CORRIGÉ – CHAPITRE 7

FONCTIONS NUMÉRIQUES

Notion de fonction, images et antécédents

EXERCICE 1 ⋆

1. L'égalité $f(2) = 7$ se lit directement : $\boxed{\text{l'image de 2 est 7}}$
2. Un antécédent de 7 est un nombre dont l'image vaut 7. Comme $f(2) = 7$, le nombre 2 convient. Mais on a aussi $f(5) = 7$:

$$\boxed{\text{7 admet (au moins) deux antécédents : 2 et 5}}$$

3. Oui, puisque $f(-3) = 0$: $\boxed{-3 \text{ est un antécédent de } 0}$
4. $$\boxed{\begin{array}{l}\text{« 7 est l'\textbf{image} de 2 par } f \text{ »} \\ \text{« } -3 \text{ est un \textbf{antécédent} de 0 par } f \text{ »}\end{array}}$$

   On retiendra que l'image est *la* valeur obtenue (elle est unique), alors qu'un antécédent est *un* nombre de départ possible : d'où l'article défini dans un cas, indéfini dans l'autre.
5. $$\boxed{\text{« L'image de } -3 \text{ par } f \text{ est } 0 \text{ »}}$$

   On peut aussi dire : « -3 a pour image 0 », ou encore « -3 est un antécédent de 0 ».
6. Non. L'égalité $f(2) = 7$ signifie que 2 a pour image 7, et non l'inverse. Rien dans l'énoncé ne renseigne sur l'image de 7.

$$\boxed{\text{On ne peut rien affirmer sur } f(7)}$$

EXERCICE 2 ⋆

1. $f(x) = 3x^2 - 5$:

$$f(0) = 3 \times 0^2 - 5 = \boxed{-5} \quad ; \quad f(2) = 3 \times 4 - 5 = \boxed{7}$$

$$f(-1) = 3 \times (-1)^2 - 5 = 3 \times 1 - 5 = \boxed{-2} \quad ; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \times \frac{1}{4} - 5 = \frac{3}{4} - \frac{20}{4} = \boxed{-\frac{17}{4}}$$

   Attention en calculant $f(-1)$: c'est $(-1)^2 = 1$, et non -1^2.
2. $g(x) = (x-6)^2$:

$$g(2) = (2-6)^2 = (-4)^2 = \boxed{16} \quad ; \quad g(6) = 0^2 = \boxed{0}$$

$$g(0) = (-6)^2 = \boxed{36} \quad ; \quad g(-1) = (-7)^2 = \boxed{49}$$

3. $h(x) = \dfrac{2x+1}{x-4}$:

$$h(0) = \frac{1}{-4} = \boxed{-\frac{1}{4}} \quad ; \quad h(1) = \frac{3}{-3} = \boxed{-1} \quad ; \quad h(-2) = \frac{-3}{-6} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

   Pour $x = 4$, le dénominateur vaut $4 - 4 = 0$:

$$\boxed{h(4) \text{ n'existe pas : on ne peut pas diviser par 0}}$$

4. $k(x) = \sqrt{x-3}$:

$$k(3) = \sqrt{0} = \boxed{0} \quad ; \quad k(7) = \sqrt{4} = \boxed{2} \quad ; \quad k(12) = \sqrt{9} = \boxed{3}$$

Pour $x = 1$, on aurait $\sqrt{1-3} = \sqrt{-2}$:

$$\boxed{k(1) \text{ n'existe pas : une racine carrée ne porte que sur un nombre positif}}$$

EXERCICE 3 ⋆

1. On calcule chaque image, en prenant garde au carré d'un nombre négatif. Par exemple $f(-2) = -(-2)^2 + 2 \times (-2) = -4 - 4 = -8$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-8	-3	0	1	0	-3	-8

2. On lit sur la deuxième ligne les cases contenant 0 :

$$\boxed{0 \text{ et } 2 \text{ ont pour image } 0}$$

3.

$$\boxed{\text{Le plus grand nombre de la deuxième ligne est } 1, \text{ atteint pour } x = 1}$$

4. Oui pour la première question : -1 et 3 ont tous deux pour image -3, de même que -2 et 4 ont pour image -8.

$$\boxed{\text{Deux nombres différents peuvent avoir la même image}}$$

Non pour la seconde : chaque colonne du tableau ne contient qu'une seule valeur en deuxième ligne.

$$\boxed{\text{Un nombre ne peut pas avoir deux images différentes}}$$

C'est exactement ce qu'impose la définition d'une fonction : l'unicité n'est exigée que dans un sens.

EXERCICE 4 ⋆

1. $f(x) = 2x - 7$. Chercher l'antécédent de 3, c'est résoudre $f(x) = 3$:

$$2x - 7 = 3 \iff 2x = 10 \iff \boxed{x = 5}$$

$$2x - 7 = 0 \iff 2x = 7 \iff \boxed{x = \frac{7}{2} = 3{,}5} \quad ; \quad 2x - 7 = -7 \iff 2x = 0 \iff \boxed{x = 0}$$

Chaque nombre admet ici un unique antécédent.

2. $g(x) = x^2$:

$$x^2 = 9 \iff \boxed{x = 3 \text{ ou } x = -3}$$

$$x^2 = 0 \iff \boxed{x = 0}$$

$$x^2 = -4 : \boxed{\text{aucun antécédent}}, \text{ car un carré est toujours positif}$$

On retrouve les trois cas de la proposition 5 du cours.

3. $h(x) = (x-1)(x+4)$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :

$$(x-1)(x+4) = 0 \iff x - 1 = 0 \text{ ou } x + 4 = 0 \iff \boxed{x = 1 \text{ ou } x = -4}$$

4. $k(x) = \dfrac{3}{x}$, définie pour $x \neq 0$:

$$\frac{3}{x} = 6 \iff 3 = 6x \iff \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

Pour 0 : il faudrait $\dfrac{3}{x} = 0$, donc $3 = 0 \times x = 0$, ce qui est absurde.

$$\boxed{0 \text{ n'admet aucun antécédent par } k}$$

C'est le premier point de la proposition 3 du cours : un inverse n'est jamais nul.

EXERCICE 5 ⋆

On cherche à chaque fois les valeurs de x qui rendraient un calcul impossible : un dénominateur nul, ou une racine carrée portant sur un nombre négatif.

a) Aucun dénominateur, aucune racine : $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

b) Le dénominateur $x + 3$ s'annule pour $x = -3$: $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\} =]-\infty\,;-3[\cup]-3\,;+\infty[}$

c) Il faut $x + 5 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \geqslant -5$: $\boxed{D_f = [-5\,;+\infty[}$

d) Le dénominateur $x - 7$ s'annule pour $x = 7$: $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{7\}}$

e) Il faut $4 - x \geqslant 0$, c'est-à-dire $4 \geqslant x$: $\boxed{D_f =]-\infty\,;4]}$

f) C'est une expression du premier degré, sans obstacle : $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

La question e) demande de l'attention : l'inconnue est précédée d'un signe $-$, et la condition $4 - x \geqslant 0$ se traduit par $x \leqslant 4$, non par $x \geqslant 4$.

EXERCICE 6 ⋆⋆

a) $2x - 6 = 0$ pour $x = 3$: $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}}$

b) Il faut $3x - 9 \geqslant 0$, soit $3x \geqslant 9$, soit $x \geqslant 3$: $\boxed{D_f = [3\,;+\infty[}$

c) Deux conditions cette fois : la racine impose $x \geqslant 0$, et le dénominateur impose $x \neq 1$.

$$\boxed{D_f = [0\,;1[\cup]1\,;+\infty[}$$

d) Là encore deux conditions : $x \neq 0$ pour le quotient, et $x + 2 \geqslant 0$ soit $x \geqslant -2$ pour la racine.

$$\boxed{D_f = [-2\,;0[\cup]0\,;+\infty[}$$

e) $x^2 = 0$ uniquement pour $x = 0$: $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*}$

f) Le dénominateur est $x^2 + 1$. Or pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$, donc $x^2 + 1 \geqslant 1$: le dénominateur est toujours strictement positif, il ne s'annule jamais.

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}}$$

g) Le produit $(x - 2)(x + 5)$ s'annule si $x = 2$ ou si $x = -5$: $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\,;2\}}$

h) La première racine impose $x \geqslant 0$, la seconde impose $-x \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant 0$. Les deux conditions doivent être vérifiées *en même temps* :

$$\boxed{D_f = \{0\}}$$

La fonction n'est définie qu'en un seul nombre, et l'on a $f(0) = \sqrt{0} + \sqrt{0} = 0$. C'est inhabituel, mais parfaitement conforme à la définition : l'ensemble de définition n'est pas forcément un intervalle.

EXERCICE 7 ⋆⋆

1. En suivant les quatre étapes :

$$7 \to 7-3 = 4 \to 4^2 = 16 \to 16+5 = \boxed{21}$$

$$-1 \to -4 \to 16 \to \boxed{21} \qquad ; \qquad 0 \to -3 \to 9 \to \boxed{14}$$

On remarque déjà que 7 et -1 donnent le même résultat.

2. En remplaçant le nombre choisi par x :

$$\boxed{f(x) = (x-3)^2 + 5}$$

Ni dénominateur ni racine carrée n'apparaissent : $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

3. On résout $f(x) = 5$:

$$(x-3)^2 + 5 = 5 \iff (x-3)^2 = 0 \iff x - 3 = 0 \iff \boxed{x = 3}$$

4. On résout $f(x) = 4$:

$$(x-3)^2 + 5 = 4 \iff (x-3)^2 = -1$$

Or un carré est toujours positif, donc cette égalité est impossible :

$$\boxed{\text{4 n'admet aucun antécédent par } f}$$

Le résultat de la question 3 s'éclaire : comme $(x-3)^2 \geqslant 0$, on a toujours $f(x) \geqslant 5$. Le nombre 5 est donc le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

5. Le second programme donne $g(x) = x^2 - 6x + 14$. On développe $f(x)$:

$$f(x) = (x-3)^2 + 5 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 + 5 = x^2 - 6x + 9 + 5 = x^2 - 6x + 14 = g(x)$$

$$\boxed{\text{Les deux programmes donnent toujours le même résultat}}$$

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. Une largeur est une longueur strictement positive, donc $x > 0$. De plus le demi-périmètre vaut 10 cm, donc largeur + longueur = 10 : la longueur vaut $10 - x$. Comme la largeur ne dépasse pas la longueur, $x \leqslant 10 - x$, c'est-à-dire $2x \leqslant 10$, soit $x \leqslant 5$.

$$\boxed{x \in]0\,;5]}$$

2.

$$\boxed{\text{longueur} = 10 - x}$$

3. L'aire d'un rectangle est le produit de sa longueur par sa largeur :

$$\boxed{\mathcal{A}(x) = x(10-x)}$$

4. $\mathcal{A}(2) = 2 \times 8 = \boxed{16}$; $\mathcal{A}(5) = 5 \times 5 = \boxed{25}$; $\mathcal{A}(4) = 4 \times 6 = \boxed{24}$

5.

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$\mathcal{A}(x)$	4,75	9	12,75	16	18,75	21	22,75	24	24,75	25

Les valeurs augmentent régulièrement jusqu'à la dernière colonne :

$$\boxed{\text{L'aire semble maximale pour } x = 5, \text{ et vaut alors } 25 \text{ cm}^2}$$

La largeur vaut alors 5 cm et la longueur $10 - 5 = 5$ cm :

$$\boxed{\text{le rectangle d'aire maximale est un carré de côté 5 cm}}$$

Courbe représentative d'une fonction

EXERCICE 9 ⋆

1. La courbe est tracée pour x variant de -2 à 4 : $\boxed{D_f = [-2\,;4]}$
2. On part de l'abscisse, on monte (ou on descend) jusqu'à la courbe, puis on lit l'ordonnée :

$$\boxed{f(-2) = 5 \quad ; \quad f(0) = -3 \quad ; \quad f(1) = -4 \quad ; \quad f(3) = 0}$$

3. Cette fois on part de l'axe des ordonnées et l'on se déplace **horizontalement** :

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \text{ admet deux antécédents : } -1 \text{ et } 3 \\ -4 \text{ admet un seul antécédent : } 1 \\ 5 \text{ admet deux antécédents : } -2 \text{ et } 4 \end{array}}$$

4. La droite horizontale d'ordonnée -5 passe entièrement en dessous de la courbe : elle ne la coupe pas. Le point le plus bas de la courbe a pour ordonnée -4.

$$\boxed{-5 \text{ n'admet aucun antécédent par } f}$$

5. On cherche les points de la courbe d'ordonnée -3 :

$$\boxed{S = \{0\,;2\}}$$

6. Le nombre 0 admet **deux** antécédents, -1 et 3. Cela ne contredit nullement la définition : celle-ci impose que chaque *antécédent* ait une unique image, pas l'inverse.

$$\boxed{\text{Une image peut être partagée par plusieurs antécédents}}$$

Graphiquement, cela se traduit ainsi : toute droite *verticale* coupe la courbe en au plus un point, mais une droite *horizontale* peut la couper plusieurs fois.

EXERCICE 10 ⋆

1. Un point $M(a\,;b)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $f(a)=b$.

$$f(-2)=(-2)^2-2\times(-2)-3=4+4-3=5 \quad \text{or } y_A=5 \quad \boxed{A\in\mathcal{C}_f}$$
$$f(1)=1-2-3=-4 \quad \text{or } y_B=-4 \quad \boxed{B\in\mathcal{C}_f}$$
$$f(2)=4-4-3=-3 \quad \text{or } y_C=0\neq-3 \quad \boxed{C\notin\mathcal{C}_f}$$
$$f(3)=9-6-3=0 \quad \text{or } y_D=0 \quad \boxed{D\in\mathcal{C}_f}$$
$$f(0)=-3 \quad \text{or } y_E=3\neq-3 \quad \boxed{E\notin\mathcal{C}_f}$$

Le point E est un piège classique : -3 et 3 ne sont pas le même nombre.

2. L'ordonnée d'un point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse -1 est $f(-1)$:

$$y=f(-1)=(-1)^2-2\times(-1)-3=1+2-3=\boxed{0}$$

3. On cherche les x tels que $f(x)=12$:

$$x^2-2x-3=12 \iff x^2-2x-15=0$$

On remarque que $x^2-2x-15=(x-5)(x+3)$, puisque $(x-5)(x+3)=x^2+3x-5x-15=x^2-2x-15$. Par produit nul :

$$\boxed{x=5 \text{ ou } x=-3}$$

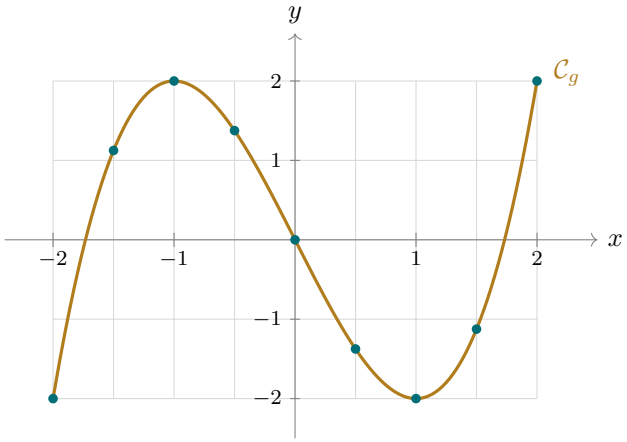
Il y a donc deux points de $\mathcal{C}_f$ d'ordonnée 12 : $(5\,;12)$ et $(-3\,;12)$. Ils sortent toutefois de la fenêtre tracée à l'exercice 9.

EXERCICE 11 ⋆

1. On calcule par exemple $g(-1{,}5)=(-1{,}5)^3-3\times(-1{,}5)=-3{,}375+4{,}5=1{,}125$.

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$g(x)$	-2	$1{,}125$	2	$1{,}375$	0	$-1{,}375$	-2	$-1{,}125$	2

2. et 3. En plaçant les neuf points puis en les reliant par une courbe régulière, on obtient :



$\boxed{g \text{ semble croissante sur } [-2\,;-1] \text{ et sur } [1\,;2],\ \text{décroissante sur } [-1\,;1]}$

3. Sur la courbe, le point d'abscisse 1,2 paraît bien avoir une ordonnée voisine de $-1{,}9$. On vérifie :

$$g(1{,}2) = 1{,}2^3 - 3 \times 1{,}2 = 1{,}728 - 3{,}6 = -1{,}872$$

Or $-1{,}872 \neq -1{,}9$:

$\boxed{H \text{ n'appartient pas à la courbe, même s'il en est très proche}}$

C'est toute la limite de la lecture graphique : elle suggère, elle ne démontre pas.

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. On cherche les points de $\mathcal{C}_f$ d'ordonnée donnée :

$\boxed{f(x) = 0 : S = \{-1\,;3\}}$ $\boxed{f(x) = 5 : S = \{-2\,;4\}}$ $\boxed{f(x) = -5 : S = \varnothing}$

Pour la dernière, la courbe ne descend jamais en dessous de -4.

2. Résoudre $f(x) = g(x)$, c'est chercher les abscisses des points où la courbe et la droite se coupent. On lit deux points d'intersection, d'abscisses 0 et 3 :

$$\boxed{S = \{0\,;3\}}$$

3. On compte les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la droite horizontale d'ordonnée k :

$\boxed{\begin{array}{l} k = -4 : 1 \text{ solution} \quad \text{(le sommet de la courbe)} \\ k = -3 : 2 \text{ solutions} \\ k = 2 : 2 \text{ solutions} \end{array}}$

4. On résout l'équation $f(x) = g(x)$:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 = x - 3 &\iff x^2 - 2x - 3 - x + 3 = 0 \\ &\iff x^2 - 3x = 0 \\ &\iff x(x-3) = 0 \end{aligned}$$

Par produit nul, $x = 0$ ou $x = 3$:

$$\boxed{S = \{0\,;3\}}$$

Le calcul confirme la lecture graphique. On notera qu'il ne fallait surtout pas simplifier par x : on aurait perdu la solution $x = 0$.

Variations et extremums

EXERCICE 13 ⋆

1. En parcourant la courbe de la gauche vers la droite, on observe qu'elle monte, puis descend, puis remonte :

$\boxed{g \text{ est croissante sur } [-2\,;-1] \text{ et sur } [1\,;2],\ \text{décroissante sur } [-1\,;1]}$

2.

x	-2		-1		1		2
$g(x)$	-2	↗	2	↘	-2	↗	2

3. Le point le plus haut de la courbe a pour ordonnée 2, et il y en a **deux** : celui d'abscisse -1 et celui d'abscisse 2.

$$\boxed{\text{Maximum : } 2, \text{ atteint pour } x = -1 \text{ et pour } x = 2}$$

De même, le point le plus bas a pour ordonnée -2, atteint deux fois :

$$\boxed{\text{Minimum : } -2, \text{ atteint pour } x = -2 \text{ et pour } x = 1}$$

Un extremum est une *ordonnée* : rien n'interdit qu'il soit atteint en plusieurs abscisses.

4. La courbe coupe l'axe des abscisses en trois points :

$$\boxed{L'\text{équation } g(x) = 0 \text{ admet 3 solutions sur } [-2\,;2]}$$

Leurs valeurs approchées sont environ $-1{,}7$, 0 et 1,7.

5. On fait glisser la droite horizontale d'ordonnée k et l'on compte les intersections. Comme g varie entre -2 et 2 :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{si } k < -2 \text{ ou } k > 2 & : \text{ aucune solution} \\ \text{si } k = -2 \text{ ou } k = 2 & : \text{ 2 solutions} \\ \text{si } -2 < k < 2 & : \text{ 3 solutions} \end{array}}$$

EXERCICE 14 ⋆

1. Les flèches montantes indiquent la croissance :

$$\boxed{f \text{ est croissante sur } [2\,;4], \text{ décroissante sur } [-5\,;2] \text{ et sur } [4\,;10]}$$

2. Les nombres inscrits aux extrémités des flèches sont les images des bornes :

$$\boxed{f(-5) = 8 \quad ; \quad f(2) = 1 \quad ; \quad f(4) = 9 \quad ; \quad f(10) = 3}$$

3. Les réels 3 et 4 appartiennent tous deux à $[2\,;4]$, où f est croissante. Comme $3 \leqslant 4$, l'ordre est conservé :

$$\boxed{f(3) \leqslant f(4)}, \text{ c'est-à-dire } f(3) \leqslant 9$$

Les réels 0 et 1 appartiennent à $[-5\,;2]$, où f est décroissante. Comme $0 \leqslant 1$, l'ordre est inversé :

$$\boxed{f(0) \geqslant f(1)}$$

4. Non. Les réels 0 et 6 n'appartiennent pas au même intervalle de monotonie : le tableau ne donne aucune information sur la façon dont leurs images se comparent.

$$\boxed{\text{On ne peut pas comparer } f(0) \text{ et } f(6)}$$

Tout au plus peut-on encadrer chacune : $1 \leqslant f(0) \leqslant 8$ et $3 \leqslant f(6) \leqslant 9$, ce qui ne permet pas de trancher.

5. En comparant les quatre valeurs inscrites dans le tableau :

$$\boxed{\text{Maximum : } 9, \text{ atteint pour } x = 4} \quad ; \quad \boxed{\text{Minimum : } 1, \text{ atteint pour } x = 2}$$

6. On examine chacun des trois intervalles de monotonie :
   - sur $[-5\,;2]$, f décroît de 8 à 1, et 5 est compris entre 1 et 8 : une solution ;
   - sur $[2\,;4]$, f croît de 1 à 9, et 5 est compris entre 1 et 9 : une solution ;

- sur $[4\,;10]$, f décroît de 9 à 3, et 5 est compris entre 3 et 9 : une solution.

$$\boxed{L'\text{équation } f(x)=5 \text{ admet 3 solutions sur } [-5\,;10]}$$

EXERCICE 15 ⋆

1. Dire que le maximum vaut 11 et qu'il est atteint pour $x=4$ signifie deux choses : $u(4)=11$, et $u(x)\leqslant 11$ pour tout x de $[0\,;6]$.

   $$\boxed{\text{Les affirmations correctes sont b) et c)}}$$

   L'affirmation a) inverse l'abscisse et l'ordonnée. L'affirmation d) confond la valeur du maximum avec l'abscisse en laquelle il est atteint : un extremum est toujours une *ordonnée*.

2. Pour tout réel x, on sait que $x^2\geqslant 0$. En ajoutant 2 aux deux membres :

   $$x^2+2\geqslant 2 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad v(x)\geqslant 2$$

   De plus $v(0)=0^2+2=2$, et 0 appartient bien à $[-3\,;3]$: la valeur 2 est donc effectivement atteinte.

   $$\boxed{v \text{ admet pour minimum 2 sur } [-3\,;3],\ \text{atteint pour } x=0}$$

3. Pour tout réel x, $(x-2)^2\geqslant 0$, donc $-(x-2)^2\leqslant 0$, et en ajoutant 5 :

   $$5-(x-2)^2\leqslant 5 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad w(x)\leqslant 5$$

   Or $w(2)=5-0=5$: la valeur est atteinte.

   $$\boxed{w \text{ admet pour maximum 5 sur } \mathbb{R},\ \text{atteint pour } x=2}$$

   On notera le changement de sens de l'inégalité lorsqu'on multiplie par -1.

4. Non. La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$ et prend des valeurs aussi grandes que l'on veut : par exemple $10^3=1000$, $100^3=1\,000\,000$, et ainsi de suite.

   $$\boxed{\text{La fonction cube n'admet pas de maximum sur } \mathbb{R}}$$

   Elle n'admet pas non plus de minimum, pour la même raison du côté des valeurs négatives.

EXERCICE 16 ⋆⋆

1. f est croissante sur $[0\,;10]$: elle conserve l'ordre.

   $$2\leqslant 7 \implies \boxed{f(2)\leqslant f(7)} \quad ; \quad 0{,}5\leqslant 1 \implies \boxed{f(0{,}5)\leqslant f(1)}$$

2. g est décroissante sur $[-3\,;5]$: elle inverse l'ordre.

   $$-1\leqslant 4 \implies \boxed{g(-1)\geqslant g(4)} \quad ; \quad -2\leqslant 0 \implies \boxed{g(-2)\geqslant g(0)}$$

3. Non : -3 appartient à $]-\infty\,;0]$ et 5 à $[0\,;+\infty[$. Les deux réels ne sont pas dans le même intervalle de monotonie.

   $$\boxed{\text{On ne peut pas comparer } h(-3) \text{ et } h(5)}$$

4. (a) $0\leqslant 3{,}2\leqslant 3{,}3$ et la fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$: $\boxed{3{,}2^2<3{,}3^2}$

   (b) -4 et -5 sont négatifs, et la fonction carré est *décroissante* sur $]-\infty\,;0]$. Comme $-5\leqslant -4$: $\boxed{(-5)^2>(-4)^2}$

   On le vérifie : $25>16$. *C'est le piège classique du carré des nombres négatifs.*

(c) La fonction racine carrée est croissante et $5 \leqslant 7$: $\boxed{\sqrt{5} < \sqrt{7}}$

(d) $0 < 2{,}5 < 2{,}7$ et la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$: $\boxed{\dfrac{1}{2{,}5} > \dfrac{1}{2{,}7}}$

(e) -4 et -3 sont dans $]-\infty\,;0[$, où la fonction inverse est décroissante. Comme $-4 \leqslant -3$: $\boxed{\dfrac{1}{-4} > \dfrac{1}{-3}}$
On vérifie : $-0{,}25 > -0{,}333\ldots$

(f) La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$ et $-1{,}2 \leqslant -1{,}1$: $\boxed{(-1{,}2)^3 < (-1{,}1)^3}$

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. (a) Soient $x_1 \leqslant x_2$ deux réels. On calcule :

$$f(x_2) - f(x_1) = (3x_2 + 2) - (3x_1 + 2) = 3x_2 - 3x_1 = 3\,(x_2 - x_1)$$

Comme $x_1 \leqslant x_2$, on a $x_2 - x_1 \geqslant 0$, et 3 est positif :

$$\boxed{f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0}$$

(b) Cette différence étant positive, on a $f(x_1) \leqslant f(x_2)$: l'ordre est conservé.

$$\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}}$$

2. Soient $x_1 \leqslant x_2$. Alors :

$$g(x_2) - g(x_1) = (-2x_2 + 5) - (-2x_1 + 5) = -2\,(x_2 - x_1)$$

Ici $x_2 - x_1 \geqslant 0$ mais le facteur -2 est négatif, donc le produit est négatif : $g(x_2) \leqslant g(x_1)$. L'ordre est inversé.

$$\boxed{g \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}}$$

3. (a) Soient $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$. Alors :

$$h(x_2) - h(x_1) = \left(x_2^2 + 1\right) - \left(x_1^2 + 1\right) = x_2^2 - x_1^2$$

On reconnaît une différence de deux carrés :

$$\boxed{h(x_2) - h(x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}$$

(b) Le facteur $x_2 - x_1$ est positif puisque $x_1 \leqslant x_2$, et le facteur $x_2 + x_1$ est positif comme somme de deux nombres positifs. Le produit de deux nombres positifs étant positif :

$$h(x_2) - h(x_1) \geqslant 0 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{h \text{ est croissante sur } [0\,;+\infty[}$$

(c) Soient maintenant $x_1 \leqslant x_2 \leqslant 0$. La factorisation reste valable, et le facteur $x_2 - x_1$ est toujours positif ; en revanche $x_2 + x_1$ est cette fois négatif, comme somme de deux nombres négatifs. Le produit est donc négatif :

$$\boxed{h \text{ est décroissante sur }]-\infty\,;0]}$$

On retrouve les variations de la fonction carré, simplement décalées de 1 vers le haut.

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. $B(0) = -5$ signifie que pour une production nulle, le bénéfice vaut -5 milliers d'euros.

   $$\boxed{\text{Sans rien produire, l'entreprise perd 5 000 euros}}$$

   Ce sont les frais fixes : loyer, machines, salaires...

2. Le maximum du tableau est 23, atteint pour $x = 7$. Or x est un nombre de *centaines* d'objets, et B s'exprime en *milliers* d'euros :

   $$\boxed{\text{Il faut produire 700 objets ; le bénéfice vaut alors 23 000 euros}}$$

3. Non. Le bénéfice augmente tant que x reste inférieur à 7, mais il diminue ensuite : B est décroissante sur $[7\,;12]$.

   $$\boxed{\text{Produire davantage ne garantit pas un bénéfice plus élevé}}$$

4. Sur $[0\,;7]$, B croît de -5 à 23 : comme 0 est compris entre ces deux valeurs, il y a une solution. Sur $[7\,;12]$, B décroît de 23 à -1 : là encore une solution.

   $$\boxed{L'\text{équation } B(x) = 0 \text{ admet 2 solutions}}$$

   Ce sont les deux productions pour lesquelles le bénéfice est nul : l'entreprise ne gagne ni ne perd d'argent.

5. Non : le tableau ne donne les valeurs de B qu'en 0, 7 et 12. En revanche, 3 appartient à $[0\,;7]$ où B est croissante, donc $B(0) \leqslant B(3) \leqslant B(7)$:

   $$\boxed{-5 \leqslant B(3) \leqslant 23}$$

   Un tableau de variations ne donne jamais toutes les valeurs d'une fonction : il permet seulement de les encadrer.

Fonctions de référence

EXERCICE 19 ⋆

1. On raisonne d'abord sur les ensembles de définition, puis sur l'allure.

Courbe	Fonction	Justification
$\mathcal{C}_1$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	C'est la seule courbe en deux morceaux, qui n'existe pas en 0, et dont une partie est dans le troisième quadrant.
$\mathcal{C}_2$	$x \mapsto x^2$	Elle est définie sur $\mathbb{R}$, toujours au-dessus de l'axe des abscisses, et symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
$\mathcal{C}_3$	$x \mapsto x^3$	Elle est définie sur $\mathbb{R}$, croissante, et prend des valeurs négatives pour $x < 0$: c'est ce qui la distingue de $\mathcal{C}_2$.
$\mathcal{C}_4$	$x \mapsto \sqrt{x}$	C'est la seule courbe qui n'existe pas pour $x < 0$; elle croît lentement et reste sous la droite d'équation $y = x$ pour $x > 1$.

2.

$\mathcal{C}_1$ est une **hyperbole**
$\mathcal{C}_2$ est une **parabole**
$\mathcal{C}_3$ est une **cubique**
$\mathcal{C}_4$ est une **demi-parabole**

3. Les quatre courbes se croisent au point de coordonnées $\boxed{(1\,;1)}$. On le vérifie :

$$1^2 = 1 \quad ; \quad \sqrt{1} = 1 \quad ; \quad \frac{1}{1} = 1 \quad ; \quad 1^3 = 1$$

4. Sur $]0\,;1[$, c'est l'hyperbole qui domine (elle prend des valeurs supérieures à 1), puis vient la racine, puis x^2, puis x^3 :

$$\boxed{\text{sur }]0\,;1[: \ \frac{1}{x} > \sqrt{x} > x^2 > x^3}$$

Sur $]1\,;+\infty[$, l'ordre entre les trois dernières s'inverse, et l'hyperbole passe en dessous de tout le monde puisqu'elle devient inférieure à 1 :

$$\boxed{\text{sur }]1\,;+\infty[: \ x^3 > x^2 > \sqrt{x} > \frac{1}{x}}$$

EXERCICE 20 ⋆

1.

$$4^2 = \boxed{16} \quad ; \quad (-4)^2 = \boxed{16} \quad ; \quad (0{,}5)^2 = \boxed{0{,}25} \quad ; \quad \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{9}}$$

Deux nombres opposés ont toujours le même carré.

2. (a) $0 \leqslant 2{,}5 \leqslant 2{,}6$ et la fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$: $\boxed{2{,}5^2 < 2{,}6^2}$

(b) $-3{,}2 \leqslant -3{,}1 \leqslant 0$ et la fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;0]$: $\boxed{(-3{,}1)^2 < (-3{,}2)^2}$

(c) Ici les deux nombres ne sont pas du même signe : on ne peut pas invoquer directement les variations. On passe par les opposés, $(-2)^2 = 2^2$, et $1{,}9 \leqslant 2$ donne $1{,}9^2 \leqslant 2^2$:

$$\boxed{1{,}9^2 < (-2)^2}$$

3. Sur $[2\,;5]$, la fonction carré est croissante, donc elle conserve l'ordre :

$$2 \leqslant x \leqslant 5 \implies 2^2 \leqslant x^2 \leqslant 5^2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{4 \leqslant x^2 \leqslant 25}$$

4. Sur $[-3\,;-1]$, la fonction carré est **décroissante** : elle inverse l'ordre.

$$-3 \leqslant x \leqslant -1 \implies (-3)^2 \geqslant x^2 \geqslant (-1)^2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{1 \leqslant x^2 \leqslant 9}$$

C'est l'erreur la plus fréquente : écrire $9 \leqslant x^2 \leqslant 1$, ce qui n'a aucun sens.

5. Non, car l'intervalle $[-2\,;3]$ contient 0 : la fonction carré y est d'abord décroissante, puis croissante, et l'on ne peut pas appliquer la méthode précédente d'un seul coup. On raisonne alors directement : le plus petit carré est obtenu en $x = 0$, et le plus grand à l'extrémité la plus éloignée de 0, ici 3.

$$\boxed{0 \leqslant x^2 \leqslant 9}$$

EXERCICE 21 ⋆

1. $$\frac{1}{4} = \boxed{0{,}25} \quad ; \quad \frac{1}{-0{,}5} = \boxed{-2} \quad ; \quad \frac{1}{\frac{2}{3}} = \boxed{\frac{3}{2} = 1{,}5}$$

   On retiendra que l'inverse d'un quotient s'obtient en échangeant numérateur et dénominateur.

2. (a) $0 < 3 < 4$ et la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$: $\boxed{\frac{1}{3} > \frac{1}{4}}$

   (b) $-4 < -3 < 0$ et la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;0[$: $\boxed{\frac{1}{-4} > \frac{1}{-3}}$

   (c) Ici les deux nombres -2 et 5 sont de **signes contraires** : ils ne sont pas dans le même intervalle de monotonie, et l'on ne peut pas appliquer la propriété. On compare donc directement :
   $$\frac{1}{-2} = -0{,}5 \quad \text{et} \quad \frac{1}{5} = 0{,}2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{1}{-2} < \frac{1}{5}}$$
   Un négatif est toujours plus petit qu'un positif. On observe au passage que l'ordre n'a *pas* été inversé, alors que $-2 < 5$: c'est bien la preuve que la fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ tout entier.

3. Sur $[2\,;5]$, la fonction inverse est décroissante :
   $$2 \leqslant x \leqslant 5 \implies \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{5} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{2}}$$

4. Sur $[-4\,;-1]$, la fonction inverse est également décroissante :
   $$-4 \leqslant x \leqslant -1 \implies -\frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant -1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{-1 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant -\frac{1}{4}}$$

5. Non. L'intervalle $[-2\,;3]$ contient 0, où la fonction inverse n'est même pas définie. De plus, en s'approchant de 0, les valeurs de $\dfrac{1}{x}$ deviennent aussi grandes (ou aussi petites) que l'on veut.

   $$\boxed{\text{Aucun encadrement n'est possible}}$$

EXERCICE 22 ⋆

1. $$\sqrt{0} = \boxed{0}\,;\ \sqrt{1} = \boxed{1}\,;\ \sqrt{49} = \boxed{7}\,;\ \sqrt{0{,}25} = \boxed{0{,}5}\,;\ \sqrt{\frac{9}{16}} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

2. La fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc elle conserve l'ordre :
   $$5 < 7 \implies \boxed{\sqrt{5} < \sqrt{7}} \quad ; \quad 0{,}3 < 0{,}4 \implies \boxed{\sqrt{0{,}3} < \sqrt{0{,}4}}$$

3. $$\sqrt{x} = 5 \iff x = 5^2 \iff \boxed{x = 25} \quad ; \quad \sqrt{x} = 0 \iff \boxed{x = 0}$$
   $$\sqrt{x} = -2 : \boxed{\text{aucune solution}},\ \text{car une racine carrée est toujours positive}$$

4. $$2^3 = \boxed{8}\,;\ (-2)^3 = \boxed{-8}\,;\ (0{,}1)^3 = \boxed{0{,}001}\,;\ \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \boxed{-\frac{1}{8}}$$

   Contrairement au carré, le cube conserve le signe.

5. La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$:

$$-2 < -1 \implies \boxed{(-2)^3 < (-1)^3} \quad ; \quad 1{,}1 < 1{,}2 \implies \boxed{1{,}1^3 < 1{,}2^3}$$

6.

$$x^3 = 8 \iff \boxed{x = 2} \quad ; \quad x^3 = -27 \iff \boxed{x = -3}$$

$$\boxed{\text{Chaque équation admet exactement une solution}}$$

En effet, la fonction cube étant *strictement croissante* sur $\mathbb{R}$, elle ne peut pas prendre deux fois la même valeur : contrairement à la fonction carré, il n'y a jamais deux antécédents.

EXERCICE 23 ⋆⋆

1. On suppose $1 \leqslant x \leqslant 4$. Sur cet intervalle, les fonctions carré, racine carrée et cube sont croissantes, tandis que la fonction inverse est décroissante.
   (a) $\boxed{1 \leqslant x^2 \leqslant 16}$
   (b) $\boxed{1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 2}$
   (c) L'ordre est inversé : $\boxed{\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 1}$
   (d) $\boxed{1 \leqslant x^3 \leqslant 64}$
   (e) On part de a) et l'on multiplie par 2 (positif, l'ordre est conservé), puis on ajoute 1 :

$$2 \leqslant 2x^2 \leqslant 32 \qquad \text{puis} \qquad \boxed{3 \leqslant 2x^2 + 1 \leqslant 33}$$

   (f) On part de c) et l'on multiplie par -1, ce qui **inverse** l'ordre, puis on ajoute 3 :

$$-1 \leqslant -\frac{1}{x} \leqslant -\frac{1}{4} \qquad \text{puis} \qquad \boxed{2 \leqslant 3 - \frac{1}{x} \leqslant \frac{11}{4} = 2{,}75}$$

2. On suppose $-3 \leqslant x \leqslant -1$. La fonction carré est décroissante sur cet intervalle, la fonction cube y est croissante, et la fonction inverse décroissante :

$$\boxed{1 \leqslant x^2 \leqslant 9} \quad ; \quad \boxed{-27 \leqslant x^3 \leqslant -1} \quad ; \quad \boxed{-1 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant -\frac{1}{3}}$$

   Quant à $\sqrt{x}$: $\boxed{\text{la racine carrée n'est pas définie pour } x < 0}$
3. On suppose $0 \leqslant x \leqslant 1$. La fonction carré est croissante sur $[0\,;1]$:

$$\boxed{0 \leqslant x^2 \leqslant 1}$$

   On multiplie par -3, ce qui inverse l'ordre, puis on ajoute 5 :

$$-3 \leqslant -3x^2 \leqslant 0 \qquad \text{puis} \qquad \boxed{2 \leqslant 5 - 3x^2 \leqslant 5}$$

EXERCICE 24 ⋆⋆

On applique la proposition 5 du cours : l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions si $a > 0$, une seule si $a = 0$, aucune si $a < 0$.

a) $\boxed{S = \{-6\,;6\}}$

b) $\boxed{S = \left\{-\sqrt{7}\,;\sqrt{7}\right\}}$

Les solutions ne sont pas des entiers : on les laisse sous forme exacte.

c) $\boxed{S = \{0\}}$

d) Un carré ne peut pas être négatif : $\boxed{S = \varnothing}$

e) $\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$, donc $\boxed{S = \{-0{,}7\,;0{,}7\}}$

f) L'équation $(x-1)^2 = 16$ signifie que $x - 1$ a pour carré 16, donc $x - 1 = 4$ ou $x - 1 = -4$:

$$\boxed{S = \{-3\,;5\}}$$

g) De même, $x + 3 = 5$ ou $x + 3 = -5$: $\boxed{S = \{-8\,;2\}}$

h) On ramène tout dans le même membre, puis on factorise :

$$x^2 = 2x \iff x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0$$

Par produit nul : $\boxed{S = \{0\,;2\}}$

Si l'on avait divisé les deux membres de h) par x, on aurait obtenu $x = 2$ et perdu la solution $x = 0$. **On ne divise jamais par une expression susceptible d'être nulle** : on factorise.

EXERCICE 25 ⋆⋆

1. Pour $x = 0{,}25$:

$$\sqrt{0{,}25} = 0{,}5 \quad ; \quad x = 0{,}25 \quad ; \quad x^2 = 0{,}0625 \quad ; \quad x^3 = 0{,}015625$$

$$\boxed{x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}}$$

2. Pour $x = 4$:

$$\sqrt{4} = 2 \quad ; \quad x = 4 \quad ; \quad x^2 = 16 \quad ; \quad x^3 = 64$$

$$\boxed{\sqrt{x} < x < x^2 < x^3}$$

3. Les deux exemples précédents illustrent le théorème du cours :

si $0 < x < 1$	: $\sqrt{x} > x > x^2 > x^3$
si $x > 1$	: $\sqrt{x} < x < x^2 < x^3$
si $x = 0$ ou $x = 1$	: $\sqrt{x} = x = x^2 = x^3$

Autrement dit, élever à une puissance *diminue* un nombre compris entre 0 et 1, mais *augmente* un nombre supérieur à 1. Le point de bascule est 1.

4. (a) Comme $0 < 0{,}8 < 1$: $\boxed{0{,}8^3 < 0{,}8^2 < 0{,}8 < \sqrt{0{,}8}}$

(b) Comme $1{,}3 > 1$: $\boxed{\sqrt{1{,}3} < 1{,}3 < 1{,}3^2 < 1{,}3^3}$

5. Soit x tel que $0 < x < 1$. On factorise la différence :

$$x^2 - x = x(x-1)$$

Le facteur x est strictement positif, et le facteur $x-1$ est strictement négatif puisque $x < 1$. Le produit d'un nombre positif par un nombre négatif étant négatif :

$$x^2 - x < 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \boxed{x^2 < x}$$

Exercices de synthèse

EXERCICE 26 : QCM ⋆

Question	Réponse	Justification
1	**A**	$f(-2) = (-2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$. La réponse B viendrait de -2^2 mal interprété.
2	**B**	Le dénominateur $x - 5$ s'annule pour $x = 5$, et seulement pour cette valeur.
3	**A**	Il faut $x + 2 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \geqslant -2$.
4	**C**	$10 > 0$, donc l'équation admet deux solutions, $\sqrt{10}$ et $-\sqrt{10}$.
5	**B**	La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$: elle inverse l'ordre. La réponse A conserve l'ordre, ce qui est l'erreur classique.
6	**C**	Elle est décroissante sur chacun des deux intervalles, mais pas sur leur réunion : $-1 < 2$ alors que $\frac{1}{-1} = -1$ est plus petit que $\frac{1}{2}$.
7	**A**	C'est le théorème du cours : sur $]0\,;1[$, élever au carré diminue le nombre.
8	**B**	Le maximum est une *ordonnée* (7), atteinte en une *abscisse* (3).
9	**B**	$\sqrt{x} = 3$ équivaut à $x = 9$. Contrairement à $x^2 = 9$, il n'y a qu'une solution : la racine carrée est toujours positive.
10	**A**	C'est la définition même d'une fonction. La réponse B est fausse : une image peut avoir plusieurs antécédents.

EXERCICE 27 : VRAI OU FAUX ⋆⋆

1. **Fausse**. Une courbe relevée par un capteur, ou un tableau de mesures, définissent parfaitement une fonction sans qu'aucune formule ne les décrive. C'est la remarque du cours.
2. **Vraie**. Par exemple, avec la fonction carré, le nombre 9 admet deux antécédents, 3 et -3, puisque $3^2 = (-3)^2 = 9$.
3. **Fausse**. C'est précisément ce que la définition interdit : à chaque antécédent correspond **une unique** image. Graphiquement, une droite verticale ne coupe la courbe qu'en un point au plus.
4. **Fausse**. La racine carrée n'est définie que pour les nombres positifs : $\sqrt{-4}$ n'existe pas. Son ensemble de définition est $[0\,;+\infty[$.
5. **Vraie**. C'est la proposition 1 du cours : $x^2 = x \times x$ est un produit de deux nombres de même signe, donc positif.

6. **Fausse**. Contre-exemple avec $x = -2$:

$$(-2)^3 = -8 < 0$$

Contrairement au carré, le cube conserve le signe de x.

7. **Fausse**. Contre-exemple avec $a = -3$ et $b = 1$: on a bien $-3 < 1$, mais

$$a^2 = 9 \qquad \text{et} \qquad b^2 = 1 \qquad \text{donc} \qquad a^2 > b^2$$

L'implication n'est vraie que si a et b sont tous deux positifs.

8. **Vraie**. Les réels a et b sont tous deux dans $]0\,;+\infty[$, où la fonction inverse est décroissante : elle inverse donc l'ordre. C'est exactement la remarque du cours.

9. **Fausse**. Le maximum est l'**ordonnée** du point le plus haut, pas son abscisse. L'abscisse indique seulement *où* le maximum est atteint.

10. **Vraie**. C'est la proposition 1 du cours. On peut le redémontrer : si $a < b \leqslant 0$, alors $a + b \leqslant 0$ et $a - b < 0$, donc $(a - b)(a + b) \geqslant 0$, c'est-à-dire $a^2 \geqslant b^2$: l'ordre est bien inversé.

EXERCICE 28 ⋆⋆

1. Le grillage ne couvre que trois côtés : les deux largeurs, de x mètres chacune, et la longueur. La longueur vaut donc $40 - 2x$ mètres.
Comme il s'agit de longueurs, on doit avoir $x > 0$ et $40 - 2x > 0$, c'est-à-dire $40 > 2x$, soit $x < 20$:

$$\boxed{x \in]0\,;20[}$$

2. L'aire d'un rectangle est le produit de ses deux dimensions :

$$\boxed{\mathcal{A}(x) = x(40 - 2x)}$$

3. $$\mathcal{A}(5) = 5 \times 30 = \boxed{150} \quad ; \quad \mathcal{A}(10) = 10 \times 20 = \boxed{200} \quad ; \quad \mathcal{A}(15) = 15 \times 10 = \boxed{150}$$

Les valeurs en 5 et en 15 sont égales, et celle en 10 leur est supérieure : l'aire semble maximale au milieu de l'intervalle.

4. On développe :

$$\mathcal{A}(x) = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2 = \boxed{-2x^2 + 40x}$$

On développe ensuite l'expression proposée :

$$\begin{aligned} -2(x - 10)^2 + 200 &= -2\left(x^2 - 20x + 100\right) + 200 \\ &= -2x^2 + 40x - 200 + 200 \\ &= -2x^2 + 40x \end{aligned}$$

Les deux expressions coïncident : $\boxed{\mathcal{A}(x) = -2(x - 10)^2 + 200}$

5. Soit x un réel quelconque de $]0\,;20[$. On sait que $(x - 10)^2 \geqslant 0$. En multipliant par -2, ce qui **inverse** l'inégalité :

$$-2(x - 10)^2 \leqslant 0$$

Puis en ajoutant 200 aux deux membres :

$$-2(x - 10)^2 + 200 \leqslant 200 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \boxed{\mathcal{A}(x) \leqslant 200}$$

6. L'aire ne dépasse donc jamais 200 m^2. Or cette valeur est effectivement atteinte : $\mathcal{A}(10) = -2 \times 0 + 200 = 200$, et 10 appartient bien à $]0\,;20[$.

$$\boxed{\text{L'aire maximale vaut 200 m}^2}$$

Elle est obtenue pour une largeur de 10 m et une longueur de $40 - 20 = 20$ m :

$$\boxed{\text{l'enclos optimal mesure 10 m sur 20 m}}$$

On remarquera que, contrairement à l'exercice 8, le rectangle optimal n'est pas un carré : le mur change complètement le problème, puisqu'un des côtés est gratuit.

EXERCICE 29 ⋆⋆⋆

Partie A : deux écritures utiles.

1. On développe le membre de droite :

$$(x-1)^2 - 4 = x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2 - 4 = x^2 - 2x + 1 - 4 = x^2 - 2x - 3 = f(x)$$

$$\boxed{f(x) = (x-1)^2 - 4}$$

2. On développe de même :

$$(x+1)(x-3) = x^2 - 3x + x - 3 = x^2 - 2x - 3 = f(x)$$

$$\boxed{f(x) = (x+1)(x-3)}$$

Partie B : extremum et symétrie.

3. Pour tout réel x, $(x-1)^2 \geqslant 0$. En retranchant 4 aux deux membres :

$$(x-1)^2 - 4 \geqslant -4 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \boxed{f(x) \geqslant -4}$$

De plus $f(1) = (1-1)^2 - 4 = -4$, et 1 appartient à $[-2\,;4]$: la valeur -4 est bien atteinte.

$$\boxed{f \text{ admet pour minimum } -4 \text{ sur } [-2\,;4],\ \text{atteint pour } x = 1}$$

4. Avec la seconde écriture, $f(x) = 0$ équivaut à $(x+1)(x-3) = 0$. Par produit nul :

$$\boxed{\text{Les antécédents de 0 sont } -1 \text{ et } 3}$$

5.

$$f(0) = (0-1)^2 - 4 = 1 - 4 = \boxed{-3} \qquad ; \qquad f(2) = (2-1)^2 - 4 = 1 - 4 = \boxed{-3}$$

Les deux images sont égales. Ce n'est pas un hasard : dans l'écriture $f(x) = (x-1)^2 - 4$, seule compte la *distance* de x à 1, puisque le carré efface le signe. Or 0 et 2 sont tous deux à la distance 1 de 1.

$$\boxed{\text{La courbe est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation } x = 1}$$

C'est bien ce que l'on observe sur la figure de l'exercice 9 : les couples d'antécédents trouvés, $(-1\,;3)$ et $(-2\,;4)$, sont eux aussi symétriques autour de 1.

Partie C : variations.

6. (a) En utilisant l'écriture de la question 1 :

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \Big[(x_2-1)^2 - 4\Big] - \Big[(x_1-1)^2 - 4\Big] \\ &= (x_2-1)^2 - (x_1-1)^2 \end{aligned}$$

On reconnaît une différence de deux carrés, $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$, avec $A = x_2 - 1$ et $B = x_1 - 1$:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= [(x_2-1) - (x_1-1)] \times [(x_2-1) + (x_1-1)] \\ &= \boxed{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2)} \end{aligned}$$

(b) Le premier facteur est positif puisque $x_1 \leqslant x_2$. Pour le second, on utilise $x_1 \geqslant 1$ et $x_2 \geqslant 1$, d'où $x_1 + x_2 \geqslant 2$, c'est-à-dire $x_2 + x_1 - 2 \geqslant 0$. Le produit de deux nombres positifs est positif :

$$f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0 \qquad \text{donc} \qquad f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

$$\boxed{f \text{ est croissante sur } [1\,;4]}$$

7. On complète avec les valeurs $f(-2) = 5$, $f(1) = -4$ et $f(4) = 5$:

x	-2		1		4
$f(x)$	5	↘	-4	↗	5

8. En repartant de l'écriture de la question 1 :

$$f(x) = 5 \iff (x-1)^2 - 4 = 5 \iff (x-1)^2 = 9$$

Le nombre $x - 1$ a donc pour carré 9 : il vaut 3 ou -3.

$$x - 1 = 3 \implies x = 4 \qquad ; \qquad x - 1 = -3 \implies x = -2$$

$$\boxed{S = \{-2\,;4\}}$$

9. Tout concorde avec la lecture graphique de l'exercice 9 :
   - le point le plus bas de la courbe a pour ordonnée -4 et pour abscisse 1 (question 3) ;
   - la courbe coupe l'axe des abscisses en -1 et 3 (question 4) ;
   - elle passe par les points $(0\,;-3)$ et $(2\,;-3)$, symétriques par rapport à la droite d'équation $x = 1$ (question 5) ;
   - elle descend puis remonte, avec $f(-2) = f(4) = 5$ aux deux extrémités (questions 6 et 7) ;
   - les antécédents de 5 sont bien -2 et 4 (question 8).

$$\boxed{\text{Le calcul confirme entièrement ce que la courbe laissait deviner}}$$