ et $P_S(F)$. Interpréter chacun de ces deux nombres par une phrase.
5. Les événements $F$ et $S$ sont-ils indépendants ? Justifier par un calcul.

## EXERCICE 27 ⋆⋆

On dispose d'un dé équilibré à six faces et de deux urnes :

- l'urne $U_1$ contient trois boules rouges et une boule verte ;
- l'urne $U_2$ contient une boule rouge et trois boules vertes.

On lance le dé : si l'on obtient un 6, on tire une boule dans l'urne $U_1$, sinon on tire une boule dans l'urne $U_2$.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité de tirer une boule rouge de l'urne $U_1$.
3. Calculer de même la probabilité de tirer une boule rouge de l'urne $U_2$.
4. En déduire la probabilité de tirer une boule rouge.
5. On a tiré une boule rouge. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne $U_1$ ?

## EXERCICE 28 ⋆⋆

*Le pari du chevalier de Méré.* Au XVII$^{\text{e}}$ siècle, le chevalier de Méré soutenait qu'il était avantageux de parier sur l'apparition d'un 6 en lançant quatre fois un dé, mais qu'il fallait vingt-quatre lancers de deux dés pour obtenir un double 6 avec les mêmes chances.

1. On lance quatre fois un dé équilibré.
   (a) Quelle est la probabilité de ne pas obtenir de 6 lors d'un lancer ?
   (b) En déduire la probabilité de n'obtenir aucun 6 au cours des quatre lancers.
   (c) En déduire la probabilité d'obtenir au moins un 6. Arrondir à $10^{-4}$.
2. On lance maintenant vingt-quatre fois deux dés équilibrés.
   (a) Justifier que la probabilité d'obtenir un double 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{36}$.
   (b) En déduire la probabilité d'obtenir au moins un double 6 au cours des vingt-quatre lancers. Arrondir à $10^{-4}$.
3. Comparer les deux probabilités obtenues. Le chevalier de Méré avait-il raison ?

## EXERCICE 29 ⋆⋆

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Déterminer laquelle et justifier.

| | **Réponse A** | **Réponse B** | **Réponse C** |
|---|---|---|---|
| 1. On lance un dé équilibré. La probabilité d'obtenir un multiple de 3 vaut | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |
| 2. Si $P(A) = 0,7$, alors $P\left(\overline{A}\right)$ vaut | $0,3$ | $-0,7$ | $1,7$ |
| 3. Si $A$ et $B$ sont incompatibles avec $P(A) = 0,2$ et $P(B) = 0,5$, alors $P(A \cup B)$ vaut | $0,1$ | $0,7$ | $0,6$ |
| 4. La probabilité de $B$ sachant $A$ vaut | $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ | $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ | $P(A) \times P(B)$ |
| 5. Si $A$ et $B$ sont indépendants avec $P(A) = 0,4$ et $P(B) = 0,5$, alors $P(A \cap B)$ vaut | $0,9$ | $0,2$ | $0$ |
| 6. On lance deux fois une pièce équilibrée. La probabilité d'obtenir au moins un « pile » vaut | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ |

## EXERCICE 30 ⋆⋆⋆

Une maladie touche 2 % de la population d'une région. Un test de dépistage a été mis au point :

- si une personne est malade, le test est positif dans 95 % des cas ;
- si une personne n'est pas malade, le test est tout de même positif dans 3 % des cas.

On choisit une personne au hasard dans la population. On note $M$ l'événement « la personne est malade » et $T$ l'événement « le test est positif ».

1. Traduire les données de l'énoncé avec les notations du cours, puis représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer $P(M \cap T)$ et $P\left(\overline{M} \cap T\right)$.
3. En déduire $P(T)$, la probabilité que le test soit positif.
4. Le test d'une personne est positif. Calculer la probabilité qu'elle soit réellement malade. Arrondir à $10^{-3}$.
5. Le résultat précédent vous semble-t-il surprenant ? Expliquer, en comparant le nombre de malades au nombre de personnes saines dans cette région.