CORRIGÉ – CHAPITRE 4

ÉQUATIONS

Vocabulaire et vérification

EXERCICE 1 ⋆

Équation	Inconnue	Premier membre	Second membre
a) $4x+7=19$	x	$4x+7$	19
b) $3-2t=t+6$	t	$3-2t$	$t+6$
c) $y^2-1=8$	y	y^2-1	8
d) $5(z+2)=3z$	z	$5(z+2)$	$3z$

On remarque que l'inconnue n'est pas toujours notée x : c'est la lettre qui figure dans l'équation, quelle qu'elle soit. Le premier membre est ce qui se trouve **à gauche** du signe $=$, le second ce qui se trouve à droite.

EXERCICE 2 ⋆

Méthode : on calcule séparément les deux membres, puis on compare.

1. $3x-5=7$
   - $x=4$: premier membre $3\times 4-5=7$; second membre 7. Égalité vraie : $\boxed{4 \text{ est solution.}}$
   - $x=-4$: $3\times(-4)-5=-17\neq 7$. $\boxed{-4 \text{ n'est pas solution.}}$
   - $x=2$: $3\times 2-5=1\neq 7$. $\boxed{2 \text{ n'est pas solution.}}$
2. $x^2-x=6$
   - $x=3$: $3^2-3=9-3=6$. $\boxed{3 \text{ est solution.}}$
   - $x=-2$: $(-2)^2-(-2)=4+2=6$. $\boxed{-2 \text{ est solution.}}$
   - $x=2$: $2^2-2=2\neq 6$. $\boxed{2 \text{ n'est pas solution.}}$

   Attention aux signes : $(-2)^2=4$ et non -4, et $-(-2)=+2$.
3. $(x-1)(x+4)=0$
   - $x=1$: $(1-1)(1+4)=0\times 5=0$. $\boxed{1 \text{ est solution.}}$
   - $x=-4$: $(-4-1)(-4+4)=(-5)\times 0=0$. $\boxed{-4 \text{ est solution.}}$
   - $x=4$: $(4-1)(4+4)=3\times 8=24\neq 0$. $\boxed{4 \text{ n'est pas solution.}}$
4. $\dfrac{2x+3}{x-5}=0$
   - $x=5$: le dénominateur vaut $5-5=0$, donc le quotient n'existe pas.

     $\boxed{5 \text{ n'est pas solution : c'est la valeur interdite.}}$
   - $x=-\frac{3}{2}$: le numérateur vaut $2\times\left(-\frac{3}{2}\right)+3=0$ et le dénominateur $-\frac{3}{2}-5=-\frac{13}{2}\neq 0$, donc le quotient vaut 0. $\boxed{-\dfrac{3}{2} \text{ est solution.}}$

- $x = 0$: le quotient vaut $\dfrac{3}{-5} \neq 0$. $\boxed{0 \text{ n'est pas solution.}}$

5. $2(x+3) = 2x+6$
   - $x = 0$: $2 \times 3 = 6$ et 6. Égalité vraie.
   - $x = 7$: $2 \times 10 = 20$ et $14 + 6 = 20$. Égalité vraie.
   - $x = -11$: $2 \times (-8) = -16$ et $-22 + 6 = -16$. Égalité vraie.

   $\boxed{\text{Les trois nombres sont solutions.}}$

   En développant le premier membre, on obtient $2x+6$: les deux membres sont *identiques*. Cette égalité est donc vraie pour **tout** nombre, et pas seulement pour ceux que l'on a testés.

EXERCICE 3 ⋆

1. **Vraie**. C'est le premier point de la propriété 1 du cours : c'est le principe de la balance, on fait subir le même traitement aux deux plateaux.
2. **Fausse**. La propriété exige de multiplier par un nombre **non nul**. *Contre-exemple :* l'équation $x = 3$ a pour unique solution 3 ; en multipliant les deux membres par 0, on obtient $0 = 0$, qui est vraie pour tout nombre. Les solutions ont donc changé.
3. **Fausse**. Diviser par x suppose que x n'est pas nul, ce que l'on ignore justement. *Contre-exemple :* $5x = 3x$ a pour unique solution 0 ; en divisant par x, on obtiendrait $5 = 3$ et l'on conclurait à tort qu'il n'y a pas de solution.
4. **Fausse**. C'est au contraire une situation prévue par le cours. *Énoncé correct :* lorsque l'inconnue disparaît, il faut regarder l'égalité restante — si elle est vraie, tous les réels sont solutions ; si elle est fausse, il n'y en a aucune.
5. **Fausse**. *Contre-exemple :* $2x + 5 = 2x + 1$ n'a aucune solution, et $3(x+2) = 3x+6$ en a une infinité.
6. **Fausse**. Vérifier prouve qu'un nombre *est* solution, mais ne dit rien des autres. *Contre-exemple :* 4 est solution de $x^2 = 16$, mais -4 l'est aussi. C'est précisément pour cela qu'il faut une méthode de résolution.

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

EXERCICE 4 ⋆

Détaillons entièrement la première, à la manière du cours : à droite de chaque ligne figure, en rouge, l'opération effectuée sur les deux membres.

$$\begin{aligned} x + 7 &= 12 && \text{on retranche 7 aux deux membres} \\ x + 7 - 7 &= 12 - 7 && \text{le } +7 \text{ disparaît à gauche} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

$$\boxed{S = \{5\}}$$

Vérification : $5 + 7 = 12$.

On procède de la même manière pour les suivantes.

b) $x - 4 = 9 \iff x = 9 + 4 \iff \boxed{x = 13}$

c) $3x = 21 \iff x = \dfrac{21}{3} \iff \boxed{x = 7}$

d) $-5x = 35 \iff x = \dfrac{35}{-5} \iff \boxed{x = -7}$

e) $\dfrac{x}{4} = 3 \iff x = 3 \times 4 \iff \boxed{x = 12}$

f) $2x+5=17 \iff 2x=12 \iff \boxed{x=6}$

g) $4x-9=11 \iff 4x=20 \iff \boxed{x=5}$

h) $-3x+2=14 \iff -3x=12 \iff \boxed{x=-4}$

i) $6x+4=4 \iff 6x=0 \iff \boxed{x=0}$

j) $5-2x=11 \iff -2x=6 \iff \boxed{x=-3}$

k) $4x+1=6 \iff 4x=5 \iff \boxed{x=\dfrac{5}{4}}$

l) $10-6x=3 \iff -6x=-7 \iff \boxed{x=\dfrac{7}{6}}$

Piège classique (question i) : de $6x=0$ on tire $x=0$, et non « pas de solution ». Le nombre 0 est une solution comme une autre.

Sur les deux dernières : rien n'oblige une solution à être entière. On laisse alors le résultat sous forme de **fraction irréductible**, et surtout pas en écriture décimale approchée.

EXERCICE 5 ⋆

Méthode : on regroupe les termes en x dans un membre et les nombres seuls dans l'autre. Détaillons la première :

$$\begin{array}{rcll} 7x-5 & = & 4x+7 & \text{on retranche } 4x \text{ aux deux membres} \\ 3x-5 & = & 7 & \text{on ajoute } 5 \text{ aux deux membres} \\ 3x & = & 12 & \text{on divise les deux membres par } 3 \\ x & = & 4 & \end{array}$$

$$\boxed{S=\{4\}}$$

b) $6x+1=2x+13 \iff 4x=12 \iff \boxed{x=3}$

c) $9x-4=5x+16 \iff 4x=20 \iff \boxed{x=5}$

d) $2x+8=5x-10 \iff 18=3x \iff \boxed{x=6}$

e) $10-x=3x-6 \iff 16=4x \iff \boxed{x=4}$

f) $-2x+5=4x-7 \iff 12=6x \iff \boxed{x=2}$

g) $3x-8=8x+7 \iff -15=5x \iff \boxed{x=-3}$

h) $x+9=5x+1 \iff 8=4x \iff \boxed{x=2}$

i) $4x+3=6x+3 \iff 0=2x \iff \boxed{x=0}$

j) $11-2x=5-5x \iff 3x=-6 \iff \boxed{x=-2}$

k) $5x-1=3x+6 \iff 2x=7 \iff \boxed{x=\dfrac{7}{2}}$

l) $4x+7=6x+2 \iff 5=2x \iff \boxed{x=\dfrac{5}{2}}$

On remarque que pour les questions d), e), f), g) et l), il était plus commode de regrouper l'inconnue dans le **second** membre : on évite ainsi de manipuler un coefficient négatif.

EXERCICE 6 ⋆

a) $3(x+2)=15 \iff 3x+6=15 \iff 3x=9 \iff \boxed{x=3}$

b) $4(x-3)=8 \iff 4x-12=8 \iff 4x=20 \iff \boxed{x=5}$

c) $2(3x-1)=16 \iff 6x-2=16 \iff 6x=18 \iff \boxed{x=3}$

d) $5(2x+3)=55 \iff 10x+15=55 \iff 10x=40 \iff \boxed{x=4}$

e) $3(x+4)=5x-2 \iff 3x+12=5x-2 \iff 14=2x \iff \boxed{x=7}$

f) $2(x-5)=3(x-4) \iff 2x-10=3x-12 \iff 2=x \iff \boxed{x=2}$

g) $5(x+1)-2(x-3)=20 \iff 5x+5-2x+6=20 \iff 3x+11=20 \iff 3x=9 \iff \boxed{x=3}$
Piège classique : le signe $-$ devant $2(x-3)$ porte sur les **deux** termes, ce qui donne $-2x+\mathbf{6}$ et non $-2x-6$.

h) $4(2x-1)-3(x+2)=5 \iff 8x-4-3x-6=5 \iff 5x-10=5 \iff \boxed{x=3}$

i) $-2(x-3) = 4(1-x) \iff -2x+6 = 4-4x \iff 2x = -2 \iff \boxed{x = -1}$

j) $3(2x-5)+4 = 5(x-1) \iff 6x-15+4 = 5x-5 \iff 6x-11 = 5x-5 \iff \boxed{x = 6}$

Les six dernières demandent une double distributivité dans chaque membre. Détaillons la première :

$$\begin{array}{rcll} (x+1)(x+5) & = & (x+2)(x+3) & \text{on développe les deux membres} \\ x^2+5x+x+5 & = & x^2+3x+2x+6 & \text{on réduit chaque membre} \\ x^2+6x+5 & = & x^2+5x+6 & \text{on retranche } x^2 \text{ aux deux membres} \\ 6x+5 & = & 5x+6 & \text{on retranche } 5x \text{ puis } 5 \\ x & = & 1 & \end{array}$$

$$\boxed{S = \{1\}}$$

Ce sont bien les termes en x^2 qui disparaissent, laissant une équation du premier degré. Le reste s'obtient de la même manière.

l) $(2x+1)(x+3) = (2x-1)(x+5) \iff 2x^2+7x+3 = 2x^2+9x-5 \iff 8 = 2x \iff \boxed{x = 4}$

m) $(x+1)(x+8) = (x+4)(x+2) \iff x^2+9x+8 = x^2+6x+8 \iff 3x = 0 \iff \boxed{x = 0}$

n) $(2x+1)(x-1) = (x+2)(2x-3) \iff 2x^2-x-1 = 2x^2+x-6 \iff 5 = 2x \iff \boxed{x = \frac{5}{2}}$

o) $(x+3)(x-2) = (x+1)(x-4) \iff x^2+x-6 = x^2-3x-4 \iff 4x = 2 \iff \boxed{x = \frac{1}{2}}$

p) $(x+2)(x+5) = (x+1)(x+3) \iff x^2+7x+10 = x^2+4x+3 \iff 3x = -7 \iff \boxed{x = -\frac{7}{3}}$

EXERCICE 7 ⋆⋆

Méthode : on multiplie d'emblée les deux membres par un multiple commun des dénominateurs. Détaillons la question e) :

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{2} & = & 5 & \text{on multiplie les deux membres par } 6 \\ 6\times\dfrac{x}{3}+6\times\dfrac{x}{2} & = & 6\times 5 & \text{on simplifie chaque fraction} \\ 2x+3x & = & 30 & \text{on réduit, puis on divise par } 5 \\ x & = & 6 & \end{array}$$

$$\boxed{S = \{6\}}$$

a) $\dfrac{x}{3} = 5 \iff x = 15 \iff \boxed{x = 15}$

b) $\dfrac{2x}{5} = 4 \iff 2x = 20 \iff \boxed{x = 10}$

c) $\dfrac{x}{2}+3 = 7 \iff \dfrac{x}{2} = 4 \iff \boxed{x = 8}$

d) $\dfrac{x}{4}-1 = 2 \iff \dfrac{x}{4} = 3 \iff \boxed{x = 12}$

(question e) traitée ci-dessus)

e) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{5} = 3 \iff 5x-2x = 30 \iff 3x = 30 \iff \boxed{x = 10}$ *(on a multiplié par 10)*

f) $\dfrac{x+1}{3} = 4 \iff x+1 = 12 \iff \boxed{x = 11}$

g) $\dfrac{x}{4}+2=\dfrac{x+1}{3} \iff 3x+24=4(x+1) \iff 3x+24=4x+4 \iff \boxed{x=20}$ *(on a multiplié par 12)*

h) $\dfrac{2x-3}{5}=2 \iff 2x-3=10 \iff 2x=13 \iff \boxed{x=\dfrac{13}{2}}$

i) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{4}=1 \iff 4x+3x=12 \iff 7x=12 \iff \boxed{x=\dfrac{12}{7}}$ *(on a multiplié par 12)*

Attention : lorsqu'on multiplie par un nombre, il faut multiplier **chaque** terme des deux membres, y compris ceux qui ne sont pas des fractions.

EXERCICE 8 ⋆⋆

a) $0{,}5x+1{,}2=3{,}7 \iff 0{,}5x=2{,}5 \iff \boxed{x=5}$

b) $1{,}5x-2=0{,}5x+4 \iff x=6 \iff \boxed{x=6}$

c) $0{,}2(x+5)=3 \iff 0{,}2x+1=3 \iff 0{,}2x=2 \iff \boxed{x=10}$

d) $2{,}4-0{,}8x=0 \iff 0{,}8x=2{,}4 \iff \boxed{x=3}$

e) On supprime les parenthèses en partant de l'intérieur :

$$5-\big[2x-(3x+1)\big]=8 \iff 5-\big[2x-3x-1\big]=8 \iff 5-\big[-x-1\big]=8$$

$$\iff 5+x+1=8 \iff x+6=8 \iff \boxed{x=2}$$

Le piège est le double signe : $-(-x-1)=+x+1$.

f) $2\big[3(x-1)+4\big]=26 \iff 2\big[3x+1\big]=26 \iff 6x+2=26 \iff \boxed{x=4}$

g) $3-2\big(x-(4-x)\big)=5 \iff 3-2\big(2x-4\big)=5 \iff 3-4x+8=5 \iff -4x=-6 \iff \boxed{x=\dfrac{3}{2}}$

h) $0{,}4x+1=0{,}1x+2 \iff 0{,}3x=1 \iff x=\dfrac{1}{0{,}3} \iff \boxed{x=\dfrac{10}{3}}$

Sur la dernière : $\dfrac{1}{0{,}3}=\dfrac{10}{3}$. On peut aussi commencer par multiplier les deux membres par 10, ce qui donne $4x+10=x+20$ et évite complètement les décimaux.

EXERCICE 9 ⋆⋆

Rappel du cours : lorsque l'inconnue disparaît, c'est l'égalité restante qu'il faut regarder.

a) $2x+5=2x+1$. On retranche $2x$ aux deux membres : $5=1$. Cette égalité est **fausse**, donc $\boxed{S=\varnothing}$: aucune solution.

b) $3(x+2)=3x+6 \iff 3x+6=3x+6 \iff 0=0$. Cette égalité est **toujours vraie**, donc $\boxed{S=\mathbb{R}}$: tous les réels sont solutions.

c) $5x+8=3x+8 \iff 2x=0 \iff \boxed{x=0}$
Attention : ici l'inconnue *ne disparaît pas*. Il reste $2x=0$, qui admet l'unique solution 0.

d) $5(x-1)=5x+2 \iff 5x-5=5x+2 \iff -5=2$, égalité fausse : $\boxed{S=\varnothing}$

e) $2(3x+1)=6x+2 \iff 6x+2=6x+2 \iff 0=0$: $\boxed{S=\mathbb{R}}$

f) $3(2x-5)=6x-12 \iff 6x-15=6x-12 \iff -15=-12$, égalité fausse : $\boxed{S=\varnothing}$

g) $5(x+2)=3x+7 \iff 5x+10=3x+7 \iff 2x=-3 \iff \boxed{x=-\dfrac{3}{2}}$

h) $4(2x-1) = 6x+1 \iff 8x-4 = 6x+1 \iff 2x = 5 \iff \boxed{x = \dfrac{5}{2}}$

Bilan. Sur ces huit équations, trois n'ont aucune solution, trois en ont une infinité, et trois admettent une unique solution — dont deux fractionnaires. Il ne faut donc pas conclure trop vite : ce n'est pas parce qu'une équation *ressemble* à un cas particulier qu'elle en est un.

EXERCICE 10 ⋆⋆

a) $8x-3 = 5x+12 \iff 3x = 15 \iff \boxed{x = 5}$

b) $2(x-4) = 3(x+1)-5 \iff 2x-8 = 3x-2 \iff -6 = x \iff \boxed{x = -6}$

c) $\dfrac{x}{5}+2 = 4 \iff \dfrac{x}{5} = 2 \iff \boxed{x = 10}$

d) $3(2x+1) = 6x+3 \iff 6x+3 = 6x+3$: $\boxed{S = \mathbb{R}}$

e) $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{2x-1}{3} \iff 3(x+3) = 2(2x-1) \iff 3x+9 = 4x-2 \iff \boxed{x = 11}$

f) $5-4x = 4-4x \iff 5 = 4$, égalité fausse : $\boxed{S = \varnothing}$

g) $0{,}3x-1{,}2 = 0{,}6 \iff 0{,}3x = 1{,}8 \iff \boxed{x = 6}$

h) $4(x-2)+3(2-x) = 5 \iff 4x-8+6-3x = 5 \iff x-2 = 5 \iff \boxed{x = 7}$

i) $3(x-2) = 5x+1 \iff 3x-6 = 5x+1 \iff -7 = 2x \iff \boxed{x = -\dfrac{7}{2}}$

j) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{5} = 2 \iff 5x+3x = 30 \iff 8x = 30 \iff \boxed{x = \dfrac{15}{4}}$

Pour la dernière, on a multiplié les deux membres par 15, puis simplifié $\dfrac{30}{8} = \dfrac{15}{4}$: une fraction se donne toujours sous forme irréductible.

Équations produit

EXERCICE 11 ⋆

Rappel : un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul. On relie donc les équations obtenues par le mot **ou**.

Détaillons la première :

$$(x-3)(x+5) = 0 \quad \text{équivaut à} \quad x-3 = 0 \ \text{ ou } \ x+5 = 0$$

$$x-3 = 0 \iff x = 3 \qquad ; \qquad x+5 = 0 \iff x = -5$$

$$\boxed{S = \{-5\,;3\}}$$

b) $2x-6 = 0$ ou $x+1 = 0$: $\boxed{S = \{-1\,;3\}}$

c) $x+7 = 0$ ou $3x-12 = 0$: $\boxed{S = \{-7\,;4\}}$

d) $5x+10 = 0$ ou $x-8 = 0$: $\boxed{S = \{-2\,;8\}}$

e) $x = 0$ ou $x-4 = 0$: $\boxed{S = \{0\,;4\}}$

f) $3x-1 = 0$ ou $2x+5 = 0$: $\boxed{S = \left\{-\dfrac{5}{2}\,;\dfrac{1}{3}\right\}}$

g) $x-2 = 0$ ou $x-2 = 0$: $\boxed{S = \{2\}}$

h) $4x = 0$ ou $x+6 = 0$: $\boxed{S = \{-6\,;0\}}$

i) $x+1 = 0$ ou $x-1 = 0$ ou $x+2 = 0$: $\boxed{S = \{-2\,;-1\,;1\}}$

j) $2x+7=0$ ou $5-x=0$: $\boxed{S=\left\{-\frac{7}{2}\,;5\right\}}$ l) $x-0{,}5=0$ ou $2x+3=0$: $\boxed{S=\left\{-\frac{3}{2}\,;0{,}5\right\}}$

k) $-3x+9=0$ ou $x+4=0$: $\boxed{S=\{-4\,;3\}}$

Deux remarques. À la question g), les deux facteurs sont identiques : l'équation n'admet qu'**une** solution. À la question h), le facteur $4x$ s'annule pour $x=0$: le nombre 4 ne fournit aucune solution, puisqu'il ne s'annule jamais.

EXERCICE 12 ⋆

Méthode : on repère le facteur commun, on factorise, puis on applique la règle du produit nul.

a) $x^2-5x=0 \iff x(x-5)=0$, d'où $x=0$ ou $x=5$: $\boxed{S=\{0\,;5\}}$

b) $3x^2+6x=0 \iff 3x(x+2)=0$: $\boxed{S=\{-2\,;0\}}$

c) $5x^2-2x=0 \iff x(5x-2)=0$: $\boxed{S=\left\{0\,;\frac{2}{5}\right\}}$

d) $4x^2+x=0 \iff x(4x+1)=0$: $\boxed{S=\left\{-\frac{1}{4}\,;0\right\}}$

e) $(x+1)(x-3)+(x+1)(2x+5)=0$. Le facteur commun est $(x+1)$:

$$(x+1)\big[(x-3)+(2x+5)\big]=0 \iff (x+1)(3x+2)=0 \qquad \boxed{S=\left\{-1\,;-\frac{2}{3}\right\}}$$

f) $(2x-1)(x+4)-(2x-1)(3x-2)=0$. Facteur commun $(2x-1)$:

$$(2x-1)\big[(x+4)-(3x-2)\big]=0 \iff (2x-1)(-2x+6)=0 \qquad \boxed{S=\left\{\frac{1}{2}\,;3\right\}}$$

Attention au signe $-$ devant la seconde parenthèse : $-(3x-2)=-3x+2$.

g) $(x-5)(x+2)+(x-5)=0$. Le second terme est $(x-5)\times 1$:

$$(x-5)\big[(x+2)+1\big]=0 \iff (x-5)(x+3)=0 \qquad \boxed{S=\{-3\,;5\}}$$

Piège classique : on oublie souvent le facteur 1 et l'on écrit $(x-5)(x+2)=0$.

h) $3(x+2)-x(x+2)=0 \iff (x+2)(3-x)=0$: $\boxed{S=\{-2\,;3\}}$

i) $(4x+3)^2-(4x+3)(x-1)=0$. Comme $(4x+3)^2=(4x+3)(4x+3)$:

$$(4x+3)\big[(4x+3)-(x-1)\big]=0 \iff (4x+3)(3x+4)=0 \qquad \boxed{S=\left\{-\frac{4}{3}\,;-\frac{3}{4}\right\}}$$

j) $2x(x-7)+3(x-7)=0 \iff (x-7)(2x+3)=0$: $\boxed{S=\left\{-\frac{3}{2}\,;7\right\}}$

EXERCICE 13 ⋆⋆

On utilise l'identité $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

a) $x^2 - 16 = 0 \iff (x-4)(x+4) = 0$: $\boxed{S = \{-4\,;4\}}$

b) $x^2 - 49 = 0 \iff (x-7)(x+7) = 0$: $\boxed{S = \{-7\,;7\}}$

c) $4x^2 - 9 = 0$. Ici $4x^2 = (2x)^2$ et $9 = 3^2$:

$$(2x-3)(2x+3) = 0 \qquad \boxed{S = \left\{-\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\right\}}$$

d) $25x^2 - 1 = 0 \iff (5x-1)(5x+1) = 0$: $\boxed{S = \left\{-\frac{1}{5}\,;\frac{1}{5}\right\}}$

e) $(x+2)^2 - 9 = 0$. On prend $a = x+2$ et $b = 3$:

$$[(x+2)-3][(x+2)+3] = 0 \iff (x-1)(x+5) = 0 \qquad \boxed{S = \{-5\,;1\}}$$

f) $(2x-1)^2 - 16 = 0 \iff (2x-1-4)(2x-1+4) = 0 \iff (2x-5)(2x+3) = 0$:

$$\boxed{S = \left\{-\frac{3}{2}\,;\frac{5}{2}\right\}}$$

g) $(x+3)^2 - (x-1)^2 = 0$. On prend $a = x+3$ et $b = x-1$:

$$[(x+3)-(x-1)][(x+3)+(x-1)] = 0 \iff 4 \times (2x+2) = 0$$

Le facteur 4 ne s'annule jamais, il reste $2x + 2 = 0$: $\boxed{S = \{-1\}}$

Une seule solution ici : le premier facteur, une fois réduit, ne contient plus x.

h) $9x^2 - 4 = 0 \iff (3x-2)(3x+2) = 0$: $\boxed{S = \left\{-\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right\}}$

i) $(3x+1)^2 - (x+5)^2 = 0 \iff [(3x+1)-(x+5)][(3x+1)+(x+5)] = 0$

$$\iff (2x-4)(4x+6) = 0 \qquad \boxed{S = \left\{-\frac{3}{2}\,;2\right\}}$$

j) $16x^2 - 81 = 0 \iff (4x-9)(4x+9) = 0$: $\boxed{S = \left\{-\frac{9}{4}\,;\frac{9}{4}\right\}}$

EXERCICE 14 ⋆⋆

Méthode : on ramène tout dans le premier membre, puis on factorise.

a) $x^2 = 25 \iff x^2 - 25 = 0 \iff (x-5)(x+5) = 0$: $\boxed{S = \{-5\,;5\}}$

b) $x^2 = 36 \iff (x-6)(x+6) = 0$: $\boxed{S = \{-6\,;6\}}$

c) $x^2 = 0$. Un produit $x \times x$ est nul si et seulement si $x = 0$: $\boxed{S = \{0\}}$

d) $x^2 = -4$. Un carré est toujours **positif ou nul**, il ne peut jamais valoir -4 :

$$\boxed{S = \varnothing}$$

e) $3x^2 = 27 \iff x^2 = 9 \iff (x-3)(x+3) = 0$: $\boxed{S = \{-3\,;3\}}$

f) $x^2 - 11 = 5 \iff x^2 = 16 \iff (x-4)(x+4) = 0$: $\boxed{S = \{-4\,;4\}}$

g) $4x^2 = 100 \iff x^2 = 25$: $\boxed{S = \{-5\,;5\}}$

h) $(x-1)^2 = 9 \iff (x-1)^2 - 9 = 0 \iff (x-1-3)(x-1+3) = 0 \iff (x-4)(x+2) = 0$:

$$\boxed{S = \{-2\,;4\}}$$

L'erreur la plus courante consiste à ne donner qu'une seule solution à $x^2 = 25$. Il y en a bien deux, 5 et -5, car $(-5)^2 = 25$ également. Les deux seuls cas où il n'y en a pas deux sont $x^2 = 0$ (une seule) et $x^2 = k$ avec $k < 0$ (aucune).

EXERCICE 15 ⋆⋆

a) $x^2 = 7x \iff x^2 - 7x = 0 \iff x(x-7) = 0$: $\boxed{S = \{0\,;7\}}$

Piège majeur : on est tenté de « diviser par x » pour obtenir $x = 7$. On perdrait alors la solution 0, et l'on diviserait par un nombre peut-être nul.

b) $3x^2 = 12x \iff 3x^2 - 12x = 0 \iff 3x(x-4) = 0$: $\boxed{S = \{0\,;4\}}$

c) $x^2 + 3x = 4x \iff x^2 - x = 0 \iff x(x-1) = 0$: $\boxed{S = \{0\,;1\}}$

d) $(x+1)(x-3) = (x+1)(2x+4) \iff (x+1)\big[(x-3) - (2x+4)\big] = 0 \iff (x+1)(-x-7) = 0$:

$$\boxed{S = \{-7\,;-1\}}$$

e) $(2x-3)(x+1) = (2x-3)(4-x) \iff (2x-3)\big[(x+1) - (4-x)\big] = 0 \iff (2x-3)(2x-3) = 0$:

$$\boxed{S = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$$

Les deux facteurs étant identiques, il n'y a qu'une solution.

f) $x(x+4) = 3(x+4) \iff (x+4)(x-3) = 0$: $\boxed{S = \{-4\,;3\}}$

g) $(x-6)^2 = 4(x-6) \iff (x-6)\big[(x-6) - 4\big] = 0 \iff (x-6)(x-10) = 0$: $\boxed{S = \{6\,;10\}}$

h) $9x^2 = 4 \iff 9x^2 - 4 = 0 \iff (3x-2)(3x+2) = 0$: $\boxed{S = \left\{-\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right\}}$

i) $(x+5)^2 = 16 \iff (x+5)^2 - 16 = 0 \iff (x+5-4)(x+5+4) = 0 \iff (x+1)(x+9) = 0$:

$$\boxed{S = \{-9\,;-1\}}$$

j) $5x(x-2) = 5x \iff 5x\big[(x-2) - 1\big] = 0 \iff 5x(x-3) = 0$: $\boxed{S = \{0\,;3\}}$

EXERCICE 16 ⋆⋆

a) $(x-4)(2x+1) + (x-4)^2 = 0 \iff (x-4)\big[(2x+1) + (x-4)\big] = 0 \iff (x-4)(3x-3) = 0$:

$$\boxed{S = \{1\,;4\}}$$

b) $(3x+2)(x-5) - (x-5)(x+1) = 0 \iff (x-5)\big[(3x+2) - (x+1)\big] = 0 \iff (x-5)(2x+1) = 0$:

$$\boxed{S = \left\{-\frac{1}{2}\,;5\right\}}$$

c) $(x+3)^2-(x+3)(2x-1)=0 \iff (x+3)\big[(x+3)-(2x-1)\big]=0 \iff (x+3)(-x+4)=0$:

$$\boxed{S=\{-3\,;4\}}$$

d) $4(x-1)+(x-1)(x+6)=0 \iff (x-1)\big[4+(x+6)\big]=0 \iff (x-1)(x+10)=0$:

$$\boxed{S=\{-10\,;1\}}$$

e) $(2x+5)(x-3)+(2x+5)=0 \iff (2x+5)\big[(x-3)+1\big]=0 \iff (2x+5)(x-2)=0$:

$$\boxed{S=\left\{-\frac{5}{2}\,;2\right\}}$$

f) $x^2-9+(x-3)(x+1)=0$. On factorise d'abord $x^2-9=(x-3)(x+3)$, ce qui fait apparaître le facteur commun $(x-3)$:

$$(x-3)(x+3)+(x-3)(x+1)=0 \iff (x-3)\big[(x+3)+(x+1)\big]=0 \iff (x-3)(2x+4)=0$$

$$\boxed{S=\{-2\,;3\}}$$

g) $4x^2-1+(2x-1)(x+4)=0$. Ici $4x^2-1=(2x-1)(2x+1)$:

$$(2x-1)\big[(2x+1)+(x+4)\big]=0 \iff (2x-1)(3x+5)=0 \qquad \boxed{S=\left\{-\frac{5}{3}\,;\frac{1}{2}\right\}}$$

h) $25-x^2+(5+x)(2x-1)=0$. Ici $25-x^2=(5-x)(5+x)$:

$$(5+x)\big[(5-x)+(2x-1)\big]=0 \iff (5+x)(x+4)=0 \qquad \boxed{S=\{-5\,;-4\}}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : lorsqu'aucun facteur commun n'apparaît, on cherche s'il ne se cache pas dans une identité remarquable. C'est presque toujours le cas.

Équations quotient

EXERCICE 17 ⋆

Une valeur interdite est une valeur de l'inconnue qui annule le dénominateur. On résout donc à chaque fois « dénominateur $=0$ ».

a) $x+1=0 \iff \boxed{x=-1}$

b) $x-3=0 \iff \boxed{x=3}$

c) $2x+8=0 \iff \boxed{x=-4}$

d) $3x-9=0 \iff \boxed{x=3}$

e) $5x=0 \iff \boxed{x=0}$

f) $x^2-4=0 \iff (x-2)(x+2)=0 \iff \boxed{x=-2 \text{ ou } x=2}$

g) $(x-1)(x+5)=0 \iff \boxed{x=-5 \text{ ou } x=1}$

h) $4x+2=0 \iff \boxed{x=-\frac{1}{2}}$

i) x^2+1 : un carré étant positif, $x^2+1 \geqslant 1 > 0$. $\boxed{\text{Aucune valeur interdite.}}$

j) $7-x=0 \iff \boxed{x=7}$

k) $(2x+1)(x-4)=0 \iff \boxed{x=-\frac{1}{2} \text{ ou } x=4}$

l) $x^2=0 \iff \boxed{x=0}$

La question i) est le piège de l'exercice : il ne faut pas conclure qu'un dénominateur s'annule forcément. Ici il ne s'annule jamais, et le quotient est défini pour tout réel.

EXERCICE 18 ⋆

On rédige en trois temps, comme dans le cours. Détaillons la première :

Valeurs interdites : $x+1=0$ donne $x=-1$.
Numérateur nul : $2x-6=0 \iff 2x=6 \iff x=3$.
Comparaison : 3 n'est pas la valeur interdite, elle est donc acceptée.

$$\boxed{S=\{3\}}$$

b) V.I. : 3. Numérateur : $x+4=0 \iff x=-4$, acceptée. $\boxed{S=\{-4\}}$

c) V.I. : 2. Numérateur : $3x=0 \iff x=0$, acceptée. $\boxed{S=\{0\}}$

d) V.I. : $\frac{1}{2}$. Numérateur : $5x+15=0 \iff x=-3$, acceptée. $\boxed{S=\{-3\}}$

e) V.I. : 0. Numérateur : $x-7=0 \iff x=7$, acceptée. $\boxed{S=\{7\}}$

f) V.I. : -6. Numérateur : $2x+1=0 \iff x=-\frac{1}{2}$, acceptée. $\boxed{S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}}$

g) V.I. : $-\frac{2}{3}$. Numérateur : $4-x=0 \iff x=4$, acceptée. $\boxed{S=\{4\}}$

h) Aucune V.I. Numérateur : $x+5=0 \iff x=-5$, acceptée. $\boxed{S=\{-5\}}$

i) V.I. : 5. Numérateur : $6x-9=0 \iff x=\frac{3}{2}$, acceptée. $\boxed{S=\left\{\frac{3}{2}\right\}}$

j) V.I. : 1 et -3. Numérateur : $x=0$, acceptée. $\boxed{S=\{0\}}$

EXERCICE 19 ⋆⋆

Dans chacune de ces équations, une valeur trouvée à l'étape 2 doit être rejetée à l'étape 3.

a) $\dfrac{x^2-4}{x-2}=0$: V.I. $x=2$. Numérateur : $(x-2)(x+2)=0$ donne $x=2$ ou $x=-2$. La valeur 2 est interdite, elle est **rejetée** : $\boxed{S=\{-2\}}$

b) $\dfrac{x^2-9}{x+3}=0$: V.I. $x=-3$. Numérateur : $x=3$ ou $x=-3$. On rejette -3 : $\boxed{S=\{3\}}$

c) $\dfrac{(x-1)(x+5)}{x+5}=0$: V.I. $x=-5$. Numérateur : $x=1$ ou $x=-5$. On rejette -5 : $\boxed{S=\{1\}}$

d) $\dfrac{x^2-5x}{x}=0$: V.I. $x=0$. Numérateur : $x(x-5)=0$ donne $x=0$ ou $x=5$. On rejette 0 : $\boxed{S=\{5\}}$

e) $\dfrac{(2x-6)(x+1)}{x-3}=0$: V.I. $x=3$. Numérateur : $x=3$ ou $x=-1$. On rejette 3 : $\boxed{S=\{-1\}}$

f) $\dfrac{x^2-16}{(x-4)(x+1)}=0$: V.I. $x=4$ et $x=-1$. Numérateur : $x=4$ ou $x=-4$. On rejette 4 : $\boxed{S=\{-4\}}$

g) $\dfrac{(x+2)^2}{x+2}=0$: V.I. $x=-2$. Numérateur : $(x+2)^2=0$ donne $x=-2$, *seule* valeur possible. Elle est interdite, donc rejetée :

$$\boxed{S=\varnothing}$$

C'est le cas le plus frappant : l'équation n'admet aucune solution, alors que le numérateur, lui, s'annule bien.

h) $\dfrac{3x^2-12}{x+2}=0$: V.I. $x=-2$. Numérateur : $3(x^2-4)=3(x-2)(x+2)=0$ donne $x=2$ ou $x=-2$. On rejette -2 : $\boxed{S=\{2\}}$

Ces huit équations montrent pourquoi la troisième étape n'est jamais facultative. On serait tenté de simplifier d'emblée le quotient — par exemple d'écrire $\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$ à la question a) — mais cela suppose que $x-2$ n'est pas nul, ce qui est précisément la question posée.

EXERCICE 20 ⋆⋆

a) V.I. $x=-4$. Numérateur : $x^2-3x=x(x-3)=0$ donne $x=0$ ou $x=3$, toutes deux acceptées : $\boxed{S=\{0\,;3\}}$

b) V.I. $x=1$. Numérateur : $4x^2-25=(2x-5)(2x+5)=0$: $\boxed{S=\left\{-\dfrac{5}{2}\,;\dfrac{5}{2}\right\}}$

c) V.I. $x=-\frac{1}{2}$. Numérateur : $x=2$ ou $x=-7$: $\boxed{S=\{-7\,;2\}}$

d) V.I. $x=6$. Numérateur : $x^2+6x=x(x+6)=0$: $\boxed{S=\{-6\,;0\}}$

e) V.I. $x=0$. Numérateur : $(x+1)^2-9=(x+1-3)(x+1+3)=(x-2)(x+4)=0$: $\boxed{S=\{-4\,;2\}}$

f) V.I. $x=\frac{1}{3}$. Numérateur : $9x^2-1=(3x-1)(3x+1)=0$ donne $x=\frac{1}{3}$ ou $x=-\frac{1}{3}$. On rejette $\frac{1}{3}$: $\boxed{S=\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}}$

g) V.I. $x=-5$. Numérateur : $5x^2-20=5(x-2)(x+2)=0$: $\boxed{S=\{-2\,;2\}}$

h) V.I. $x=-3$ et $x=4$. Numérateur : $x=\frac{1}{2}$ ou $x=-3$. On rejette -3 : $\boxed{S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}}$

Mise en équation et problèmes

EXERCICE 21 ⋆

On note x le nombre cherché.

1. $5x-8=27 \iff 5x=35 \iff x=7$.

   $\boxed{\text{Le nombre cherché est 7.}}$

2. $3x+4=2x+15 \iff x=11$.

   $\boxed{\text{Le nombre cherché est 11.}}$

3. Les trois entiers consécutifs s'écrivent x, $x+1$ et $x+2$:

   $$x+(x+1)+(x+2)=87 \iff 3x+3=87 \iff 3x=84 \iff x=28$$

   $\boxed{\text{Les trois nombres sont 28, 29 et 30.}}$

   Vérification : $28+29+30=87$.

4. $\dfrac{x}{4}+6=\dfrac{x}{3}$. On multiplie les deux membres par 12 :

   $$3x+72=4x \iff 72=x \qquad \boxed{\text{Le nombre cherché est 72.}}$$

5. Si l'un vaut x, l'autre vaut $2x$:

$$x + 2x = 45 \iff 3x = 45 \iff x = 15$$

Les deux nombres sont 15 et 30.

EXERCICE 22 ⋆

1. Notons x la largeur en cm ; la longueur vaut alors $x + 5$.

$$2(x + (x + 5)) = 46 \iff 2(2x + 5) = 46 \iff 4x + 10 = 46 \iff 4x = 36 \iff x = 9$$

Le rectangle mesure 9 cm sur 14 cm.

Vérification : $2 \times (9 + 14) = 46$.

2. Notons x la longueur d'un côté égal : $12 + 2x = 40 \iff 2x = 28 \iff x = 14$.

Les deux côtés égaux mesurent 14 cm.

3. Notons x la largeur ; la longueur vaut $2x$:

$$2(x + 2x) = 60 \iff 6x = 60 \iff x = 10$$

Le rectangle mesure 10 m sur 20 m.

4. Notons x le côté du carré ; celui du triangle vaut $x + 6$. Les périmètres valent $4x$ et $3(x + 6)$:

$$4x = 3(x + 6) \iff 4x = 3x + 18 \iff x = 18$$

Le carré a pour côté 18 cm, le triangle 24 cm ; le périmètre commun vaut 72 cm.

EXERCICE 23 ⋆

1. Notons x le nombre d'années à attendre. Dans x ans, Paul aura $12 + x$ ans et son père $40 + x$ ans :

$$40 + x = 2(12 + x) \iff 40 + x = 24 + 2x \iff 16 = x$$

Il faudra attendre 16 ans.

Vérification : dans 16 ans, Paul aura 28 ans et son père $56 = 2 \times 28$.

2. Notons x l'âge actuel de la fille ; la mère a $x + 32$ ans. Dans 8 ans :

$$(x + 32) + 8 = 3(x + 8) \iff x + 40 = 3x + 24 \iff 16 = 2x \iff x = 8$$

La fille a 8 ans et la mère 40 ans.

3. Notons x l'âge du premier frère ; les deux autres ont $x + 3$ et $x + 6$ ans :

$$x + (x + 3) + (x + 6) = 42 \iff 3x + 9 = 42 \iff x = 11$$

Les trois frères ont 11, 14 et 17 ans.

EXERCICE 24 ⋆⋆

1. Notons x le prix du stylo en euros ; le cahier coûte $2x$:

$$x + 2x = 7{,}50 \iff 3x = 7{,}50 \iff x = 2{,}50$$

$$\boxed{\text{Le stylo coûte 2,50 € et le cahier 5 €.}}$$

2. Notons t la durée en heures. Les deux tarifs valent $3 + 1{,}5t$ et $6 + 0{,}75t$:

$$3 + 1{,}5t = 6 + 0{,}75t \iff 0{,}75t = 3 \iff t = 4$$

Le prix commun vaut alors $3 + 1{,}5 \times 4 = 9$.

$$\boxed{\text{Les deux tarifs coïncident pour 4 heures, au prix de 9 €.}}$$

3. Notons x la somme que possède Léo ; Marie possède $3x$. Après le don :

$$3x - 20 = x + 20 \iff 2x = 40 \iff x = 20$$

$$\boxed{\text{Léo a 20 € et Marie 60 €.}}$$

Vérification : après le don, Marie a 40 € et Léo aussi.

4. Notons n le nombre de tee-shirts vendus. La recette vaut $20n$, les dépenses $12n + 240$:

$$20n = 12n + 240 \iff 8n = 240 \iff n = 30$$

$$\boxed{\text{Il doit en vendre 30.}}$$

EXERCICE 25 ⋆⋆

1. Le périmètre du carré vaut $4 \times 7 = 28$ cm :

$$2(5 + x) = 28 \iff 5 + x = 14 \iff \boxed{x = 9 \text{ cm.}}$$

2. $AB + BC + CA = 27$ donne :

$$(2x + 1) + (x + 4) + (3x - 2) = 27 \iff 6x + 3 = 27 \iff 6x = 24 \iff x = 4$$

$$\boxed{AB = 9 \text{ cm}, \quad BC = 8 \text{ cm}, \quad CA = 10 \text{ cm.}}$$

Vérification : $9 + 8 + 10 = 27$.

3. Les deux aires valent $4(x + 3)$ et $6x$:

$$4(x + 3) = 6x \iff 4x + 12 = 6x \iff 12 = 2x \iff \boxed{x = 6.}$$

4. L'aire du triangle vaut $\dfrac{12 \times x}{2} = 6x$, celle du rectangle $4(x + 3)$:

$$6x = 4(x + 3) \iff 6x = 4x + 12 \iff \boxed{x = 6 \text{ cm.}}$$

EXERCICE 26 ⋆⋆

1. $A = (2x-5)^2 - 9 = 4x^2 - 20x + 25 - 9$, donc

$$\boxed{A = 4x^2 - 20x + 16}$$

2. On reconnaît $a^2 - b^2$ avec $a = 2x - 5$ et $b = 3$:

$$A = [(2x-5) - 3][(2x-5) + 3] = (2x-8)(2x-2) \qquad \boxed{A = (2x-8)(2x-2)}$$

3. Pour $x = 0$: $A = (0-5)^2 - 9 = 25 - 9 = \boxed{16}$. Pour $x = 3$: $A = (6-5)^2 - 9 = 1 - 9 = \boxed{-8}$.
4. $A = 0 \iff (2x-8)(2x-2) = 0 \iff 2x - 8 = 0$ ou $2x - 2 = 0$:

$$\boxed{S = \{1\,;4\}}$$

5. $A = 16 \iff (2x-5)^2 - 9 = 16 \iff (2x-5)^2 = 25 \iff (2x-5)^2 - 25 = 0$. On factorise :

$$(2x-5-5)(2x-5+5) = 0 \iff (2x-10) \times 2x = 0 \qquad \boxed{S = \{0\,;5\}}$$

   Vérification : on avait déjà trouvé $A = 16$ pour $x = 0$ à la question 3.

6. **Question 3 :** la forme initiale $(2x-5)^2 - 9$ est la plus rapide pour un calcul numérique. **Question 4 :** la forme **factorisée** est indispensable, car seule l'équation produit se résout en Seconde. **Question 5 :** on repart de la forme initiale pour isoler le carré, puis on factorise à nouveau.

Chaque forme a son usage : développée pour calculer, factorisée pour résoudre.

EXERCICE 27 ⋆⋆

1. Avec 5 : programme A donne $5 \times 4 = 20$, puis $20 + 6 = 26$, puis $26 - 10 = 16$; programme B donne $5 + 3 = 8$, puis $8 \times 2 = 16$.
   Avec -2 : A donne $-8 + 6 = -2$, puis $-2 - (-4) = 2$; B donne $1 \times 2 = 2$.

Les deux programmes semblent donner toujours le même résultat.

2. Programme A : $4x + 6 - 2x = \boxed{2x+6}$. Programme B : $2(x+3) = \boxed{2x+6}$.
   Les deux expressions sont identiques : les deux programmes donnent bien le même résultat, **quel que soit** le nombre choisi.
3. $2x + 6 = 0 \iff 2x = -6 \iff \boxed{x = -3}$
4. Le programme C se termine par une division par $x + 2$. Or $x + 2 = 0$ pour $x = -2$:

Le nombre -2 doit être écarté : c'est la valeur interdite.

5. Pour $x \neq -2$, le programme C donne $\dfrac{x^2-4}{x+2}$. En factorisant le numérateur :

$$\frac{x^2-4}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = x - 2$$

   la simplification étant légitime puisque $x + 2 \neq 0$.

Le programme C revient à retrancher 2 au nombre choisi.

6. Le programme C donne 0 lorsque le numérateur s'annule sans que le dénominateur le fasse. Or $x - 2 = 0 \iff x = 2$, qui n'est pas la valeur interdite :

$$\boxed{x = 2}$$

EXERCICE 28 ⋆⋆

1. En notant x la quantité cherchée, son septième vaut $\dfrac{x}{7}$:

$$\boxed{x + \frac{x}{7} = 19}$$

2. On multiplie les deux membres par 7 :

$$7x + x = 133 \iff 8x = 133 \iff \boxed{x = \frac{133}{8} = 16{,}625}$$

3. La valeur d'essai 7 donne $7 + 1 = 8$ au lieu de 19. En la multipliant par $\dfrac{19}{8}$:

$$7 \times \frac{19}{8} = \frac{133}{8}$$

On retrouve exactement le résultat de la question 2.

4. **Méthode moderne :** $x + \dfrac{x}{5} = 24$. En multipliant par 5 :

$$5x + x = 120 \iff 6x = 120 \iff \boxed{x = 20}$$

Méthode d'Ahmès : l'essai 5 donne $5 + 1 = 6$ au lieu de 24. Comme 6 doit devenir 24, on multiplie par $\dfrac{24}{6} = 4$, ce qui donne $5 \times 4 = 20$. Même résultat.

5. **Méthode moderne :** $x + \dfrac{x}{7} + 3 = 19 \iff \dfrac{8x}{7} = 16 \iff 8x = 112 \iff \boxed{x = 14}$.

Méthode d'Ahmès : l'essai 7 donne $7 + 1 + 3 = 11$ au lieu de 19, d'où la valeur $7 \times \dfrac{19}{11} = \dfrac{133}{11} \approx 12{,}09$, qui est **fausse**.

Pourquoi la méthode échoue-t-elle ? Elle repose sur une idée de proportionnalité : si l'on double la quantité d'essai, on double le résultat. C'est vrai pour $x + \frac{x}{7}$, mais plus du tout dès que l'on ajoute la constante 3, qui, elle, ne double pas. La fausse position ne fonctionne donc que pour les situations **proportionnelles** — et c'est bien pourquoi il a fallu inventer une méthode générale.

Exercices de synthèse

EXERCICE 29 ⋆⋆

a) *Premier degré.* $5(x-2) = 3x+8 \iff 5x-10 = 3x+8 \iff 2x = 18 \iff \boxed{S = \{9\}}$

b) *Équation produit.* $x-4=0$ ou $2x+6=0$: $\boxed{S = \{-3\,;4\}}$

c) *Équation quotient.* V.I. $x=-2$; numérateur $3x-1=0 \iff x=\frac{1}{3}$, acceptée : $\boxed{S = \left\{\frac{1}{3}\right\}}$

d) *Produit après factorisation.* $x^2 = 64 \iff (x-8)(x+8)=0$: $\boxed{S = \{-8\,;8\}}$

e) *Premier degré avec fractions.* On multiplie par 15 : $5x-30 = 3x \iff 2x = 30 \iff \boxed{S = \{15\}}$

f) *Facteur commun.* $4x^2 - 9x = 0 \iff x(4x-9)=0$: $\boxed{S = \left\{0\,;\frac{9}{4}\right\}}$

g) *Quotient avec rejet.* V.I. $x=5$; numérateur $x^2-25=0$ donne $x=5$ ou $x=-5$; on rejette 5 : $\boxed{S = \{-5\}}$

h) *Cas particulier.* $2(x+3) = 2x+6 \iff 0=0$: $\boxed{S = \mathbb{R}}$

i) *Identité remarquable.* $(x+1)^2 - 4 = 0 \iff (x-1)(x+3)=0$: $\boxed{S = \{-3\,;1\}}$

j) *Cas particulier.* $7-3x = 3-3x \iff 7=3$, égalité fausse : $\boxed{S = \varnothing}$

k) *Facteur commun.* $(2x+1)\big[(x-3)-(x+5)\big] = 0 \iff (2x+1)\times(-8)=0$. Le facteur -8 ne s'annule jamais : $\boxed{S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}}$

l) *Quotient.* Aucune V.I. car $x^2+1>0$; numérateur $5x=0 \iff x=0$: $\boxed{S = \{0\}}$

EXERCICE 30 ⋆⋆

1. **Réponse A.** $3x-7=8 \iff 3x=15 \iff x=5$. La réponse C s'obtient en oubliant de diviser par 3.
2. **Réponse C.** $x-2=0$ donne $x=2$, et $x+6=0$ donne $x=-6$. Les solutions sont les *opposés* des nombres qui figurent dans les parenthèses.
3. **Réponse B.** $x^2=16 \iff (x-4)(x+4)=0$: les solutions sont 4 et -4.
4. **Réponse C.** Un carré est toujours positif ou nul, il ne peut pas valoir -9.
5. **Réponse B.** La valeur interdite annule le dénominateur : $2x-6=0 \iff x=3$. La réponse A est le nombre qui annule le *numérateur*.
6. **Réponse B.** En retranchant $4x$, il reste $1=5$, égalité fausse.
7. **Réponse C.** En développant, $3x-3=3x-3$: l'égalité est toujours vraie.
8. **Réponse B.** $x=0$ ou $x+4=0$, c'est-à-dire $x=0$ ou $x=-4$. La réponse C oublie que 0 est une solution à part entière.

EXERCICE 31 ⋆⋆

1. **Erreur :** on a *ajouté* 5 au lieu de le retrancher.
   Correction : $3x+5=20 \iff 3x=15 \iff \boxed{x=5}$.
2. **Erreur :** le mot « et » à la place de « ou ». Un nombre ne peut pas valoir à la fois 2 et -3 ; ce sont deux solutions *distinctes*, dont chacune convient séparément.
   Correction : $x=2$ **ou** $x=-3$, donc $\boxed{S=\{-3\,;2\}}$.
3. **Erreur :** on a oublié la solution négative.
   Correction : $x^2=49 \iff (x-7)(x+7)=0$, donc $\boxed{S=\{-7\,;7\}}$.
4. **Erreur :** la règle du produit nul ne vaut que pour un produit égal à **0**. Un produit égal à 6 ne renseigne en rien sur ses facteurs : $6=1\times 6=2\times 3=12\times\frac{1}{2}$, etc.
   Correction : il faudrait développer et ramener à 0, ce qui donne $x^2+x-8=0$ — une équation du second degré que l'on ne sait pas résoudre en Seconde. *L'énoncé était donc mal posé.*
5. **Erreur :** on a oublié la troisième étape, la comparaison avec les valeurs interdites.
   Correction : V.I. $x=3$; le numérateur s'annule pour $x=3$ ou $x=-3$; on rejette 3, donc $\boxed{S=\{-3\}}$.
6. **Erreur :** on a divisé par x, alors que x pourrait être nul — et il l'est justement.
   Correction : $5x=3x \iff 2x=0 \iff \boxed{x=0}$. L'équation admet bien une solution.

EXERCICE 32 ⋆⋆⋆

1. On développe chaque carré séparément :

$$E=(2x+1)^2-(x-3)^2=(4x^2+4x+1)-(x^2-6x+9)=4x^2+4x+1-x^2+6x-9$$

$$\boxed{E=3x^2+10x-8}$$

   Piège classique : le signe $-$ devant le second carré porte sur ses **trois** termes.

2. On reconnaît a^2-b^2 avec $a=2x+1$ et $b=x-3$:

$$E=\big[(2x+1)-(x-3)\big]\big[(2x+1)+(x-3)\big]=(2x+1-x+3)(2x+1+x-3)$$

$$\boxed{E=(x+4)(3x-2)}$$

3. $(x+4)(3x-2)=3x^2-2x+12x-8=3x^2+10x-8$: on retrouve bien la forme développée de la question 1.
4. **Forme initiale :** $E=(2\times 1+1)^2-(1-3)^2=9-4=5$.
   Forme factorisée : $E=(1+4)(3\times 1-2)=5\times 1=5$. $\boxed{E=5}$
5. $E=0 \iff (x+4)(3x-2)=0 \iff x+4=0$ ou $3x-2=0$:

$$\boxed{S=\left\{-4\,;\frac{2}{3}\right\}}$$

6. $E=-8 \iff 3x^2+10x-8=-8 \iff 3x^2+10x=0$. On factorise par x :

$$x(3x+10)=0 \qquad \boxed{S=\left\{-\frac{10}{3}\,;0\right\}}$$

   Ici c'est la forme développée qui sert, car c'est elle qui fait apparaître le facteur commun après simplification du -8.

7. **Valeurs interdites :** $x+4=0$ donne $x=-4$.
   Numérateur nul : $E=0$ donne $x=-4$ ou $x=\frac{2}{3}$ (question 5).
   Comparaison : on rejette -4, qui est la valeur interdite.

$$\boxed{S=\left\{\frac{2}{3}\right\}}$$

8. L'équation $E=0$ a deux solutions, tandis que $\dfrac{E}{x+4}=0$ n'en a qu'une.

$$\boxed{\text{Le dénominateur n'apporte jamais de solution : il en retire.}}$$

   Ici, -4 annule à la fois le numérateur et le dénominateur ; le quotient n'existe donc pas en ce point, et la solution disparaît.

EXERCICE 33 ⋆⋆⋆

Partie A. $(E) : (m-2)x=6$

1. Pour $m=5$: $(5-2)x=6$, soit $3x=6$, donc $\boxed{x=2}$.
   Pour $m=0$: $(0-2)x=6$, soit $-2x=6$, donc $\boxed{x=-3}$.
2. Pour $m=2$, l'équation devient $0\times x=6$, c'est-à-dire $0=6$. Cette égalité est fausse quel que soit x :

$$\boxed{\text{Pour } m=2,\ (E) \text{ n'admet aucune solution.}}$$

3. Dès que $m-2\neq 0$, on peut diviser les deux membres par $m-2$:

$$\boxed{\text{Pour tout } m\neq 2,\ (E) \text{ admet l'unique solution } x=\frac{6}{m-2}.}$$

4. On cherche m tel que $\dfrac{6}{m-2}=1$, c'est-à-dire $6=m-2$:

$$\boxed{m=8}$$

   Vérification : pour $m=8$, l'équation s'écrit $6x=6$, dont la solution est bien 1.

Partie B. $(F) : (m-1)x+3=m+2$

5. On retranche 3 aux deux membres :

$$(m-1)x+3=m+2 \iff (m-1)x=m+2-3 \iff \boxed{(m-1)x=m-1}$$

6. Pour $m=4$: $3x=3$, donc $\boxed{x=1}$. Pour $m=-3$: $-4x=-4$, donc $\boxed{x=1}$.
7. Pour $m=1$, l'équation devient $0\times x=0$, c'est-à-dire $0=0$. Cette égalité est vraie quel que soit x :

$$\boxed{\text{Pour } m=1,\ \text{tous les réels sont solutions.}}$$

8. On distingue donc deux cas :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{si } m\neq 1 :\ \text{on divise par } m-1 \text{ et } (F) \text{ admet l'unique solution } x=1;\\ \text{si } m=1 :\ \text{tous les réels sont solutions.}\end{array}}$$

   On remarque que la solution ne dépend pas de m : c'est toujours 1. C'était prévisible dès la question 5, puisque l'équation $(m-1)x=m-1$ est vérifiée par $x=1$ quelle que soit la valeur de m — mais elle l'est alors par *tous* les réels lorsque $m-1$ s'annule.