CORRIGÉ – CHAPITRE 5

GÉOMÉTRIE CARTÉSIENNE

Repères et lecture de coordonnées

EXERCICE 1 ⋆

1. On observe l'angle formé par les deux axes, puis les longueurs OI et OJ.
   - Repère n°1 : les axes ne sont pas perpendiculaires, le repère est quelconque.
   - Repère n°2 : les axes sont perpendiculaires, mais OI est visiblement plus grand que OJ : le repère est orthogonal sans être orthonormé.
   - Repère n°3 : les axes sont perpendiculaires et $OI = OJ$: le repère est orthonormé.
2. La formule du milieu ne fait intervenir ni longueur ni angle : elle reste valable quel que soit le repère.

   Elle s'applique dans les trois repères.
3. La formule de la distance repose sur le théorème de Pythagore, donc sur la présence d'un angle droit entre les axes, et sur le fait que la même unité serve dans les deux directions.

   Elle ne s'applique que dans le repère n°3.

   Attention : le repère n°2 possède bien un angle droit, mais les deux unités diffèrent : la formule y serait fausse.
4. Ces trois points ne se calculent pas, ils sont fixés par la définition même du repère :

   $O(0\,;0)$ $\quad$ $I(1\,;0)$ $\quad$ $J(0\,;1)$

   et ce, dans *chacun* des trois repères.

EXERCICE 2 ⋆

1. On lit d'abord l'abscisse sur l'axe horizontal, puis l'ordonnée sur l'axe vertical :
   - $A(3\,;2)$
   - $B(-2\,;1)$
   - $C(0\,;3)$
   - $D(4\,;-2)$
   - $E(-3\,;-3)$
   - $F(2\,;0)$
   - $G(0\,;-2)$
   - $H(-1\,;4)$
2. Le point F est sur l'axe des abscisses, les points C et G sur l'axe des ordonnées.

   un point de l'axe des abscisses a une **ordonnée** nulle ;
   un point de l'axe des ordonnées a une **abscisse** nulle.
3. Le repère étant orthonormé, la formule de la distance s'applique :

$$OA = \sqrt{(3-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{9+4} = \boxed{\sqrt{13}}$$

$$BH = \sqrt{(-1-(-2))^2 + (4-1)^2} = \sqrt{1+9} = \boxed{\sqrt{10}}$$

4. Milieu de $[AE]$: $\left(\dfrac{3+(-3)}{2}\,;\dfrac{2+(-3)}{2}\right) = \boxed{(0\,;-0{,}5)}$

   Milieu de $[BD]$: $\left(\dfrac{-2+4}{2}\,;\dfrac{1+(-2)}{2}\right) = \boxed{(1\,;-0{,}5)}$

EXERCICE 3 ⋆

1. Les deux axes sont perpendiculaires : le repère est **orthogonal**. En revanche, la longueur OI est bien plus grande que la longueur OJ : l'unité n'est pas la même sur les deux axes.

   $$\boxed{\text{Le repère est orthogonal, mais il n'est pas orthonormé.}}$$

2. On compte les graduations portées sur chaque axe, sans tenir compte de la forme des rectangles du quadrillage :

   - $A(2\,;3)$
   - $B(-1\,;5)$
   - $C(3\,;-2)$
   - $D(0\,;4)$
   - $E(-3\,;-4)$
   - $F(4\,;1)$

3. La formule du milieu est valable dans *tout* repère, donc ici aussi :

   $$\text{milieu de } [AC] : \left(\frac{2+3}{2}\,;\frac{3+(-2)}{2}\right) = \boxed{(2{,}5\,;0{,}5)}$$

   $$\text{milieu de } [BE] : \left(\frac{-1+(-3)}{2}\,;\frac{5+(-4)}{2}\right) = \boxed{(-2\,;0{,}5)}$$

4. La formule $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ se démontre avec le théorème de Pythagore, appliqué à un triangle dont les côtés de l'angle droit mesurent $|x_B-x_A|$ et $|y_B-y_A|$. Or ces deux nombres ne peuvent être comparés que si l'unité est la même sur les deux axes, ce qui n'est pas le cas ici : 1 unité d'abscisse et 1 unité d'ordonnée ne représentent pas la même longueur.

   $$\boxed{\text{Le calcul additionne des longueurs mesurées avec deux étalons différents : il n'a aucun sens.}}$$

EXERCICE 4 ⋆

1. Les axes ne sont pas perpendiculaires : $\boxed{\text{c'est un repère quelconque.}}$
2. On se déplace le long du quadrillage : d'abord un certain nombre de « pas » parallèlement à (OI), puis parallèlement à (OJ).

   - $A(2\,;-1)$
   - $B(3\,;1)$
   - $C(4\,;2)$
   - $D(1\,;2)$
   - $E(-1\,;2)$
   - $F(2\,;0)$
   - $G(-2\,;1)$
   - $H(-1\,;-2)$

   Piège classique : lire les coordonnées « à l'horizontale et à la verticale » donnerait ici des résultats faux, car les axes sont inclinés.

3. Milieu de $[AC]$: $\left(\dfrac{2+4}{2}\,;\dfrac{-1+2}{2}\right) = \boxed{(3\,;0{,}5)}$
   Sur le graphique, ce point se situe bien au milieu du segment tracé de A à C : la formule du milieu fonctionne dans ce repère quelconque.
4. Non. La formule de la distance exige un repère orthonormé, ce qui n'est pas le cas ici :

   $$\boxed{\text{on ne peut rien dire de la longueur } OA \text{ dans ce repère.}}$$

EXERCICE 5 ⋆⋆

1. Les trois points A, B et C ne sont pas alignés : ils forment donc un repère. Les droites (AB) et (AC) n'étant pas perpendiculaires,

   $$\boxed{\text{le repère } (A\,;B,C) \text{ est quelconque.}}$$

2. On compte les mailles du pavage : le premier nombre en suivant la direction (AB), le second en suivant la direction (AC).

- $D(4\,;0)$
- $E(2\,;1)$
- $P(3\,;1)$
- $Q(2\,;2)$
- $V(3\,;2)$
- $R(4\,;3)$
- $S(0\,;3)$
- $T(1\,;2)$
- $U(3\,;3)$

3. Milieu de $[DS]$: $\left(\dfrac{4+0}{2}\,;\dfrac{0+3}{2}\right) = \boxed{(2\,;1{,}5)}$

4. L'origine est maintenant E, et les deux unités sont EP et EQ, qui correspondent exactement aux mêmes déplacements qu'avant. Il suffit donc de retrancher les coordonnées de E, soit $(2\,;1)$, à celles de chaque point :

   - $A(-2\,;-1)$
   - $B(-1\,;-1)$
   - $C(-2\,;0)$
   - $D(2\,;-1)$
   - $R(2\,;2)$
   - $S(-2\,;2)$

5. Le point de coordonnées $(1\,;1)$ dans ce repère s'obtient en partant de E, en avançant d'une maille dans la direction EP puis d'une maille dans la direction EQ :

   $\boxed{\text{c'est le point } V.}$

6. Les coordonnées ont changé, mais aucun point n'a bougé.

   > les coordonnées décrivent la position d'un point *relativement à un repère*, et non le point lui-même.

   Le point S est toujours au même endroit du pavage : il s'appelle $(0\,;3)$ dans le premier repère et $(-2\,;2)$ dans le second.

EXERCICE 6 ⋆⋆

1. Les points O, A et B ne sont pas alignés, donc $(O\,;A,B)$ est un repère. Dans un hexagone régulier, l'angle $\widehat{AOB}$ mesure 60° et non 90° :

   $\boxed{\text{le repère n'est pas orthonormé ; il est quelconque.}}$

   On notera cependant que $OA = OB$, puisque tous les rayons de l'hexagone sont égaux : c'est l'angle, et lui seul, qui empêche le repère d'être orthonormé.

2. Par définition du repère : $\boxed{O(0\,;0) \qquad A(1\,;0) \qquad B(0\,;1)}$

3. On lit sur le quadrillage :

   $$\boxed{C(-1\,;1) \qquad D(-1\,;0) \qquad E(0\,;-1) \qquad F(1\,;-1)}$$

   Vérification par la symétrie : D est diamétralement opposé à A, et l'on trouve bien des coordonnées opposées ; de même pour E et B, ainsi que pour C et F.

4. Milieu de $[AB]$: $\left(\dfrac{1+0}{2}\,;\dfrac{0+1}{2}\right) = \boxed{(0{,}5\,;0{,}5)}$

   Milieu de $[CF]$: $\left(\dfrac{-1+1}{2}\,;\dfrac{1+(-1)}{2}\right) = \boxed{(0\,;0)}$

   Ce dernier milieu est le point O lui-même : $\boxed{[CF] \text{ est une grande diagonale de l'hexagone.}}$

5. Milieu de $[BE]$: $\left(\dfrac{0+0}{2}\,;\dfrac{1+(-1)}{2}\right) = (0\,;0) = O$

   Milieu de $[AD]$: $\left(\dfrac{1+(-1)}{2}\,;\dfrac{0+0}{2}\right) = (0\,;0) = O$

   $\boxed{\text{Les trois grandes diagonales } [AD],\ [BE] \text{ et } [CF] \text{ ont le même milieu } O.}$

   Elles se coupent donc toutes en O, qui est le centre de symétrie de l'hexagone.

6. Les diagonales du quadrilatère $ABCO$ sont $[AC]$ et $[BO]$:

$$\text{milieu de } [AC] : \left(\frac{1+(-1)}{2} ; \frac{0+1}{2}\right) = (0\,;0{,}5)$$

$$\text{milieu de } [BO] : \left(\frac{0+0}{2} ; \frac{1+0}{2}\right) = (0\,;0{,}5)$$

Les deux milieux coïncident : $\boxed{ABCO \text{ est un parallélogramme.}}$

EXERCICE 7 ⋆⋆

Partie A

1. Les points A, I et L ne sont pas alignés : $(A\,;I,L)$ est bien un repère. Les droites (AI) et (AL) portent deux côtés du rectangle : elles sont perpendiculaires, donc le repère est **orthogonal**. En revanche :

$$AI = \frac{AB}{2} = 4 \text{ cm} \qquad \text{et} \qquad AL = \frac{AD}{2} = 2 \text{ cm}$$

$\boxed{AI \neq AL : \text{le repère n'est pas orthonormé.}}$

2. Dans ce repère, une unité d'abscisse vaut AI et une unité d'ordonnée vaut AL :

- $A(0\,;0)$
- $I(1\,;0)$
- $B(2\,;0)$
- $J(2\,;1)$
- $C(2\,;2)$
- $K(1\,;2)$
- $D(0\,;2)$
- $L(0\,;1)$
- $O(1\,;1)$

3. Milieu de $[AC]$: $\left(\frac{0+2}{2} ; \frac{0+2}{2}\right) = (1\,;1)$

Milieu de $[BD]$: $\left(\frac{2+0}{2} ; \frac{0+2}{2}\right) = (1\,;1)$

$\boxed{\text{Ces deux milieux sont le point } O : \text{les diagonales du rectangle se coupent en leur milieu.}}$

4. Le repère n'est pas orthonormé : la formule de la distance ne s'y applique pas. Le calcul proposé additionne deux unités de longueurs différentes (4 cm et 2 cm), et ne peut donc rien donner de correct.

$\boxed{\text{En réalité } AC = 4\sqrt{5} \approx 8{,}9 \text{ cm, et non } 2\sqrt{2} \approx 2{,}8.}$

Partie B

5. L'unité vaut maintenant 1 cm sur les deux axes :

- $A(0\,;0)$
- $I(4\,;0)$
- $B(8\,;0)$
- $J(8\,;2)$
- $C(8\,;4)$
- $K(4\,;4)$
- $D(0\,;4)$
- $L(0\,;2)$
- $O(4\,;2)$

6. Le repère étant orthonormé, on peut enfin appliquer la formule :

$$AC = \sqrt{(8-0)^2+(4-0)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = \boxed{4\sqrt{5} \approx 8{,}9 \text{ cm}}$$

7. On calcule les quatre côtés du quadrilatère $IJKL$:

$$IJ = \sqrt{(8-4)^2+(2-0)^2} = \sqrt{20} \qquad JK = \sqrt{(4-8)^2+(4-2)^2} = \sqrt{20}$$

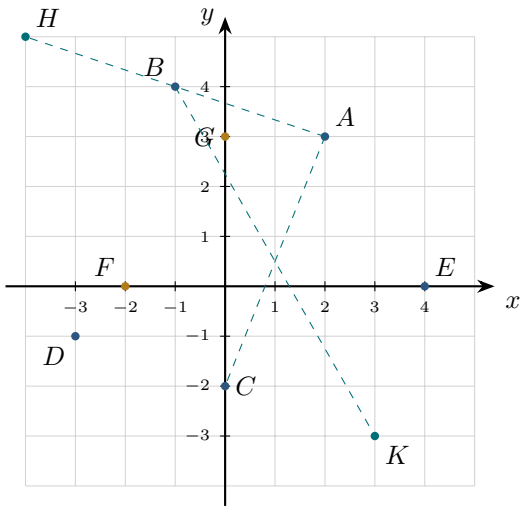
$$KL = \sqrt{(0-4)^2+(2-4)^2} = \sqrt{20} \qquad LI = \sqrt{(4-0)^2+(0-2)^2} = \sqrt{20}$$

Les quatre côtés ont la même longueur :

$\boxed{IJKL \text{ est un losange.}}$

EXERCICE 8 ⋆

Questions 1 à 4. Voici la figure complète.



2. Le point F est sur l'axe des abscisses, donc son ordonnée est nulle : $\boxed{F(-2\,;0)}$. Le point G est sur l'axe des ordonnées, donc son abscisse est nulle : $\boxed{G(0\,;3)}$.

3. Si B est le milieu de $[AH]$, alors $\dfrac{2+x_H}{2} = -1$ et $\dfrac{3+y_H}{2} = 4$, d'où $x_H = -4$ et $y_H = 5$:

$$\boxed{H(-4\,;5)}$$

4. $ABCK$ est un parallélogramme si et seulement si $[AC]$ et $[BK]$ ont le même milieu. Le milieu de $[AC]$ vaut $\left(\dfrac{2+0}{2}\,;\dfrac{3-2}{2}\right) = (1\,;0{,}5)$. Il faut donc $\dfrac{-1+x_K}{2} = 1$ et $\dfrac{4+y_K}{2} = 0{,}5$:

$$\boxed{K(3\,;-3)}$$

Milieu d'un segment

EXERCICE 9 ⋆

On applique la formule $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ *et* $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$ *: les coordonnées du milieu sont les moyennes de celles des extrémités.*

a) $\left(\dfrac{2+6}{2}\,;\dfrac{5+1}{2}\right) = \boxed{(4\,;3)}$

b) $\left(\dfrac{-3+7}{2}\,;\dfrac{4-2}{2}\right) = \boxed{(2\,;1)}$

c) $\left(\dfrac{0+5}{2}\,;\dfrac{0+7}{2}\right) = \boxed{(2{,}5\,;3{,}5)}$

d) $\left(\dfrac{-1-5}{2}\,;\dfrac{-6+2}{2}\right) = \boxed{(-3\,;-2)}$

e) $\left(\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}{2}\,;\dfrac{3-1}{2}\right) = \boxed{\left(\dfrac{3}{2}\,;1\right)}$

f) $\left(\dfrac{-4-4}{2}\,;\dfrac{7-3}{2}\right) = \boxed{(-4\,;2)}$

g) $\left(\dfrac{0{,}5+2{,}5}{2}\,;\dfrac{1{,}5-0{,}5}{2}\right) = \boxed{(1{,}5\,;0{,}5)}$

h) $\left(\dfrac{-7+3}{2}\,;\dfrac{2+2}{2}\right) = \boxed{(-2\,;2)}$

i) $\left(\dfrac{1-1}{2}\,;\dfrac{-1+1}{2}\right) = \boxed{(0\,;0)}$

j) $\left(\dfrac{-2{,}5+3{,}5}{2}\,;\dfrac{4-1}{2}\right) = \boxed{(0{,}5\,;1{,}5)}$

Interprétations.

- Question f) : A et B ont la même abscisse -4, donc le milieu aussi. Le segment $[AB]$ est « vertical », parallèle à l'axe des ordonnées.
- Question h) : A et B ont la même ordonnée 2 : le segment est « horizontal ».
- Question i) : le milieu est l'origine du repère, donc A et B sont symétriques par rapport à O.

EXERCICE 10 ⋆

On écrit la formule du milieu, puis on résout l'équation obtenue. Détaillons la première :

$$\frac{-1+x_B}{2}=3 \iff -1+x_B=6 \iff x_B=7 \quad ; \quad \frac{5+y_B}{2}=2 \iff 5+y_B=4 \iff y_B=-1$$

$$\boxed{B(7\,;-1)}$$

b) $\boxed{B(-2\,;-9)}$

c) $\boxed{A(-7\,;6)}$

d) $\boxed{B(5\,;5)}$

e) $\boxed{B(-3\,;-8)}$

f) $\boxed{B(-1\,;4)}$

On remarque que l'on retrouve à chaque fois le point cherché par le calcul $x_B=2x_M-x_A$, ce qui est simplement la formule du milieu réarrangée.

EXERCICE 11 ⋆

Dire que A' est le symétrique de A par rapport à B signifie exactement que B est le milieu de $[AA']$.

1. $\frac{3+x}{2}=1$ donne $x=-1$, et $\frac{-2+y}{2}=4$ donne $y=10$: $\boxed{(-1\,;10)}$
2. Le symétrique par rapport à l'origine s'obtient en changeant les deux signes : $\boxed{(5\,;-1)}$
3. $\frac{2+x}{2}=2$ donne $x=2$, et $\frac{7+y}{2}=3$ donne $y=-1$: $\boxed{(2\,;-1)}$
   Les points D, E et le symétrique ont tous la même abscisse 2 : ils sont alignés sur une même verticale, ce qui est logique puisque D et E le sont déjà.
4. Le milieu de $[GF]$ vaut $\left(\frac{0+4}{2}\,;\frac{5-1}{2}\right)=(2\,;2)$, qui est exactement le point H :

   $\boxed{\text{oui, } F \text{ est bien le symétrique de } G \text{ par rapport à } H.}$

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. Milieu de $[AC]$: $\left(\frac{-2+3}{2}\,;\frac{1+0}{2}\right)=(0{,}5\,;0{,}5)$.
   Milieu de $[BD]$: $\left(\frac{1+0}{2}\,;\frac{3-2}{2}\right)=(0{,}5\,;0{,}5)$.
   Les deux milieux coïncident : $\boxed{ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$
2. Milieu de $[AC]$: $(3\,;1)$; milieu de $[BD]$: $(3\,;2)$.
   Les deux milieux diffèrent : $\boxed{ABCD \text{ n'est pas un parallélogramme.}}$
3. Le milieu de $[AC]$ vaut $\left(\frac{-1+4}{2}\,;\frac{3+1}{2}\right)=(1{,}5\,;2)$. Il doit être aussi le milieu de $[BD]$:

$$\frac{2+x_D}{2}=1{,}5 \iff x_D=1 \quad ; \quad \frac{5+y_D}{2}=2 \iff y_D=-1$$

$$\boxed{D(1\,;-1)}$$

4. **Pour** $ABEC$, les diagonales sont $[AE]$ et $[BC]$. Le milieu de $[BC]$ vaut $(3\,;3)$, d'où $E = \boxed{(7\,;3)}$.
   Pour $AFBC$, les diagonales sont $[AB]$ et $[FC]$. Le milieu de $[AB]$ vaut $(0{,}5\,;4)$, d'où $F = \boxed{(-3\,;7)}$.
5. Trois points non alignés étant donnés, chacun des trois peut jouer le rôle du sommet « opposé » au quatrième :

   $$\boxed{\text{il existe exactement 3 points possibles.}}$$

   Ici ce sont $D(1\,;-1)$, $E(7\,;3)$ et $F(-3\,;7)$.

EXERCICE 13 ⋆⋆

1. $I = \left(\dfrac{-4+2}{2}\,;\dfrac{2+6}{2}\right) = \boxed{(-1\,;4)}$ $\quad$ $J = \left(\dfrac{2+6}{2}\,;\dfrac{6-2}{2}\right) = \boxed{(4\,;2)}$

   $K = \left(\dfrac{6+2}{2}\,;\dfrac{-2-4}{2}\right) = \boxed{(4\,;-3)}$ $\quad$ $L = \left(\dfrac{2-4}{2}\,;\dfrac{-4+2}{2}\right) = \boxed{(-1\,;-1)}$
2. Milieu de $[AC]$: $(1\,;0)$; $\quad$ milieu de $[BD]$: $(2\,;1)$. Les deux milieux sont différents :

   $$\boxed{ABCD \text{ n'est pas un parallélogramme.}}$$

3. Milieu de $[IK]$: $\left(\dfrac{-1+4}{2}\,;\dfrac{4-3}{2}\right) = (1{,}5\,;0{,}5)$.

   Milieu de $[JL]$: $\left(\dfrac{4-1}{2}\,;\dfrac{2-1}{2}\right) = (1{,}5\,;0{,}5)$.

   $$\boxed{IJKL \text{ est un parallélogramme.}}$$

4. Non, le résultat ne dépend pas des points choisis. C'est un théorème général : **en joignant les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque, on obtient toujours un parallélogramme.** L'exemple est d'ailleurs frappant ici, puisque le quadrilatère de départ, lui, n'en était pas un.

EXERCICE 14 ⋆⋆

1. Les points C, I et B ne sont pas alignés : c'est bien un repère. Les droites (CI) et (CB) portent deux côtés du carré $CBKJ$, elles sont donc perpendiculaires : le repère est **orthogonal**. En revanche, les codages montrent que

   $$CI = CJ + JI = 2 \times DC \qquad \text{alors que} \qquad CB = DC$$

   $$\boxed{CI = 2\,CB \text{ : le repère n'est pas orthonormé.}}$$

2. Une unité d'abscisse vaut CI, soit *deux* côtés de carré, tandis qu'une unité d'ordonnée vaut CB, soit *un* côté. Les abscisses comportent donc des demis :

   - $A(-0{,}5\,;1)$
   - $B(0\,;1)$
   - $C(0\,;0)$
   - $D(-0{,}5\,;0)$
   - $E(-1{,}5\,;0)$
   - $F(-0{,}5\,;-1)$
   - $G(0{,}5\,;-1)$
   - $H(1{,}5\,;0)$
   - $I(1\,;0)$
   - $J(0{,}5\,;0)$
   - $K(0{,}5\,;1)$

   Comment obtient-on E et H ? Les codages donnent $CJ = JI = IH = DC$, donc CH vaut trois côtés de carré, soit 1,5 unité. Et comme (BC) est un axe de symétrie, E est le symétrique de H, d'où $E(-1{,}5\,;0)$.
3. $M = \left(\dfrac{-1{,}5+(-0{,}5)}{2}\,;\dfrac{0+(-1)}{2}\right) = \boxed{(-1\,;-0{,}5)}$

4. $N = \left(\dfrac{0{,}5+1{,}5}{2} ; \dfrac{-1+0}{2}\right) = \boxed{(1\,;-0{,}5)}$

5. Les points $M(-1\,;-0{,}5)$ et $N(1\,;-0{,}5)$ ont des **abscisses opposées** et la **même ordonnée**. L'axe (BC) étant l'axe des ordonnées du repère, cela signifie exactement que M et N sont symétriques par rapport à lui.

   Deux points symétriques par rapport à (BC) ont des abscisses opposées et la même ordonnée.

6. Non. La formule de la distance exige un repère orthonormé, or celui-ci ne l'est pas : les unités diffèrent sur les deux axes.

   Le calcul est interdit dans ce repère.

   On peut cependant conclure autrement : EH vaut six côtés de carré, d'après les codages et la symétrie.

Distance entre deux points

EXERCICE 15 ⋆

On applique $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Détaillons la première :

$$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

a) $\sqrt{9+16} = \boxed{5}$

b) $\sqrt{16+9} = \boxed{5}$

c) $\sqrt{25+144} = \boxed{13}$

d) $\sqrt{36+64} = \boxed{10}$

e) $\sqrt{9+0} = \boxed{3}$

f) $\sqrt{0+49} = \boxed{7}$

g) $\sqrt{1+1} = \boxed{\sqrt{2}}$

h) $\sqrt{25+25} = \sqrt{50} = \boxed{5\sqrt{2}}$

i) $\sqrt{25+144} = \boxed{13}$

j) $\sqrt{64+36} = \boxed{10}$

Sans la formule. Question e) : A et B ont la même ordonnée, le segment est horizontal et sa longueur est l'écart des abscisses, soit $4-1=3$. Question f) : A et B ont la même abscisse, le segment est vertical et sa longueur vaut $3-(-4)=7$.

EXERCICE 16 ⋆

On calcule les trois longueurs et l'on compare. On garde les racines carrées : arrondir empêcherait toute comparaison exacte.

1. $AB = \sqrt{36+0} = 6$, $\quad AC = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$, $\quad BC = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$.
   Deux côtés sont égaux : $\boxed{ABC \text{ est isocèle en } C.}$
   Il n'est pas rectangle : $AC^2 + BC^2 = 68$ alors que $AB^2 = 36$, et le plus grand côté est $\sqrt{34}$, pour lequel $34 \neq 36 + 34$.

2. $AB = \sqrt{16} = 4$, $\quad BC = \sqrt{0+9} = 3$, $\quad AC = \sqrt{16+9} = 5$.
   Le plus grand côté est $[AC]$, et $AB^2 + BC^2 = 16 + 9 = 25 = AC^2$:

   $\boxed{ABC \text{ est rectangle en } B \text{ (et non isocèle).}}$

3. $AB = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$, $\quad AC = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$, $\quad BC = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$.
   On a $AB = AC$, et $AB^2 + AC^2 = 20 + 20 = 40 = BC^2$:

   $\boxed{ABC \text{ est rectangle isocèle en } A.}$

4. $AB = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$, $\quad AC = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$, $\quad BC = \sqrt{9+16} = 5$.
Les trois longueurs sont différentes, et $AB^2 + BC^2 = 17 + 25 = 42 \neq 26$:

$$\boxed{ABC \text{ est un triangle quelconque.}}$$

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. $AB^2 = 16 + 4 = 20$, $\quad BC^2 = 4 + 16 = 20$, $\quad AC^2 = 4 + 36 = 40$.
Le plus grand carré est $AC^2 = 40$, et $AB^2 + BC^2 = 20 + 20 = 40$:

$$\boxed{ABC \text{ est rectangle en } B \text{ (et même isocèle).}}$$

2. $AB^2 = 36 + 4 = 40$, $\quad AC^2 = 4 + 36 = 40$, $\quad BC^2 = 16 + 64 = 80$.
On a $AB^2 + AC^2 = 80 = BC^2$: $\boxed{ABC \text{ est rectangle isocèle en } A.}$

3. $AB^2 = 9 + 1 = 10$, $\quad AC^2 = 1 + 16 = 17$, $\quad BC^2 = 4 + 9 = 13$.
Le plus grand carré est 17, et $10 + 13 = 23 \neq 17$:

$$\boxed{ABC \text{ n'est pas rectangle.}}$$

4. Le triangle de la question 1 est rectangle en B, ses côtés de l'angle droit mesurent $AB = BC = \sqrt{20}$:

$$\text{Aire} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{\sqrt{20} \times \sqrt{20}}{2} = \frac{20}{2} = \boxed{10}$$

On remarque que travailler sur les carrés des longueurs évite toute racine carrée jusqu'au bout : c'est plus rapide et plus sûr.

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. Un point appartient au cercle si sa distance au centre A vaut exactement 5, donc si le carré de cette distance vaut 25 :

$$AB^2 = 9 + 16 = 25 \qquad AC^2 = 9 + 16 = 25 \qquad AD^2 = 16 + 9 = 25 \qquad AE^2 = 4 + 1 = 5$$

Les trois premiers valent bien 25, le dernier non.

$$\boxed{B,\ C \text{ et } D \text{ appartiennent à } \mathcal{C}\,;\ E \text{ non.}}$$

2. Un point de l'axe des abscisses s'écrit $M(x\,;0)$. La condition $FM = 5$ s'écrit :

$$(x-3)^2 + (0-4)^2 = 25 \iff (x-3)^2 + 16 = 25 \iff (x-3)^2 = 9$$

d'où $x - 3 = 3$ ou $x - 3 = -3$:

$$\boxed{(6\,;0) \quad \text{et} \quad (0\,;0)}$$

3. Un point de l'axe des ordonnées s'écrit $M(0\,;y)$. La condition $GM = HM$ s'écrit, en passant aux carrés :

$$4 + (y-1)^2 = 16 + (y-3)^2 \iff 4 + y^2 - 2y + 1 = 16 + y^2 - 6y + 9$$

$$\iff -2y + 5 = -6y + 25 \iff 4y = 20 \iff y = 5$$

$$\boxed{(0\,;5)}$$

Vérification : $\sqrt{4+16} = \sqrt{20}$ des deux côtés.

4. $KL^2 = 9 + 1 = 10$ et $KM^2 = 1 + 9 = 10$, donc $KL = KM$:

K est équidistant de L et M : il appartient à la médiatrice de $[LM]$.

EXERCICE 19 ⋆⋆

1. Milieux des diagonales : $[AC]$ donne $(0{,}5\,;0{,}5)$ et $[BD]$ aussi : c'est un parallélogramme. Les quatre côtés valent tous $\sqrt{13}$, c'est donc un losange. Enfin $AC = \sqrt{26}$ et $BD = \sqrt{26}$: les diagonales sont égales.

$ABCD$ est un carré.

2. Milieux des diagonales : $(1{,}5\,;2)$ des deux côtés, c'est un parallélogramme. On a $AB^2 = 20$ et $BC^2 = 5$: les côtés consécutifs diffèrent, ce n'est pas un losange. En revanche $AC^2 = 25$ et $BD^2 = 25$:

$ABCD$ est un rectangle (non carré).

3. Milieux des diagonales : $(3{,}5\,;3)$ des deux côtés, c'est un parallélogramme. Mais $AB^2 = 17$ et $BC^2 = 10$ (pas un losange), et $AC^2 = 41$ tandis que $BD^2 = 13$ (pas un rectangle) :

$ABCD$ est un parallélogramme quelconque.

Applications Python

EXERCICE 20 ⋆

1. Le programme calcule $\dfrac{-2+6}{2} = 2$ et $\dfrac{5+1}{2} = 3$:

`milieu(-2, 5, 6, 1)` renvoie `(2.0, 3.0)`

Python affiche 2.0 *et non* 2 *:* la division `/` produit toujours un nombre décimal.

2.
```
from math import sqrt

def distance(xA, yA, xB, yB):
    return sqrt((xB - xA)**2 + (yB - yA)**2)
```

3. $\sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{25} = 5$, donc `distance(1, 2, 4, 6)` renvoie `5.0`

4. Le symétrique vérifie $x_B = 2x_M - x_A$ et $y_B = 2y_M - y_A$:

```
def symetrique(xA, yA, xM, yM):
    xB = 2*xM - xA
    yB = 2*yM - yA
    return xB, yB
```

5. L'appel `symetrique(3, -2, 1, 4)` renvoie `(-1, 10)`, ce qui confirme le résultat trouvé à la main.

EXERCICE 21 ⋆⋆

1. Le triangle a pour côtés 6, $\sqrt{34}$ et $\sqrt{34}$: il est isocèle, donc

   `est_isocele(0, 0, 6, 0, 3, 5)` renvoie `True`

2. En reprenant les quatre triangles de l'exercice 16 :

   `True` `False` `True` `False`

   Seuls les triangles 1 et 3 sont isocèles.

3. La fonction `sqrt` ne renvoie qu'une **valeur approchée**. Deux longueurs théoriquement égales, comme $\sqrt{34}$ et $\sqrt{34}$, peuvent être calculées par deux chemins différents et différer de très peu dans la mémoire de la machine — par exemple 5,830951894845301 et 5,830951894845300. Le test `AB == AC` renvoie alors `False` alors que le triangle est bel et bien isocèle.

4. On compare les carrés des longueurs, qui sont des entiers lorsque les coordonnées le sont :

```
def carre_distance(xA, yA, xB, yB):
    return (xB - xA)**2 + (yB - yA)**2

def est_rectangle(xA, yA, xB, yB, xC, yC):
    AB = carre_distance(xA, yA, xB, yB)
    AC = carre_distance(xA, yA, xC, yC)
    BC = carre_distance(xB, yB, xC, yC)
    if AB + AC == BC or AB + BC == AC or AC + BC == AB:
        return True
    else:
        return False
```

   Pourquoi est-ce plus fiable ? Aucune racine carrée n'apparaît : tous les calculs se font sur des entiers, que la machine manipule de façon **exacte**. Le test d'égalité est alors parfaitement sûr.

Exercices de synthèse

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. **Réponse A.** $\left(\frac{2+6}{2}\,;\frac{5+1}{2}\right) = (4\,;3)$. La réponse B additionne les coordonnées sans diviser par 2.
2. **Réponse B.** De $\frac{1+x_B}{2} = 3$ on tire $x_B = 5$, et de $\frac{-2+y_B}{2} = 1$ on tire $y_B = 4$.
3. **Réponse A.** $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$. La réponse C oublie la racine carrée.
4. **Réponse C.** La démonstration utilise le théorème de Pythagore : il faut un angle droit entre les axes, et la même unité sur les deux.
5. **Réponse A.** La formule du milieu ne fait intervenir ni longueur ni angle.
6. **Réponse B.** Son abscisse est nulle, il est donc sur l'axe des ordonnées.
7. **Réponse B.** C'est le critère du cours : les *diagonales* ont le même milieu. La réponse A concerne deux côtés opposés, et donnerait un quadrilatère croisé.
8. **Réponse B.** $AB = 4$, $AC = 3$ et $BC = \sqrt{16+9} = 5$, et $16 + 9 = 25$: le triangle est rectangle en A. Il n'est ni isocèle ni équilatéral.

EXERCICE 23 ⋆⋆

1. **Vraie**. C'est la propriété 1 du cours, valable dans n'importe quel repère.
2. **Fausse**. Cette formule exige un repère **orthonormé**. *Contre-exemple :* dans le repère de l'exercice 3, les deux axes n'ont pas la même unité et le calcul n'a aucun sens.
3. **Vraie**. Le point I est celui qui *définit* l'unité sur l'axe des abscisses : ses coordonnées sont $(1\,;0)$ par construction, dans tout repère.
4. **Fausse**. Le cours précise que tout point est repéré par un **unique** couple. Dans un repère donné, les coordonnées d'un point sont uniques.
5. **Vraie**. C'est la définition d'un triangle isocèle en A : les deux côtés issus de A ont la même longueur.
6. **Vraie**. C'est la réciproque du théorème de Pythagore. *Attention à l'ordre :* c'est le côté $[BC]$, opposé au sommet A, dont le carré est la somme des deux autres.
7. **Fausse**. C'est même tout le contraire. *Contre-exemple :* à l'exercice 5, le point S a pour coordonnées $(0\,;3)$ dans le premier repère et $(-2\,;2)$ dans le second, sans avoir bougé.
8. **Fausse**. Le premier a pour abscisse 3 et pour ordonnée 1, le second l'inverse : ce sont deux points distincts. L'ordre des coordonnées est essentiel.

EXERCICE 24 ⋆⋆

1. Milieu de $[AC]$: $\left(\dfrac{-3+5}{2}\,;\dfrac{1-1}{2}\right) = (1\,;0)$.
   Milieu de $[BD]$: $\left(\dfrac{1+1}{2}\,;\dfrac{3-3}{2}\right) = (1\,;0)$.
   Les deux diagonales ont le même milieu :

   $$\boxed{ABCD \text{ est un parallélogramme, de centre } (1\,;0).}$$

2. $AB = \sqrt{(1+3)^2+(3-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
   $BC = \sqrt{(5-1)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
   Ces deux côtés consécutifs sont de longueurs différentes :

   $$\boxed{ABCD \text{ n'est pas un losange.}}$$

3. $AC = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$ et $BD = \sqrt{0+36} = 6$.
   Or $\sqrt{68} \neq 6$ (puisque $6^2 = 36 \neq 68$) :

   $$\boxed{ABCD \text{ n'est pas un rectangle.}}$$

4. $\boxed{ABCD \text{ est un parallélogramme quelconque.}}$
5. Dans un parallélogramme, les côtés opposés ont la même longueur :

   $$\mathcal{P} = 2\,(AB+BC) = 2\left(2\sqrt{5}+4\sqrt{2}\right) = \boxed{4\sqrt{5}+8\sqrt{2} \approx 20{,}3}$$

6. Si B était le milieu de $[AE]$, on aurait $\dfrac{-3+9}{2} = 3$, or l'abscisse de B vaut 1 et non 3.

   $$\boxed{\text{Non, } B \text{ n'est pas le milieu de } [AE].}$$

EXERCICE 25 ⋆⋆

1. $I = \left(\dfrac{1+5}{2} ; \dfrac{2+4}{2}\right) = \boxed{(3\,;3)}$ et $AB = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = \boxed{2\sqrt{5}}$

2. $CA^2 = (1-6)^2 + (2+1)^2 = 25 + 9 = 34$ et $CB^2 = (5-6)^2 + (4+1)^2 = 1 + 25 = 26$.

$\boxed{34 \neq 26 \text{ : le point } C \text{ n'est pas équidistant de } A \text{ et } B.}$

3. $DA^2 = (1-4)^2 + (2-1)^2 = 9 + 1 = 10$ et $DB^2 = (5-4)^2 + (4-1)^2 = 1 + 9 = 10$.

$\boxed{DA = DB = \sqrt{10} \text{ : le point } D \text{ est bien équidistant de } A \text{ et } B.}$

4. Un point de l'axe des abscisses s'écrit $M(x\,;0)$. On écrit $MA^2 = MB^2$:

$$(x-1)^2 + 4 = (x-5)^2 + 16 \iff x^2 - 2x + 1 + 4 = x^2 - 10x + 25 + 16$$

$$\iff -2x + 5 = -10x + 41 \iff 8x = 36 \iff x = 4{,}5$$

$\boxed{(4{,}5\,;0)}$

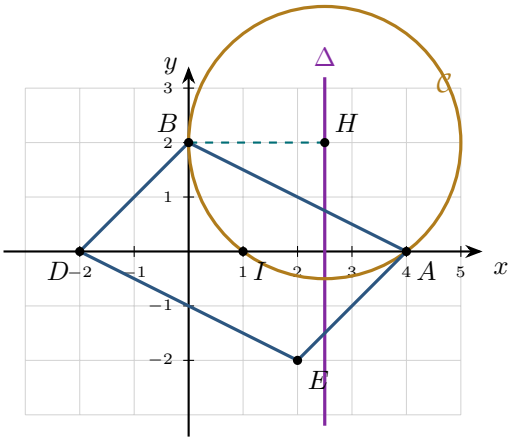
5. Les points I et D sont tous deux équidistants de A et de B — I parce qu'il est le milieu de $[AB]$, D d'après la question 3.

$\boxed{(ID) \text{ est la médiatrice du segment } [AB].}$

On remarque que le point trouvé à la question 4 est lui aussi sur cette droite : les points équidistants de A et B forment bien une droite entière, et non quelques points isolés.

EXERCICE 26 ⋆⋆

1. Voici la figure complète.



2. La médiatrice de $[IA]$ est perpendiculaire à (IA) et passe par le milieu de $[IA]$. Comme $I(1\,;0)$ et $A(4\,;0)$ sont tous deux sur l'axe des abscisses, ce milieu vaut $\left(\dfrac{1+4}{2} ; 0\right) = (2{,}5\,;0)$, et Δ est la droite **verticale** passant par ce point : tous ses points ont pour abscisse 2,5.
La perpendiculaire à l'axe des ordonnées passant par $B(0\,;2)$ est la droite **horizontale** d'ordonnée 2. Le point H appartient aux deux :

$\boxed{H(2{,}5\,;2)}$

3. Le rayon du cercle est HI. On calcule les deux distances :

$$HI^2 = (1-2{,}5)^2 + (0-2)^2 = 2{,}25 + 4 = 6{,}25 \qquad \text{donc} \qquad HI = 2{,}5$$

$$HA^2 = (4-2{,}5)^2 + (0-2)^2 = 2{,}25 + 4 = 6{,}25 \qquad \text{donc} \qquad HA = 2{,}5$$

$\boxed{HA = HI \text{ : le point } A \text{ appartient au cercle } \mathcal{C}.}$

C'était prévisible : H est sur la médiatrice de $[IA]$, donc équidistant de I et de A.

4. B **appartient au cercle :**

$$HB^2 = (0-2{,}5)^2 + (2-2)^2 = 6{,}25 \qquad \text{donc} \qquad HB = 2{,}5 = \text{rayon}$$

Le rayon $[HB]$ est perpendiculaire à l'axe des ordonnées : les points $H(2{,}5\,;2)$ et $B(0\,;2)$ ont la même ordonnée, donc $[HB]$ est horizontal, tandis que l'axe des ordonnées est vertical.

$\boxed{\text{L'axe des ordonnées est tangent au cercle } \mathcal{C} \text{ au point } B.}$

5. Les diagonales de $ABDE$ sont $[AD]$ et $[BE]$:

$$\text{milieu de } [AD] : \left(\frac{4-2}{2}\,;\frac{0+0}{2}\right) = (1\,;0)$$

$$\text{milieu de } [BE] : \left(\frac{0+2}{2}\,;\frac{2-2}{2}\right) = (1\,;0)$$

$\boxed{ABDE \text{ est un parallélogramme, de centre } I.}$

6. $AB^2 = (0-4)^2 + (2-0)^2 = 16 + 4 = 20$ et $BD^2 = (-2-0)^2 + (0-2)^2 = 4 + 4 = 8$.

$\boxed{20 \neq 8 : ABDE \text{ n'est pas un losange.}}$

EXERCICE 27 ⋆⋆

1. $I = \boxed{(4\,;0)}$ $J = \boxed{(8\,;2)}$ $K = \boxed{(4\,;4)}$ $L = \boxed{(0\,;2)}$
2. $IJ = \sqrt{(8-4)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{20}$, et de même

$$JK = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \qquad KL = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \qquad LI = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

Les quatre côtés ont la même longueur : $\boxed{IJKL \text{ est un losange.}}$

3. $IK = \sqrt{0+16} = 4$ et $JL = \sqrt{64+0} = 8$.
Les diagonales n'ont pas la même longueur :

$\boxed{IJKL \text{ n'est pas un carré.}}$

4. $\boxed{IJKL \text{ est un losange non carré.}}$
5. Avec le carré $A(0\,;0)$, $B(6\,;0)$, $C(6\,;6)$, $D(0\,;6)$, on obtient

$$I(3\,;0) \qquad J(6\,;3) \qquad K(3\,;6) \qquad L(0\,;3)$$

Les quatre côtés valent $\sqrt{9+9} = \sqrt{18}$, et les diagonales $IK = 6$ et $JL = 6$ sont égales :

$\boxed{IJKL \text{ est alors un carré.}}$

Conclusion générale : en joignant les milieux des côtés d'un rectangle on obtient un losange, et si le rectangle est un carré, ce losange est lui-même un carré.

EXERCICE 28 ⋆⋆⋆

1. $MA^2 = (0-m)^2 + (0-3)^2 = \boxed{m^2+9}$

   $MB^2 = (4-m)^2 + (0-3)^2 = 16 - 8m + m^2 + 9 = \boxed{m^2 - 8m + 25}$

2. Le triangle est isocèle en M si et seulement si $MA = MB$, c'est-à-dire $MA^2 = MB^2$:

$$m^2 + 9 = m^2 - 8m + 25 \iff 9 = -8m + 25 \iff 8m = 16 \iff \boxed{m = 2}$$

   Interprétation : M est alors à l'aplomb du milieu de $[AB]$, ce qui est bien la position attendue.

3. $MA = 5$ équivaut à $MA^2 = 25$, soit

$$m^2 + 9 = 25 \iff m^2 = 16 \iff \boxed{m = 4 \text{ ou } m = -4}$$

   Il y a bien deux solutions : deux points de la droite d'ordonnée 3 sont à distance 5 de l'origine.

4. Le triangle est rectangle en A si et seulement si $AM^2 + AB^2 = MB^2$. Comme $AB^2 = 16$:

$$m^2 + 9 + 16 = m^2 - 8m + 25 \iff 25 = -8m + 25 \iff \boxed{m = 0}$$

   Le point $M(0\,;3)$ est alors situé à la verticale de A, ce qui donne bien un angle droit en A.

5. (a) Le triangle est rectangle en M si et seulement si $MA^2 + MB^2 = AB^2$:

$$m^2 + 9 + m^2 - 8m + 25 = 16 \iff 2m^2 - 8m + 34 = 16 \iff 2m^2 - 8m + 18 = 0$$

   et en divisant par 2 :

$$\boxed{m^2 - 4m + 9 = 0}$$

   (b) On développe le membre de droite :

$$(m-2)^2 + 5 = m^2 - 4m + 4 + 5 = m^2 - 4m + 9$$

   L'égalité est bien vérifiée.

   (c) Un carré étant toujours positif ou nul, on a $(m-2)^2 + 5 \geqslant 5 > 0$ pour tout réel m : l'équation $m^2 - 4m + 9 = 0$ n'a donc aucune solution.

$$\boxed{\text{Il n'existe aucune valeur de } m \text{ pour laquelle } ABM \text{ est rectangle en } M.}$$

   Interprétation géométrique : un tel point M devrait se trouver sur le cercle de diamètre $[AB]$, dont le rayon vaut 2 et le centre $(2\,;0)$. Or ce cercle ne monte pas au-dessus de l'ordonnée 2, tandis que M est toujours à l'ordonnée 3.

EXERCICE 29 ⋆⋆⋆

1. Milieu de $[AC]$: $\left(\dfrac{0+4}{2}\,;\dfrac{0+7}{2}\right) = (2\,;3{,}5)$.

   Milieu de $[BD]$: $\left(\dfrac{6-2}{2}\,;\dfrac{3+4}{2}\right) = (2\,;3{,}5)$.

$$\boxed{ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$$

2. $AB^2 = 36 + 9 = 45$, $\quad BC^2 = (4-6)^2 + (7-3)^2 = 4 + 16 = 20$, $\quad AC^2 = 16 + 49 = 65$.
   Or $AB^2 + BC^2 = 45 + 20 = 65 = AC^2$:

$$\boxed{\text{d'après la réciproque du théorème de Pythagore, } ABC \text{ est rectangle en } B.}$$

3. Un parallélogramme possédant un angle droit est un rectangle :

$$\boxed{ABCD \text{ est un rectangle.}}$$

4. $AC = \sqrt{65}$ et $BD = \sqrt{(-2-6)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$.
Les diagonales du parallélogramme sont égales, ce qui caractérise également le rectangle : on retrouve donc le même résultat par un autre chemin.

5. $AB = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ et $BC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$$\mathcal{P} = 2\left(3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}\right) = 2 \times 5\sqrt{5} = \boxed{10\sqrt{5} \approx 22{,}4}$$

$$\mathcal{A} = AB \times BC = 3\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 6 \times 5 = \boxed{30}$$

On remarque que l'aire tombe sur un entier, alors qu'aucun côté n'est entier.

6. Un carré est un rectangle dont deux côtés consécutifs sont égaux. Or $3\sqrt{5} \neq 2\sqrt{5}$:

$$\boxed{ABCD \text{ n'est pas un carré.}}$$

7. Le centre est le milieu commun des diagonales, soit $\Omega(2\,;3{,}5)$. On calcule :

$$\Omega A^2 = 4 + 12{,}25 = 16{,}25 \qquad \Omega B^2 = 16 + 0{,}25 = 16{,}25$$

$$\Omega C^2 = 4 + 12{,}25 = 16{,}25 \qquad \Omega D^2 = 16 + 0{,}25 = 16{,}25$$

Les quatre distances sont égales à $\sqrt{16{,}25} = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$:

$$\boxed{\Omega \text{ est équidistant des quatre sommets.}}$$

Propriété retrouvée : les quatre sommets d'un rectangle sont sur un même cercle, dont le centre est le point d'intersection des diagonales et le diamètre la longueur d'une diagonale.

EXERCICE 30 ⋆⋆⋆

1. L'origine du repère est A, donc $A(0\,;0)$. Le point B est sur l'axe des abscisses, à la distance $AB = c$ de l'origine :

$$\boxed{A(0\,;0) \qquad B(c\,;0)}$$

2. I est le milieu de $[AB]$:

$$I = \left(\frac{0+c}{2}\,;\frac{0+0}{2}\right) = \boxed{\left(\frac{c}{2}\,;0\right)}$$

3. Le repère étant orthonormé, on applique la formule de la distance entre $I\left(\frac{c}{2}\,;0\right)$ et $C\left(x_C\,;y_C\right)$:

$$L^2 = IC^2 = \left(x_C - \frac{c}{2}\right)^2 + (y_C - 0)^2$$

En développant l'identité remarquable :

$$L^2 = x_C^2 - 2 \times x_C \times \frac{c}{2} + \frac{c^2}{4} + y_C^2 = \boxed{x_C^2 + y_C^2 - c\,x_C + \frac{c^2}{4}}$$

4. **Longueur** $a = BC$, entre $B(c\,;0)$ et $C\left(x_C\,;y_C\right)$:

$$a^2 = (x_C - c)^2 + y_C^2 = \boxed{x_C^2 - 2c\,x_C + c^2 + y_C^2}$$

Longueur $b = AC$, entre $A(0\,;0)$ et $C\left(x_C\,;y_C\right)$:

$$b^2 = \boxed{x_C^2 + y_C^2}$$

5. Partons du membre de droite de la formule d'Anselme et remplaçons :

$$\frac{1}{4}\left(2a^2+2b^2-c^2\right)=\frac{1}{4}\Big(2\left(x_C^2-2c\,x_C+c^2+y_C^2\right)+2\left(x_C^2+y_C^2\right)-c^2\Big)$$

$$=\frac{1}{4}\left(2x_C^2-4c\,x_C+2c^2+2y_C^2+2x_C^2+2y_C^2-c^2\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(4x_C^2+4y_C^2-4c\,x_C+c^2\right)=x_C^2+y_C^2-c\,x_C+\frac{c^2}{4}$$

On reconnaît exactement l'expression de L^2 obtenue à la question 3 :

$$\boxed{L^2=\frac{1}{4}\left(2a^2+2b^2-c^2\right)}$$

La formule du vieux livre est donc démontrée.

Ce qui a rendu la preuve possible : le choix du repère. En plaçant A à l'origine et B sur l'axe des abscisses, on n'a laissé que deux inconnues, x_C et y_C, et celles-ci disparaissent d'elles-mêmes à la fin.

6. Avec $a=7$, $b=5$ et $c=8$:

$$L^2=\frac{1}{4}\left(2\times 49+2\times 25-64\right)=\frac{1}{4}\left(98+50-64\right)=\frac{84}{4}=21$$

$$\boxed{L=\sqrt{21}\approx 4{,}6}$$