EXERCICES – CHAPITRE 4

ÉQUATIONS

Vocabulaire et vérification

EXERCICE 1 ⋆

Pour chacune des équations suivantes, préciser l'inconnue, le premier membre et le second membre.

a) $4x + 7 = 19$ b) $3 - 2t = t + 6$ c) $y^2 - 1 = 8$ d) $5(z + 2) = 3z$

EXERCICE 2 ⋆

Dans chaque cas, dire si les nombres proposés sont ou non solutions de l'équation. On justifiera en calculant séparément les deux membres.

1. $3x - 5 = 7$ avec $x = 4$, puis $x = -4$, puis $x = 2$.
2. $x^2 - x = 6$ avec $x = 3$, puis $x = -2$, puis $x = 2$.
3. $(x - 1)(x + 4) = 0$ avec $x = 1$, puis $x = -4$, puis $x = 4$.
4. $\dfrac{2x + 3}{x - 5} = 0$ avec $x = 5$, puis $x = -\dfrac{3}{2}$, puis $x = 0$.
5. $2(x + 3) = 2x + 6$ avec $x = 0$, puis $x = 7$, puis $x = -11$. Que remarque-t-on ?

EXERCICE 3 ⋆

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est fausse, donner un contre-exemple ou l'énoncé correct.

1. On peut ajouter un même nombre aux deux membres d'une équation sans changer ses solutions.
2. On peut multiplier les deux membres d'une équation par 0 sans changer ses solutions.
3. On peut diviser les deux membres d'une équation par l'inconnue x.
4. Si l'inconnue disparaît au cours de la résolution, c'est que l'on a commis une erreur.
5. Une équation du premier degré admet toujours exactement une solution.
6. Vérifier qu'un nombre est solution suffit à prouver qu'il n'y en a pas d'autres.

Équations du premier degré

EXERCICE 4 ⋆

Résoudre les équations suivantes.

a) $x + 7 = 12$ d) $-5x = 35$ g) $4x - 9 = 11$ j) $5 - 2x = 11$

b) $x - 4 = 9$ e) $\dfrac{x}{4} = 3$ h) $-3x + 2 = 14$ k) $4x + 1 = 6$

c) $3x = 21$ f) $2x + 5 = 17$ i) $6x + 4 = 4$ l) $10 - 6x = 3$

EXERCICE 5 ⋆

Résoudre les équations suivantes, dans lesquelles l'inconnue figure dans les deux membres.

a) $7x - 5 = 4x + 7$
b) $6x + 1 = 2x + 13$
c) $9x - 4 = 5x + 16$
d) $2x + 8 = 5x - 10$
e) $10 - x = 3x - 6$
f) $-2x + 5 = 4x - 7$
g) $3x - 8 = 8x + 7$
h) $x + 9 = 5x + 1$
i) $4x + 3 = 6x + 3$
j) $11 - 2x = 5 - 5x$
k) $5x - 1 = 3x + 6$
l) $4x + 7 = 6x + 2$

EXERCICE 6 ⋆

Résoudre les équations suivantes. On commencera par développer.

a) $3(x + 2) = 15$
b) $4(x - 3) = 8$
c) $2(3x - 1) = 16$
d) $5(2x + 3) = 55$
e) $3(x + 4) = 5x - 2$
f) $2(x - 5) = 3(x - 4)$
g) $5(x + 1) - 2(x - 3) = 20$
h) $4(2x - 1) - 3(x + 2) = 5$
i) $-2(x - 3) = 4(1 - x)$
j) $3(2x - 5) + 4 = 5(x - 1)$
k) $(x + 1)(x + 5) = (x + 2)(x + 3)$
l) $(2x + 1)(x + 3) = (2x - 1)(x + 5)$
m) $(x + 1)(x + 8) = (x + 4)(x + 2)$
n) $(2x + 1)(x - 1) = (x + 2)(2x - 3)$
o) $(x + 3)(x - 2) = (x + 1)(x - 4)$
p) $(x + 2)(x + 5) = (x + 1)(x + 3)$

EXERCICE 7 ⋆⋆

Résoudre les équations suivantes. On pourra commencer par multiplier les deux membres par un nombre bien choisi.

a) $\dfrac{x}{3} = 5$
b) $\dfrac{2x}{5} = 4$
c) $\dfrac{x}{2} + 3 = 7$
d) $\dfrac{x}{4} - 1 = 2$
e) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{2} = 5$
f) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{5} = 3$
g) $\dfrac{x + 1}{3} = 4$
h) $\dfrac{x}{4} + 2 = \dfrac{x + 1}{3}$
i) $\dfrac{2x - 3}{5} = 2$
j) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{4} = 1$

EXERCICE 8 ⋆⋆

Résoudre les équations suivantes.

a) $0{,}5x + 1{,}2 = 3{,}7$
b) $1{,}5x - 2 = 0{,}5x + 4$
c) $0{,}2(x + 5) = 3$
d) $2{,}4 - 0{,}8x = 0$
e) $5 - [2x - (3x + 1)] = 8$
f) $2[3(x - 1) + 4] = 26$
g) $3 - 2(x - (4 - x)) = 5$
h) $0{,}4x + 1 = 0{,}1x + 2$

EXERCICE 9 ⋆⋆

Résoudre les équations suivantes. *Attention :* certaines n'ont aucune solution, d'autres admettent tous les nombres réels pour solutions, d'autres encore une unique solution.

a) $2x+5=2x+1$

b) $3(x+2)=3x+6$

c) $5x+8=3x+8$

d) $5(x-1)=5x+2$

e) $2(3x+1)=6x+2$

f) $3(2x-5)=6x-12$

g) $5(x+2)=3x+7$

h) $4(2x-1)=6x+1$

EXERCICE 10 ⋆⋆

Résoudre les équations suivantes. Elles reprennent tous les cas rencontrés jusqu'ici.

a) $8x-3=5x+12$

b) $2(x-4)=3(x+1)-5$

c) $\dfrac{x}{5}+2=4$

d) $3(2x+1)=6x+3$

e) $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{2x-1}{3}$

f) $5-4x=4-4x$

g) $0{,}3x-1{,}2=0{,}6$

h) $4(x-2)+3(2-x)=5$

i) $3(x-2)=5x+1$

j) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{5}=2$

Équations produit

EXERCICE 11 ⋆

Résoudre les équations produit suivantes. *On ne développera surtout pas.*

a) $(x-3)(x+5)=0$

b) $(2x-6)(x+1)=0$

c) $(x+7)(3x-12)=0$

d) $(5x+10)(x-8)=0$

e) $x(x-4)=0$

f) $(3x-1)(2x+5)=0$

g) $(x-2)(x-2)=0$

h) $4x(x+6)=0$

i) $(x+1)(x-1)(x+2)=0$

j) $(2x+7)(5-x)=0$

k) $(-3x+9)(x+4)=0$

l) $(x-0{,}5)(2x+3)=0$

EXERCICE 12 ⋆

Factoriser le premier membre en mettant en évidence un facteur commun, puis résoudre.

a) $x^2-5x=0$

b) $3x^2+6x=0$

c) $5x^2-2x=0$

d) $4x^2+x=0$

e) $(x+1)(x-3)+(x+1)(2x+5)=0$

f) $(2x-1)(x+4)-(2x-1)(3x-2)=0$

g) $(x-5)(x+2)+(x-5)=0$

h) $3(x+2)-x(x+2)=0$

i) $(4x+3)^2-(4x+3)(x-1)=0$

j) $2x(x-7)+3(x-7)=0$

EXERCICE 13 ⋆⋆

Factoriser le premier membre à l'aide d'une identité remarquable, puis résoudre.

a) $x^2 - 16 = 0$
b) $x^2 - 49 = 0$
c) $4x^2 - 9 = 0$
d) $25x^2 - 1 = 0$
e) $(x+2)^2 - 9 = 0$
f) $(2x-1)^2 - 16 = 0$
g) $(x+3)^2 - (x-1)^2 = 0$
h) $9x^2 - 4 = 0$
i) $(3x+1)^2 - (x+5)^2 = 0$
j) $16x^2 - 81 = 0$

EXERCICE 14 ⋆⋆

Résoudre les équations suivantes. *On prendra garde au nombre de solutions.*

a) $x^2 = 25$
b) $x^2 = 36$
c) $x^2 = 0$
d) $x^2 = -4$
e) $3x^2 = 27$
f) $x^2 - 11 = 5$
g) $4x^2 = 100$
h) $(x-1)^2 = 9$

EXERCICE 15 ⋆⋆

Les équations suivantes ne sont pas de la forme « produit = 0 ». Commencer par tout ramener dans le premier membre, factoriser, puis résoudre.

a) $x^2 = 7x$
b) $3x^2 = 12x$
c) $x^2 + 3x = 4x$
d) $(x+1)(x-3) = (x+1)(2x+4)$
e) $(2x-3)(x+1) = (2x-3)(4-x)$
f) $x(x+4) = 3(x+4)$
g) $(x-6)^2 = 4(x-6)$
h) $9x^2 = 4$
i) $(x+5)^2 = 16$
j) $5x(x-2) = 5x$

EXERCICE 16 ⋆⋆

Dans chaque cas, le facteur commun n'apparaît qu'après une première transformation. Factoriser, puis résoudre.

a) $(x-4)(2x+1) + (x-4)^2 = 0$
b) $(3x+2)(x-5) - (x-5)(x+1) = 0$
c) $(x+3)^2 - (x+3)(2x-1) = 0$
d) $4(x-1) + (x-1)(x+6) = 0$
e) $(2x+5)(x-3) + (2x+5) = 0$
f) $x^2 - 9 + (x-3)(x+1) = 0$
g) $4x^2 - 1 + (2x-1)(x+4) = 0$
h) $25 - x^2 + (5+x)(2x-1) = 0$

Équations quotient

EXERCICE 17 ⋆

Déterminer les valeurs interdites de chacun des quotients suivants.

a) $\dfrac{2x-6}{x+1}$
b) $\dfrac{x+4}{x-3}$
c) $\dfrac{5x}{2x+8}$
d) $\dfrac{x^2-1}{3x-9}$
e) $\dfrac{x-2}{5x}$
f) $\dfrac{4x+1}{x^2-4}$

g) $\dfrac{x}{(x-1)(x+5)}$

h) $\dfrac{3x-7}{4x+2}$

i) $\dfrac{x+6}{x^2+1}$

j) $\dfrac{2x}{7-x}$

k) $\dfrac{5-x}{(2x+1)(x-4)}$

l) $\dfrac{x+3}{x^2}$

EXERCICE 18 ⋆

Résoudre les équations quotient suivantes. On rédigera en trois temps : valeurs interdites, numérateur nul, puis comparaison.

a) $\dfrac{2x-6}{x+1}=0$

b) $\dfrac{x+4}{x-3}=0$

c) $\dfrac{3x}{x-2}=0$

d) $\dfrac{5x+15}{2x-1}=0$

e) $\dfrac{x-7}{4x}=0$

f) $\dfrac{2x+1}{x+6}=0$

g) $\dfrac{4-x}{3x+2}=0$

h) $\dfrac{x+5}{x^2+2}=0$

i) $\dfrac{6x-9}{x-5}=0$

j) $\dfrac{x}{(x-1)(x+3)}=0$

EXERCICE 19 ⋆⋆

Résoudre les équations quotient suivantes. *Dans chacune d'elles, la troisième étape est déterminante.*

a) $\dfrac{x^2-4}{x-2}=0$

b) $\dfrac{x^2-9}{x+3}=0$

c) $\dfrac{(x-1)(x+5)}{x+5}=0$

d) $\dfrac{x^2-5x}{x}=0$

e) $\dfrac{(2x-6)(x+1)}{x-3}=0$

f) $\dfrac{x^2-16}{(x-4)(x+1)}=0$

g) $\dfrac{(x+2)^2}{x+2}=0$

h) $\dfrac{3x^2-12}{x+2}=0$

EXERCICE 20 ⋆⋆

Résoudre les équations quotient suivantes. Le numérateur devra à chaque fois être factorisé.

a) $\dfrac{x^2-3x}{x+4}=0$

b) $\dfrac{4x^2-25}{x-1}=0$

c) $\dfrac{(x-2)(x+7)}{2x+1}=0$

d) $\dfrac{x^2+6x}{x-6}=0$

e) $\dfrac{(x+1)^2-9}{x}=0$

f) $\dfrac{9x^2-1}{3x-1}=0$

g) $\dfrac{5x^2-20}{x+5}=0$

h) $\dfrac{(2x-1)(x+3)}{(x+3)(x-4)}=0$

Mise en équation et problèmes

EXERCICE 21 ⋆

Dans chaque cas, choisir une inconnue, traduire l'énoncé par une équation, la résoudre, puis répondre à la question posée par une phrase.

1. Je pense à un nombre, je le multiplie par 5 puis je retranche 8 : j'obtiens 27. Quel est ce nombre ?
2. Le triple d'un nombre augmenté de 4 est égal au double de ce nombre augmenté de 15. Quel est ce nombre ?
3. La somme de trois nombres entiers consécutifs vaut 87. Quels sont ces nombres ?
4. Le quart d'un nombre, augmenté de 6, est égal au tiers de ce nombre. Quel est ce nombre ?
5. La somme de deux nombres est 45, et l'un des deux vaut le double de l'autre. Quels sont ces nombres ?

EXERCICE 22 ⋆

1. Un rectangle a une longueur qui dépasse sa largeur de 5 cm, et un périmètre de 46 cm. Déterminer ses dimensions.
2. Un triangle isocèle a une base de 12 cm et un périmètre de 40 cm. Quelle est la longueur de ses deux côtés égaux ?
3. Un rectangle a un périmètre de 60 m, et sa longueur est le double de sa largeur. Déterminer ses dimensions.
4. Un carré et un triangle équilatéral ont le même périmètre. Le côté du carré mesure 6 cm de moins que celui du triangle. Déterminer les deux côtés, puis le périmètre commun.

EXERCICE 23 ⋆

1. Paul a 12 ans et son père 40 ans. Dans combien d'années le père aura-t-il exactement le double de l'âge de Paul ?
2. Une mère a 32 ans de plus que sa fille. Dans 8 ans, elle aura le triple de l'âge de sa fille. Quels sont leurs âges aujourd'hui ?
3. La somme des âges de trois frères est de 42 ans. Le deuxième a 3 ans de plus que le premier, et le troisième 6 ans de plus que le premier. Quels sont leurs âges ?

EXERCICE 24 ⋆⋆

1. Un stylo et un cahier coûtent ensemble 7,50 €. Le cahier coûte le double du stylo. Quel est le prix de chacun ?
2. Un parking propose deux tarifs : le tarif A coûte 3 € d'entrée puis 1,50 € par heure ; le tarif B coûte 6 € d'entrée puis 0,75 € par heure. Pour quelle durée de stationnement les deux tarifs reviennent-ils au même prix ? Quel est alors ce prix ?
3. Marie possède trois fois plus d'argent que Léo. Si Marie donne 20 € à Léo, ils en auront autant l'un que l'autre. Combien chacun possède-t-il ?
4. Un commerçant achète des tee-shirts 12 € pièce et les revend 20 €. Il a par ailleurs 240 € de frais fixes. Combien doit-il en vendre pour que sa recette couvre exactement ses dépenses ?

EXERCICE 25 ⋆⋆

1. Un rectangle a pour largeur 5 cm et pour longueur x cm. Son périmètre est égal à celui d'un carré de côté 7 cm. Déterminer x.
2. Dans un triangle ABC, on a $AB = 2x+1$, $BC = x+4$ et $CA = 3x-2$, exprimés en centimètres. Le périmètre vaut 27 cm. Déterminer x, puis les trois longueurs.
3. Un rectangle de longueur $x+3$ et de largeur 4 a la même aire qu'un rectangle de longueur x et de largeur 6. Déterminer x.
4. Un triangle de base 12 cm et de hauteur x cm a la même aire qu'un rectangle de côtés 4 cm et $x+3$ cm. Déterminer x.

EXERCICE 26 ⋆⋆

Soit x un nombre réel. On considère l'expression :

$$A = (2x-5)^2 - 9$$

1. Développer et réduire A.
2. Factoriser A en reconnaissant une différence de deux carrés.
3. Calculer A pour $x = 0$, puis pour $x = 3$.
4. Résoudre l'équation $A = 0$.
5. Résoudre l'équation $A = 16$.
6. Pour chacune des questions 3, 4 et 5, préciser quelle forme de A (développée ou factorisée) vous avez utilisée, et pourquoi.

EXERCICE 27 ⋆⋆

On considère les trois programmes de calcul suivants.

Programme A	**Programme B**	**Programme C**
• Choisir un nombre • Le multiplier par 4 • Ajouter 6 • Soustraire le double du nombre choisi	• Choisir un nombre • Lui ajouter 3 • Multiplier le résultat par 2	• Choisir un nombre • L'élever au carré • Retrancher 4 • Diviser par le nombre choisi augmenté de 2

1. Appliquer les programmes A et B au nombre 5, puis au nombre -2. Que remarque-t-on ?
2. On note x le nombre choisi. Exprimer en fonction de x le résultat du programme A, puis celui du programme B. Démontrer la remarque de la question 1.
3. Quel nombre faut-il choisir pour que le programme A donne 0 ?
4. Le programme C ne peut pas être appliqué à tous les nombres. Lequel doit-on écarter, et pourquoi ?
5. Montrer que, pour tous les autres nombres, le programme C revient simplement à retrancher 2 au nombre choisi.
6. Quel nombre faut-il choisir pour que le programme C donne 0 ?

EXERCICE 28 ⋆⋆

La méthode de la fausse position. Le papyrus Rhind, rédigé vers 1650 av. J.-C., pose le problème suivant : « *une quantité et son septième font* 19 ».

1. Traduire ce problème par une équation d'inconnue x.
2. Résoudre cette équation par la méthode moderne du chapitre.
3. **La méthode d'Ahmès.** Le scribe essaie d'abord la valeur commode 7 : elle donne $7+1=8$ au lieu de 19. Il multiplie alors sa valeur d'essai par $\frac{19}{8}$. Vérifier que l'on retrouve bien le résultat de la question 2.
4. Appliquer les deux méthodes au problème : « une quantité et son cinquième font 24 ».
5. La méthode de la fausse position appliquée à l'équation $x+\frac{x}{7}+3=19$ donnerait un résultat faux. Le vérifier, puis expliquer pourquoi cette méthode échoue ici.

Exercices de synthèse

EXERCICE 29 ⋆⋆

Résoudre les équations suivantes. Elles sont de tous les types rencontrés dans le chapitre : il faut donc commencer par reconnaître à quel type on a affaire.

a) $5(x-2)=3x+8$

b) $(x-4)(2x+6)=0$

c) $\dfrac{3x-1}{x+2}=0$

d) $x^2=64$

e) $\dfrac{x}{3}-2=\dfrac{x}{5}$

f) $4x^2-9x=0$

g) $\dfrac{x^2-25}{x-5}=0$

h) $2(x+3)=2x+6$

i) $(x+1)^2-4=0$

j) $7-3x=3-3x$

k) $(2x+1)(x-3)=(2x+1)(x+5)$

l) $\dfrac{5x}{x^2+1}=0$

EXERCICE 30 ⋆⋆

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Déterminer laquelle et justifier.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1. La solution de $3x - 7 = 8$ est	5	$\frac{1}{3}$	15
2. Les solutions de $(x-2)(x+6) = 0$ sont	2 et 6	-2 et 6	2 et -6
3. L'équation $x^2 = 16$ admet	une solution	deux solutions	aucune solution
4. L'équation $x^2 = -9$ admet	une solution	deux solutions	aucune solution
5. La valeur interdite de $\frac{x+1}{2x-6}$ est	-1	3	6
6. L'équation $4x + 1 = 4x + 5$ admet	une solution	aucune solution	une infinité de solutions
7. L'équation $3(x-1) = 3x - 3$ admet	une solution	aucune solution	une infinité de solutions
8. Les solutions de $x(x+4) = 0$ sont	0 et 4	0 et -4	-4 seulement

EXERCICE 31 ⋆⋆

Chacune des résolutions suivantes contient une erreur. La repérer, l'expliquer, puis rédiger la résolution correcte.

1. « $3x + 5 = 20$, donc $3x = 25$, donc $x = \frac{25}{3}$. »
2. « $(x-2)(x+3) = 0$, donc $x = 2$ **et** $x = -3$. »
3. « $x^2 = 49$, donc $x = 7$. »
4. « $(x-1)(x+2) = 6$, donc $x - 1 = 6$ ou $x + 2 = 6$, donc $x = 7$ ou $x = 4$. »
5. « $\frac{x^2-9}{x-3} = 0$, donc $x^2 - 9 = 0$, donc $x = 3$ ou $x = -3$. »
6. « $5x = 3x$, on divise les deux membres par x : $5 = 3$. L'équation n'a pas de solution. »

EXERCICE 32 ⋆⋆⋆

Soit x un nombre réel. On considère l'expression :

$$E = (2x+1)^2 - (x-3)^2$$

1. Développer et réduire E.
2. Factoriser E en reconnaissant une différence de deux carrés.
3. Vérifier la cohérence des deux résultats en développant la forme factorisée.
4. Calculer E pour $x = 1$, de deux façons différentes.
5. Résoudre l'équation $E = 0$.

6. Résoudre l'équation $E = -8$.
7. Déterminer les valeurs interdites du quotient $\dfrac{E}{x+4}$, puis résoudre l'équation $\dfrac{E}{x+4} = 0$.
8. Comparer les solutions des questions 5 et 7, et commenter.

EXERCICE 33 ⋆⋆⋆

Dans tout cet exercice, m désigne un nombre réel fixé, et l'inconnue est x.

Partie A. On considère l'équation $(E) : (m-2)x = 6$.

1. Résoudre (E) dans le cas où $m = 5$, puis dans le cas où $m = 0$.
2. Que devient (E) lorsque $m = 2$? Combien de solutions admet-elle alors ?
3. Pour quelles valeurs de m l'équation (E) admet-elle une unique solution ? Exprimer alors cette solution en fonction de m.
4. Déterminer la valeur de m pour laquelle la solution de (E) vaut 1.

Partie B. On considère l'équation $(F) : (m-1)x + 3 = m + 2$.

5. Montrer que (F) peut s'écrire $(m-1)x = m - 1$.
6. Résoudre (F) lorsque $m = 4$, puis lorsque $m = -3$.
7. Que devient (F) lorsque $m = 1$? Combien de solutions admet-elle alors ?
8. Résoudre (F) en discutant selon les valeurs de m.