CORRIGÉ – CHAPITRE 8

ÉQUATIONS CARTÉSIENNES

Vecteur directeur et équation cartésienne

EXERCICE 1 ⋆

1. Les deux points marqués sur d_1 ont pour coordonnées $A(-3\,;-2)$ et $B(1\,;0)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées la différence des coordonnées :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-3)\\0-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$

$\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } d_1}$

2. Sur d_2, les points marqués sont $C(0\,;3)$ et $D(2\,;-1)$:

$\boxed{\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } d_2}$

3. La droite d_3 est verticale : tous ses points ont la même abscisse 3. Deux de ses points sont par exemple $(3\,;0)$ et $(3\,;1)$:

$\boxed{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } d_3}$

$\boxed{\text{La première coordonnée est nulle : c'est la marque d'une droite verticale}}$

4. Un vecteur est directeur de d_1 s'il est colinéaire à $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, ce que l'on teste avec le déterminant.

- $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$: $4\times1-2\times2=0 \implies$ **oui**
- $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$: $4\times(-2)-(-4)\times2=0 \implies$ **oui**
- $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$: $4\times2-1\times2=6\neq0 \implies$ **non**
- $\vec{t}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$: $4\times3-6\times2=0 \implies$ **oui**

$\boxed{\vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{t} \text{ sont des vecteurs directeurs de } d_1}$

5. Tout vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ convient, c'est-à-dire tout vecteur de la forme $k\overrightarrow{AB}$ avec $k\neq0$.

$\boxed{\text{Une droite admet une infinité de vecteurs directeurs}}$

EXERCICE 2 ⋆

1. Un point appartient à d si ses coordonnées vérifient l'équation.

$$\begin{aligned} A(1\,;4) :&\quad 3\times 1-2\times 4+5=3-8+5=0 &&\Longrightarrow \boxed{A\in d}\\ B(-1\,;1) :&\quad 3\times(-1)-2\times 1+5=-3-2+5=0 &&\Longrightarrow \boxed{B\in d}\\ C(2\,;5) :&\quad 3\times 2-2\times 5+5=6-10+5=1\neq 0 &&\Longrightarrow \boxed{C\notin d}\\ D(3\,;7) :&\quad 3\times 3-2\times 7+5=9-14+5=0 &&\Longrightarrow \boxed{D\in d} \end{aligned}$$

2. On remplace x par 5 et l'on résout en y :

$$3\times 5-2y+5=0 \iff 20-2y=0 \iff \boxed{y=10}$$

3. On remplace y par -2 :

$$3x-2\times(-2)+5=0 \iff 3x+9=0 \iff \boxed{x=-3}$$

4. Un point de l'axe des ordonnées a une abscisse nulle. On pose donc $x=0$:

$$-2y+5=0 \iff \boxed{y=\frac{5}{2}}$$

$$\boxed{\text{Le point cherché a pour coordonnées } \left(0\,;\frac{5}{2}\right)}$$

EXERCICE 3 ⋆

D'après la proposition 1 du cours, la droite d'équation $ax+by+c=0$ admet $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

a) $a=2$, $b=5$: $\boxed{\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}}$

b) $a=1$, $b=-4$: $\boxed{\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}}$

c) $a=3$, $b=0$: $\boxed{\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}}$

d) $a=0$, $b=-2$: $\boxed{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}}$

e) $a=-1$, $b=1$: $\boxed{\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}}$

f) $a=4$, $b=-6$: $\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$, que l'on simplifie en $\boxed{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}}$

En c), le vecteur directeur est vertical : la droite d_3 est parallèle à l'axe des ordonnées. En d), il est horizontal : d_4 est parallèle à l'axe des abscisses.

EXERCICE 4 ⋆

Méthode : si $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur, alors en identifiant avec $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ on obtient $a=\beta$ et $b=-\alpha$. L'équation est donc de la forme $\beta x-\alpha y+c=0$, et l'on détermine c en injectant les coordonnées du point.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ donne $a=-1$ et $b=-3$, soit $-x-3y+c=0$. Avec $A(1\,;2)$:

$$-1-6+c=0 \iff c=7$$

$$\boxed{-x-3y+7=0,\ \text{ou encore } x+3y-7=0}$$

2. $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ donne $3x-4y+c=0$. Avec $A(-2\,;5)$:

$$-6-20+c=0 \iff c=26 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{3x-4y+26=0}$$

3. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ donne $2x-y+c=0$. Avec $A(0\,;-3)$:

$$0+3+c=0 \iff c=-3 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{2x-y-3=0}$$

4. $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ donne $5x+c=0$. Avec $A(4\,;1)$:

$$20+c=0 \iff c=-20 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{5x-20=0,\ \text{soit } x=4}$$

$$\boxed{\text{La droite est verticale, parallèle à l'axe des ordonnées}}$$

5. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ donne $-2y+c=0$. Avec $A(-1\,;-1)$:

$$2+c=0 \iff c=-2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{-2y-2=0,\ \text{soit } y=-1}$$

$$\boxed{\text{La droite est horizontale, parallèle à l'axe des abscisses}}$$

EXERCICE 5 ⋆⋆

Méthode : on calcule d'abord $\overrightarrow{AB}$, qui est un vecteur directeur, puis on applique la méthode de l'exercice 4.

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$, d'où l'équation $4x-2y+c=0$. Avec $A(1\,;2)$: $4-4+c=0$, donc $c=0$.

$$\boxed{4x-2y=0,\ \text{ou après simplification } 2x-y=0}$$

Vérification : pour $B(3\,;6)$, $2\times 3-6=0$.

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$, d'où $-4x-6y+c=0$. Avec $A(-2\,;1)$: $8-6+c=0$, donc $c=-2$.

$$-4x-6y-2=0 \qquad \text{soit, en divisant par } -2 : \qquad \boxed{2x+3y+1=0}$$

Vérification : A donne $-4+3+1=0$ et B donne $8-9+1=0$.

c) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$: le vecteur est horizontal, la droite l'est aussi. Les deux points ont pour ordonnée 5 :

$$\boxed{y-5=0,\ \text{c'est-à-dire } y=5}$$

d) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$: la droite est verticale, les deux points ont pour abscisse 2 :

$$\boxed{x-2=0,\ \text{c'est-à-dire } x=2}$$

e) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$, d'où $-4x-4y+c=0$. Avec $A(-3\,;2)$: $12-8+c=0$, donc $c=-4$.

$$-4x-4y-4=0 \qquad \text{soit, en divisant par } -4 : \qquad \boxed{x+y+1=0}$$

Vérification : A donne $-3+2+1=0$ et B donne $1-2+1=0$.

EXERCICE 6 ⋆⋆

1. On injecte les coordonnées de $A(2\,;m)$ dans l'équation :

$$3\times 2-4m+2=0 \iff 8-4m=0 \iff \boxed{m=2}$$

2. On injecte $B(3\,;1)$:

$$3k+3-6=0 \iff 3k=3 \iff \boxed{k=1}$$

3. Deux vecteurs sont colinéaires si leur déterminant est nul :

$$m\times(-2)-3\times 4=0 \iff -2m-12=0 \iff \boxed{m=-6}$$

4. La droite $2x+my-5=0$ admet $\begin{pmatrix}-m\\2\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. Il doit être colinéaire à $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$:

$$(-m)\times 1-3\times 2=0 \iff -m-6=0 \iff \boxed{m=-6}$$

Vérification : la droite $2x-6y-5=0$ admet $\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur, qui est bien colinéaire à $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ puisque $\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

Équation réduite

EXERCICE 7 ⋆

Méthode : on isole y, ce qui n'est possible que si son coefficient est non nul.

a)

$$3x+2y-6=0 \iff 2y=-3x+6 \iff \boxed{y=-\frac{3}{2}x+3}$$

b)

$$x-y+4=0 \iff -y=-x-4 \iff \boxed{y=x+4}$$

c)

$$5x+y-2=0 \iff \boxed{y=-5x+2}$$

d)

$$-2x+4y+6=0 \iff 4y=2x-6 \iff \boxed{y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}}$$

e) Le coefficient de y est nul : on ne peut pas isoler y. L'équation se réduit à $3x = 6$:

$$\boxed{x = 2 : \text{ cette droite verticale n'admet pas d'équation réduite}}$$

f)

$$-y + 7 = 0 \iff \boxed{y = 7}$$

C'est bien de la forme $y = mx + p$ avec $m = 0$ et $p = 7$.

EXERCICE 8 ⋆

Méthode : on ramène tous les termes dans le même membre.

a) $y = 2x - 5 \iff \boxed{2x - y - 5 = 0}$

b) $y = -3x + 1 \iff \boxed{3x + y - 1 = 0}$

c) $y = \dfrac{x}{3} + 2 \iff \dfrac{x}{3} - y + 2 = 0$, et en multipliant par 3 : $\boxed{x - 3y + 6 = 0}$

d) $y = -4 \iff \boxed{y + 4 = 0}$

e) On multiplie d'abord par 10 pour éliminer les dénominateurs :

$$y = -\frac{2}{5}x - \frac{1}{2} \iff 10y = -4x - 5 \iff \boxed{4x + 10y + 5 = 0}$$

On rappelle qu'une équation cartésienne n'est pas unique : multiplier les trois coefficients par un même réel non nul donne une autre équation de la même droite.

EXERCICE 9 ⋆

Équation	m	p	**Sens**	**Point sur l'axe des ordonnées**
$y = 3x - 1$	3	-1	monte	$(0\,;-1)$
$y = -x + 2$	-1	2	descend	$(0\,;2)$
$y = \dfrac{x}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	monte	$(0\,;0)$
$y = -5$	0	-5	horizontale	$(0\,;-5)$
$y = -\dfrac{2}{3}x + 4$	$-\dfrac{2}{3}$	4	descend	$(0\,;4)$
$y = 7x$	7	0	monte	$(0\,;0)$

La droite monte lorsque $m > 0$, descend lorsque $m < 0$, et est horizontale lorsque $m = 0$. Les droites c) et f) passent par l'origine, ce qui se lit directement sur $p = 0$.

EXERCICE 10 ⋆⋆

Méthode : on calcule $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, puis on détermine p en injectant les coordonnées de l'un des deux points.

a)

$$m = \frac{9 - 3}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$$

Avec $A(1\,;3)$: $3 = 2 \times 1 + p$, donc $p = 1$.

$$\boxed{y = 2x + 1}$$

Vérification avec B : $2 \times 4 + 1 = 9$.

b)

$$m = \frac{-3-5}{2-(-2)} = \frac{-8}{4} = -2$$

Avec $A(-2\,;5)$: $5 = -2 \times (-2) + p = 4 + p$, donc $p = 1$.

$$\boxed{y = -2x + 1}$$

c)

$$m = \frac{1-(-1)}{3-0} = \frac{2}{3}$$

Le point $A(0\,;-1)$ étant sur l'axe des ordonnées, on lit directement $p = -1$.

$$\boxed{y = \frac{2}{3}x - 1}$$

d)

$$m = \frac{2-2}{5-(-1)} = 0$$

Le coefficient directeur est nul : la droite est horizontale.

$$\boxed{y = 2}$$

e) Ici $x_A = x_B = 3$: le dénominateur serait nul, le calcul est impossible.

$$\boxed{\text{La droite est verticale d'équation } x = 3 \text{ : elle n'a pas d'équation réduite}}$$

EXERCICE 11 ⋆

1. Tous les points de l'axe des abscisses ont une ordonnée nulle, et tous ceux de l'axe des ordonnées ont une abscisse nulle :

$$\boxed{\text{axe des abscisses : } y = 0} \quad ; \quad \boxed{\text{axe des ordonnées : } x = 0}$$

2. Une parallèle à l'axe des abscisses est horizontale : tous ses points ont la même ordonnée, celle de A.

$$\boxed{y = -3}$$

3. Une parallèle à l'axe des ordonnées est verticale : tous ses points ont la même abscisse.

$$\boxed{x = 2}$$

4. La droite passe par l'origine, donc $p = 0$. Son coefficient directeur vaut $m = \dfrac{1-0}{1-0} = 1$:

$$\boxed{y = x}$$

C'est la première bissectrice du repère.

Seules les droites verticales n'admettent pas d'équation réduite, car on ne peut pas y exprimer y en fonction de x : à une même abscisse correspondrait une infinité d'ordonnées. Ici, il s'agit de l'axe des ordonnées et de la droite $x = 2$.

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. L'équation est de la forme $y = 3x + p$. Avec $A(2\,;5)$:

$$5 = 3 \times 2 + p \iff p = -1 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{y = 3x - 1}$$

2. L'ordonnée à l'origine vaut -2, donc la droite passe par $(0\,;-2)$. Son coefficient directeur est :

$$m = \frac{6-(-2)}{4-0} = \frac{8}{4} = 2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{y = 2x - 2}$$

3. On injecte $C(-3\,;8)$ dans $y = mx + 2$:

$$8 = -3m + 2 \iff -3m = 6 \iff \boxed{m = -2}$$

4. Les deux droites ont le même coefficient directeur 3, mais des ordonnées à l'origine différentes (-1 et 5).

$$\boxed{\text{Elles sont strictement parallèles, donc non sécantes}}$$

Aucun calcul n'est nécessaire : deux droites de même coefficient directeur ont des vecteurs directeurs $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ identiques, donc la même direction.

Lectures et tracés graphiques

EXERCICE 13 ⋆

Méthode, détaillée sur d_1. On lit d'abord l'ordonnée du point où la droite coupe l'axe des ordonnées : ici -1, donc $p = -1$. On se place ensuite sur ce point et l'on avance de 1 vers la droite : la droite monte alors de 2 carreaux, donc $m = 2$.

Droite	p	m	**Équation réduite**
d_1	-1	2	$y = 2x - 1$
d_2	3	-1	$y = -x + 3$
d_3	2	$\frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{2}x + 2$
d_4	-3	0	$y = -3$

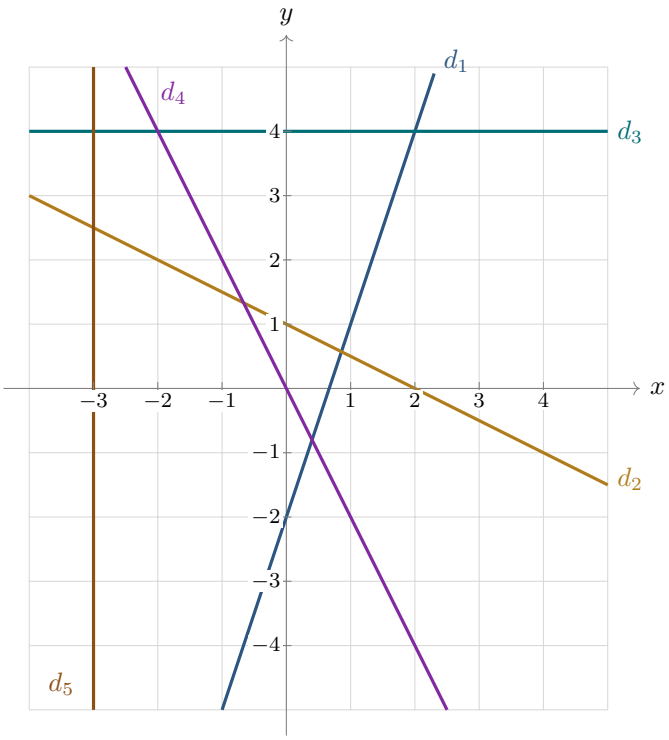
Pour d_3, le coefficient directeur n'est pas entier : en avançant de 1 on ne monte que d'un demi-carreau, ce qui est délicat à lire. On préfère avancer de 2 et constater que l'on monte de 1, d'où $m = \frac{1}{2}$.

Pour d_4, la droite est horizontale : on ne monte pas du tout, donc $m = 0$.

EXERCICE 14 ⋆

Pour chaque droite, deux points suffisent. On peut soit placer le point $(0\,;p)$ puis appliquer le coefficient directeur, soit calculer deux ordonnées.

Droite	**Premier point**	**Second point**
$d_1 : y = 3x - 2$	$(0\,;-2)$	$(1\,;1)$
$d_2 : y = -\frac{x}{2} + 1$	$(0\,;1)$	$(2\,;0)$
$d_3 : y = 4$	$(0\,;4)$	$(1\,;4)$
$d_4 : y = -2x$	$(0\,;0)$	$(1\,;-2)$

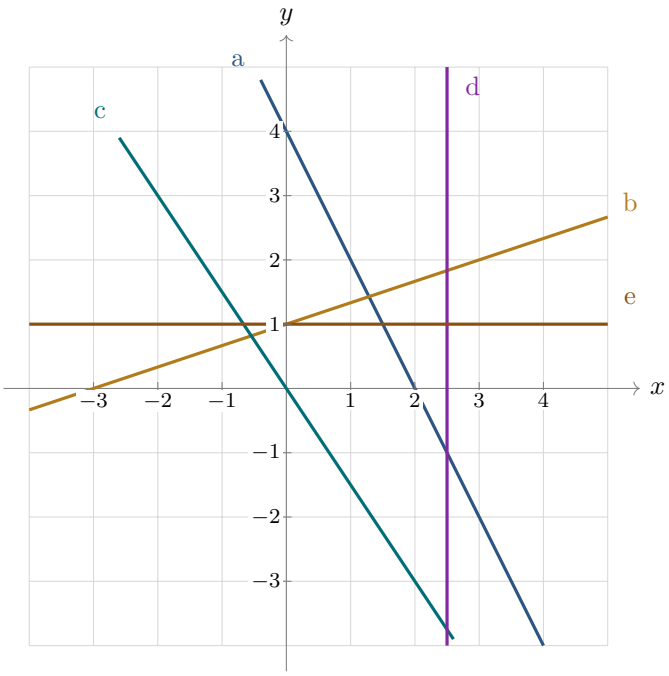


Pour d_5 d'équation $x = -3$, la méthode précédente ne s'applique pas : cette équation n'est pas de la forme $y = mx + p$, on ne peut donc lire ni coefficient directeur ni ordonnée à l'origine.

On trace directement la verticale passant par le point d'abscisse -3

EXERCICE 15 ⋆

Droite	Point d'abscisse nulle	Point d'ordonnée nulle
a) $2x + y - 4 = 0$	$(0\,;4)$	$(2\,;0)$
b) $x - 3y + 3 = 0$	$(0\,;1)$	$(-3\,;0)$
c) $3x + 2y = 0$	$(0\,;0)$	$(0\,;0)$
d) $2x - 5 = 0$	aucun	$\left(\frac{5}{2}\,;0\right)$
e) $-y + 1 = 0$	$(0\,;1)$	aucun



Pour c), la méthode échoue : la droite passe par l'origine, donc les deux points cherchés se confondent en $(0\,;0)$ et l'on n'obtient qu'un seul point.

$$\boxed{\text{Il faut alors choisir une autre valeur de } x, \text{ par exemple } x = 2 \text{ qui donne } y = -3}$$

EXERCICE 16 ⋆⋆

d_1 : La droite est verticale et tous ses points ont pour abscisse -2.

$$\boxed{x + 2 = 0}$$

C'est celle des deux premières qui n'admet pas d'équation réduite.

d_2 : La droite est horizontale et tous ses points ont pour ordonnée 1.

$$\boxed{y - 1 = 0}$$

Son équation réduite existe, c'est $y = 1$, avec $m = 0$.

d_3 : Elle passe par $(0\,;0)$ et $(3\,;2)$, donc un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. L'équation est de la forme $2x - 3y + c = 0$, et l'origine donne $c = 0$.

$$\boxed{2x - 3y = 0}$$

Vérification avec $(3\,;2)$: $6 - 6 = 0$.

d_4 : Elle passe par $(-3\,;0)$ et $(0\,;-2)$, donc un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. L'équation est de la forme $-2x - 3y + c = 0$. Avec $(0\,;-2)$: $6 + c = 0$, donc $c = -6$.

$$-2x - 3y - 6 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{2x + 3y + 6 = 0}$$

Vérification avec $(-3\,;0)$: $-6 + 0 + 6 = 0$.

EXERCICE 17 ⋆⋆

Droite	Équation	Justification
a	**2.** $y = x + 2$	Elle coupe l'axe des ordonnées en 2 et monte de 1 quand on avance de 1.
b	**1.** $2x + y - 4 = 0$	Son équation réduite est $y = -2x + 4$: ordonnée à l'origine 4, et la droite descend de 2 quand on avance de 1.
c	**4.** $y + 1 = 0$	C'est la droite horizontale d'ordonnée -1.
e	**3.** $x - 3 = 0$	C'est la droite verticale d'abscisse 3.

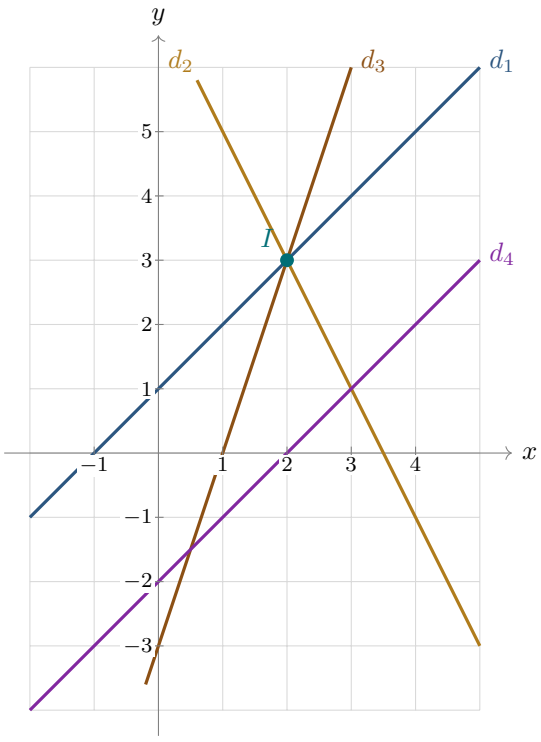
Les deux équations restantes ne correspondent à aucune droite tracée :

$$\boxed{5.\ y = 2x + 4 \qquad \text{et} \qquad 6.\ x + y - 2 = 0}$$

La droite $y = 2x+4$ aurait pour ordonnée à l'origine 4, comme b, mais elle *monte* au lieu de descendre. Quant à $x+y-2 = 0$, son équation réduite est $y = -x+2$: elle descend, mais coupe l'axe des ordonnées en 2 et non en 4.

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. Voici les trois droites, ainsi que d_4 ajoutée à la question 5.



2. $\boxed{\text{Les trois droites semblent passer par un même point : elles semblent concourantes}}$

3. On résout d_1 et d_2 en égalant les deux expressions de y :

$$x + 1 = -2x + 7 \iff 3x = 6 \iff x = 2$$

puis $y = 2 + 1 = 3$.

$$\boxed{I(2\,;3)}$$

4. On calcule l'ordonnée du point de d_3 d'abscisse 2 :

$$3 \times 2 - 3 = 3$$

C'est bien l'ordonnée de I.

$$\boxed{I \text{ appartient aux trois droites : elles sont concourantes en } I}$$

La conjecture est maintenant **démontrée** : la lecture graphique seule ne suffisait pas, car deux droites très proches peuvent sembler se couper au même endroit.

5. Les droites d_1 et d_4 ont le même coefficient directeur 1, mais des ordonnées à l'origine différentes (1 et -2).

$$\boxed{d_4 \text{ est strictement parallèle à } d_1}$$

Par le calcul : leurs équations cartésiennes sont $x - y + 1 = 0$ et $x - y - 2 = 0$, et le critère donne $1 \times (-1) - 1 \times (-1) = 0$, ce qui confirme le parallélisme.

Positions relatives et systèmes

EXERCICE 19 ⋆

On applique la proposition 2 : les droites sont sécantes si et seulement si $ab' - a'b \neq 0$.

	$(a\,;b)$ et $(a'\,;b')$	$ab' - a'b$	**Conclusion**
1.	$(2\,;3)$ et $(4\,;6)$	$2 \times 6 - 4 \times 3 = 0$	parallèles
2.	$(1\,;-2)$ et $(3\,;1)$	$1 \times 1 - 3 \times (-2) = 7$	sécantes
3.	$(-1\,;4)$ et $(2\,;-8)$	$(-1) \times (-8) - 2 \times 4 = 0$	parallèles
4.	$(5\,;1)$ et $(1\,;-5)$	$5 \times (-5) - 1 \times 1 = -26$	sécantes
5.	$(3\,;0)$ et $(0\,;2)$	$3 \times 2 - 0 \times 0 = 6$	sécantes

Le cas 5 mérite un commentaire : d est verticale d'équation $x = 2$ et d' est horizontale d'équation $y = -\frac{1}{2}$. Elles sont bien sécantes, au point $\left(2\,;-\frac{1}{2}\right)$.

EXERCICE 20 ⋆

Méthode par substitution : on isole une inconnue dans l'une des équations, puis on l'injecte dans l'autre.

1. La seconde équation donne immédiatement $y = 3x$. On l'injecte dans la première :

$$\begin{aligned} x + 2 \times 3x - 7 &= 0 \\ 7x - 7 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

puis $y = 3 \times 1 = 3$.

$$\boxed{S = \{(1\,;3)\}}$$

Vérification : $1 + 6 - 7 = 0$ et $3 - 3 = 0$.

2. La seconde équation donne $x = y + 1$. On l'injecte dans la première :

$$\begin{aligned} 2(y+1) + y - 5 &= 0 \\ 2y + 2 + y - 5 &= 0 \\ 3y - 3 &= 0 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

puis $x = 1 + 1 = 2$.

$$\boxed{S = \{(2\,;1)\}}$$

Vérification : $4 + 1 - 5 = 0$ et $2 - 1 - 1 = 0$.

3. La seconde équation donne $x = y - 1$. On l'injecte dans la première :

$$\begin{aligned} 4(y-1) + 3y - 10 &= 0 \\ 4y - 4 + 3y - 10 &= 0 \\ 7y - 14 &= 0 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

puis $x = 2 - 1 = 1$.

$$\boxed{S = \{(1\,;2)\}}$$

Vérification : $4 + 6 - 10 = 0$ et $1 - 2 + 1 = 0$.

EXERCICE 21 ⋆

Méthode par combinaison linéaire : on ajoute ou l'on retranche les deux équations, éventuellement multipliées, de façon à faire disparaître une inconnue.

1. $$\begin{cases} 3x + 2y - 12 = 0 & (e_1) \\ 3x - 4y + 6 = 0 & (e_2) \end{cases}$$

Les coefficients de x sont identiques : on effectue $(e_1) - (e_2)$.

$$\begin{aligned} (3x + 2y - 12) - (3x - 4y + 6) &= 0 - 0 \\ 3x + 2y - 12 - 3x + 4y - 6 &= 0 \\ 6y - 18 &= 0 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

On reporte dans (e_1) : $3x + 6 - 12 = 0$, donc $3x = 6$ et $x = 2$.

$$\boxed{S = \{(2\,;3)\}}$$

Vérification : $6 + 6 - 12 = 0$ et $6 - 12 + 6 = 0$.

2. $$\begin{cases} 2x + 5y - 1 = 0 & (e_1) \\ 2x - 3y - 9 = 0 & (e_2) \end{cases}$$

Les coefficients de x sont à nouveau identiques : on effectue $(e_1) - (e_2)$.

$$\begin{aligned} (2x + 5y - 1) - (2x - 3y - 9) &= 0 \\ 8y + 8 &= 0 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

On reporte dans (e_1) : $2x - 5 - 1 = 0$, donc $x = 3$.

$$\boxed{S = \{(3\,;-1)\}}$$

Vérification : $6 - 5 - 1 = 0$ et $6 + 3 - 9 = 0$.

3. $$\begin{cases} 3x + y - 1 = 0 & (e_1) \\ 3x - 2y + 11 = 0 & (e_2) \end{cases}$$

On effectue $(e_1) - (e_2)$:

$$\begin{aligned} (3x + y - 1) - (3x - 2y + 11) &= 0 \\ 3y - 12 &= 0 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

On reporte dans (e_1) : $3x + 4 - 1 = 0$, donc $3x = -3$ et $x = -1$.

$$\boxed{S = \{(-1\,;4)\}}$$

Vérification : $-3 + 4 - 1 = 0$ et $-3 - 8 + 11 = 0$.

4. $$\begin{cases} 2x + 3y - 16 = 0 & (e_1) \\ 3x - 2y - 11 = 0 & (e_2) \end{cases}$$

Cette fois aucune inconnue ne disparaît directement. Pour éliminer y, on remarque que les coefficients 3 et -2 deviennent opposés si l'on multiplie (e_1) par 2 et (e_2) par 3. On effectue donc $2 \times (e_1) + 3 \times (e_2)$:

$$\begin{aligned} 2(2x + 3y - 16) + 3(3x - 2y - 11) &= 0 \\ 4x + 6y - 32 + 9x - 6y - 33 &= 0 \\ 13x - 65 &= 0 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

On reporte dans (e_1) : $10 + 3y - 16 = 0$, donc $3y = 6$ et $y = 2$.

$$\boxed{S = \{(5\,;2)\}}$$

Vérification : $10 + 6 - 16 = 0$ et $15 - 4 - 11 = 0$.

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. Prévision : $(a\,;b) = (2\,;4)$ et $(a'\,;b') = (1\,;2)$, donc $ab' - a'b = 2 \times 2 - 1 \times 4 = 0$: les droites sont parallèles.
   En divisant la première équation par 2, on obtient exactement la seconde : les deux droites sont **confondues**.

   $$\boxed{\text{Une infinité de solutions : tous les couples } (x\,;y) \text{ tels que } x + 2y - 3 = 0}$$

   Autrement dit, $S = \{(3 - 2y\,;y)\ ;\ y \in \mathbb{R}\}$.

   $$\boxed{\text{Géométriquement : les deux droites sont confondues}}$$

2. Prévision : $1 \times (-2) - 2 \times (-1) = 0$: les droites sont parallèles.
La première donne $x = y - 1$. On l'injecte dans la seconde :

$$2(y-1) - 2y - 5 = 0 \iff 2y - 2 - 2y - 5 = 0 \iff -7 = 0$$

ce qui est impossible.

$\boxed{S = \varnothing}$; Géométriquement : les droites sont strictement parallèles

3. Prévision : $3 \times (-2) - 1 \times 1 = -7 \neq 0$: les droites sont sécantes, il y a donc exactement une solution.
La seconde donne $x = 2y - 4$. On l'injecte dans la première :

$$\begin{aligned} 3(2y-4) + y - 2 &= 0 \\ 6y - 12 + y - 2 &= 0 \\ 7y - 14 &= 0 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

puis $x = 2 \times 2 - 4 = 0$.

$\boxed{S = \{(0\,;2)\}}$; Géométriquement : les droites se coupent au point $(0\,;2)$

EXERCICE 23 ⋆⋆

1.

$$\begin{cases} 4x - 3y - 5 = 0 & (e_1) \\ 2x + y - 5 = 0 & (e_2) \end{cases}$$

La seconde équation donne $y = 5 - 2x$, que l'on injecte dans la première :

$$\begin{aligned} 4x - 3(5 - 2x) - 5 &= 0 \\ 4x - 15 + 6x - 5 &= 0 \\ 10x - 20 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

puis $y = 5 - 4 = 1$.

$$\boxed{S = \{(2\,;1)\}}$$

Vérification : $8 - 3 - 5 = 0$ et $4 + 1 - 5 = 0$.

2.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 & (e_1) \\ 5x + 4y - 7 = 0 & (e_2) \end{cases}$$

Pour éliminer x, on effectue $5 \times (e_1) - 2 \times (e_2)$:

$$\begin{aligned} 5(2x + 3y) - 2(5x + 4y - 7) &= 0 \\ 10x + 15y - 10x - 8y + 14 &= 0 \\ 7y + 14 &= 0 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

On reporte dans (e_1) : $2x - 6 = 0$, donc $x = 3$.

$$\boxed{S = \{(3\,;-2)\}}$$

Vérification : $6 - 6 = 0$ et $15 - 8 - 7 = 0$.

3.
$$\begin{cases} 3x+2y-5=0 & (e_1) \\ 4x-5y+24=0 & (e_2) \end{cases}$$

Pour éliminer x, on effectue $4\times(e_1)-3\times(e_2)$:

$$\begin{aligned} 4(3x+2y-5)-3(4x-5y+24)&=0\\ 12x+8y-20-12x+15y-72&=0\\ 23y-92&=0\\ y&=4 \end{aligned}$$

On reporte dans (e_1) : $3x+8-5=0$, donc $3x=-3$ et $x=-1$.

$$\boxed{S=\{(-1\,;4)\}}$$

Vérification : $-3+8-5=0$ et $-4-20+24=0$.

4.
$$\begin{cases} 2x+3y-4=0 & (e_1) \\ 5x-y-3=0 & (e_2) \end{cases}$$

Pour éliminer y, on effectue $(e_1)+3\times(e_2)$:

$$\begin{aligned} (2x+3y-4)+3(5x-y-3)&=0\\ 2x+3y-4+15x-3y-9&=0\\ 17x-13&=0\\ x&=\frac{13}{17} \end{aligned}$$

On reporte dans (e_2) :

$$y=5x-3=\frac{65}{17}-\frac{51}{17}=\frac{14}{17}$$

$$\boxed{S=\left\{\left(\frac{13}{17}\,;\frac{14}{17}\right)\right\}}$$

Vérification dans (e_1) : $\dfrac{26}{17}+\dfrac{42}{17}-\dfrac{68}{17}=\dfrac{0}{17}=0$.

5.
$$\begin{cases} 3x-5y+2=0 & (e_1) \\ 4x+7y-6=0 & (e_2) \end{cases}$$

Pour éliminer x, on effectue $4\times(e_1)-3\times(e_2)$:

$$\begin{aligned} 4(3x-5y+2)-3(4x+7y-6)&=0\\ 12x-20y+8-12x-21y+18&=0\\ -41y+26&=0\\ y&=\frac{26}{41} \end{aligned}$$

On reporte dans (e_1) :

$$3x=5y-2=\frac{130}{41}-\frac{82}{41}=\frac{48}{41}\qquad\text{d'où}\qquad x=\frac{16}{41}$$

$$\boxed{S=\left\{\left(\frac{16}{41}\,;\frac{26}{41}\right)\right\}}$$

Vérification dans (e_2) : $\dfrac{64}{41}+\dfrac{182}{41}-\dfrac{246}{41}=0$.

6.
$$\begin{cases} 6x+4y-5=0 & (e_1) \\ 2x-3y+1=0 & (e_2) \end{cases}$$

Pour éliminer x, on effectue $(e_1) - 3 \times (e_2)$:

$$\begin{aligned} (6x+4y-5)-3(2x-3y+1)&=0\\ 6x+4y-5-6x+9y-3&=0\\ 13y-8&=0\\ y&=\frac{8}{13} \end{aligned}$$

On reporte dans (e_2) :

$$2x = 3y-1 = \frac{24}{13} - \frac{13}{13} = \frac{11}{13} \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{11}{26}$$

$$\boxed{S = \left\{\left(\frac{11}{26}\,;\frac{8}{13}\right)\right\}}$$

On prendra garde ici à simplifier : le calcul brut donne $y = \frac{16}{26}$, qu'il faut réduire en $\frac{8}{13}$.

Vérification dans (e_1) : $6 \times \frac{11}{26} + 4 \times \frac{8}{13} - 5 = \frac{66}{26} + \frac{64}{26} - \frac{130}{26} = 0$.

Les trois derniers systèmes n'ont pas de solution entière. On remarquera que la substitution y serait beaucoup plus lourde : elle introduirait des fractions dès la première étape, alors que la combinaison linéaire ne les fait apparaître qu'à la toute fin.

EXERCICE 24 ⋆⋆

1. Les coefficients sont $(a\,;b) = (2\,;-1)$ et $(a'\,;b') = (1\,;1)$:

$$ab' - a'b = 2 \times 1 - 1 \times (-1) = 2 + 1 = 3 \neq 0$$

$$\boxed{d \text{ et } d' \text{ sont sécantes}}$$

2.
$$\begin{cases} 2x-y-1=0 & (e_1) \\ x+y-5=0 & (e_2) \end{cases}$$

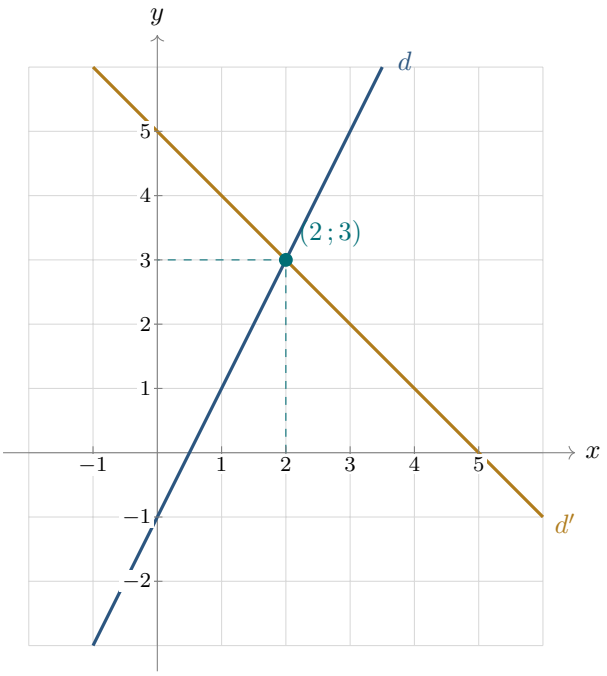
Les coefficients de y sont opposés : on effectue $(e_1) + (e_2)$.

$$\begin{aligned} (2x-y-1)+(x+y-5)&=0\\ 3x-6&=0\\ x&=2 \end{aligned}$$

On reporte dans (e_2) : $2+y-5=0$, donc $y=3$.

$$\boxed{\text{Le point d'intersection a pour coordonnées } (2\,;3)}$$

3. Les équations réduites sont $y = 2x-1$ et $y = -x+5$.



La lecture graphique confirme le résultat du calcul

EXERCICE 25 ⋆⋆

1. En notant x le prix d'une place adulte et y celui d'une place enfant :

$$\begin{cases} 3x + 2y - 44 = 0 & (e_1) \\ 2x + 4y - 48 = 0 & (e_2) \end{cases}$$

2. On remarque d'abord que (e_2) se simplifie par 2 : $x + 2y - 24 = 0$. On effectue alors $(e_1) - (e_2)'$, où $(e_2)'$ désigne cette équation simplifiée :

$$\begin{aligned} (3x + 2y - 44) - (x + 2y - 24) &= 0 \\ 2x - 20 &= 0 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

On reporte dans $(e_2)'$: $10 + 2y - 24 = 0$, donc $2y = 14$ et $y = 7$.

Une place adulte coûte 10 euros, une place enfant 7 euros

3. Vérification dans les deux situations de l'énoncé :

$$3 \times 10 + 2 \times 7 = 30 + 14 = 44 \qquad \text{et} \qquad 2 \times 10 + 4 \times 7 = 20 + 28 = 48$$

Les deux conditions sont bien respectées.

Exercices de synthèse

EXERCICE 26 : QCM ⋆

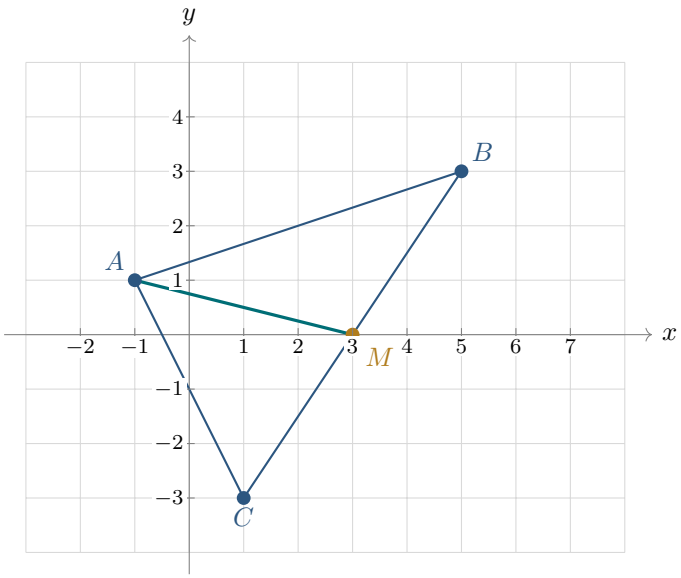
Question	Réponse	Justification
1	**B**	Pour $ax+by+c=0$, le vecteur directeur est $\binom{-b}{a}$, ici $\binom{5}{3}$. La réponse A donne $\binom{a}{b}$, qui est le vecteur *normal*.
2	**A**	$2x+4y-8=0 \iff 4y=-2x+8 \iff y=-\frac{x}{2}+2$.
3	**A**	$2+2\times(-1)=0$. Pour B, $2+2-5=-1\neq 0$; pour C, $4-1-5=-2\neq 0$.
4	**B**	Tous les points ont pour abscisse 4 : la droite est verticale.
5	**B**	Même coefficient directeur 3, mais ordonnées à l'origine différentes.
6	**C**	La seconde équation est le double de la première : c'est la même droite.
7	**A**	$m=\dfrac{8-2}{3-1}=\dfrac{6}{2}=3$.
8	**B**	Un point de l'axe des ordonnées a une abscisse nulle ; pour $x=0$, on obtient $y=p$.
9	**A**	$1+2-3=0$ et $1-2+1=0$.
10	**A**	$5y+10=0 \iff 5y=-10 \iff y=-2$.

EXERCICE 27 : VRAI OU FAUX ⋆⋆

1. **Vraie**. C'est la proposition 1 du cours : toute droite du plan admet une équation de la forme $ax+by+c=0$.
2. **Fausse**. Les droites verticales font exception. Contre-exemple : la droite d'équation $x=3$ ne peut pas s'écrire $y=mx+p$, car à l'abscisse 3 correspondent une infinité d'ordonnées.
3. **Vraie**. Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur, alors $k\,\vec{u}$ l'est aussi pour tout réel k non nul, ce qui fournit une infinité de vecteurs.
4. **Fausse**. En multipliant a, b et c par un même réel non nul, on obtient une autre équation de la même droite. Par exemple $x+y-1=0$ et $2x+2y-2=0$ décrivent la même droite.
5. **Vraie**. Si les deux droites ont pour équations $y=mx+p$ et $y=mx+p'$, elles admettent toutes deux $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur : elles ont donc la même direction.
6. **Fausse**. Deux droites verticales sont parallèles, et pourtant aucune des deux n'admet de coefficient directeur. Contre-exemple : $x=1$ et $x=4$.
7. **Vraie**. C'est exactement l'énoncé de la proposition 1.
8. **Fausse**. Il peut n'y avoir aucune solution (droites strictement parallèles) ou une infinité (droites confondues). L'exercice 22 en donne les trois cas.
9. **Vraie**. La seconde équation s'obtient en multipliant la première par 2 : les deux équations décrivent la même droite.
10. **Vraie**. Le point d'intersection appartient aux deux droites, donc ses coordonnées vérifient les deux équations : c'est la définition d'une solution du système.

EXERCICE 28 ⋆⋆

1. Voici la figure, complétée de la médiane obtenue à la question 4.



2. Droite (AB) : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$, d'où l'équation $2x-6y+c=0$. Avec $A(-1\,;1)$: $-2-6+c=0$, donc $c=8$.

$$2x-6y+8=0 \qquad \text{soit, en divisant par 2 :} \qquad \boxed{x-3y+4=0}$$

Droite (AC) : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$, d'où $-4x-2y+c=0$. Avec A : $4-2+c=0$, donc $c=-2$.

$$-4x-2y-2=0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{2x+y+1=0}$$

Droite (BC) : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$, d'où $-6x+4y+c=0$. Avec $B(5\,;3)$: $-30+12+c=0$, donc $c=18$.

$$-6x+4y+18=0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{3x-2y-9=0}$$

3. On remplace les coordonnées de $D(7\,;1)$ dans l'équation de (BC) :

$$3\times 7-2\times 1-9=21-2-9=10\neq 0$$

$$\boxed{D \text{ n'appartient pas à la droite } (BC)}$$

4. Le milieu de $[BC]$ a pour coordonnées la moyenne de celles de B et C :

$$M\left(\frac{5+1}{2}\,;\frac{3+(-3)}{2}\right)=\boxed{M(3\,;0)}$$

La médiane issue de A est la droite (AM), avec $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$, d'où $-x-4y+c=0$. Avec $A(-1\,;1)$: $1-4+c=0$, donc $c=3$.

$$-x-4y+3=0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{x+4y-3=0}$$

Vérification avec $M(3\,;0)$: $3+0-3=0$.

5. Sur la figure, la médiane rejoint bien A au milieu du côté $[BC]$, et le point M est visuellement à égale distance de B et de C.

EXERCICE 29 ⋆⋆

1. Le prix se compose d'une part fixe et d'une part proportionnelle au nombre de gigaoctets :

$$\boxed{y_A = 0{,}2x + 12} \quad ; \quad \boxed{y_B = 0{,}1x + 20}$$

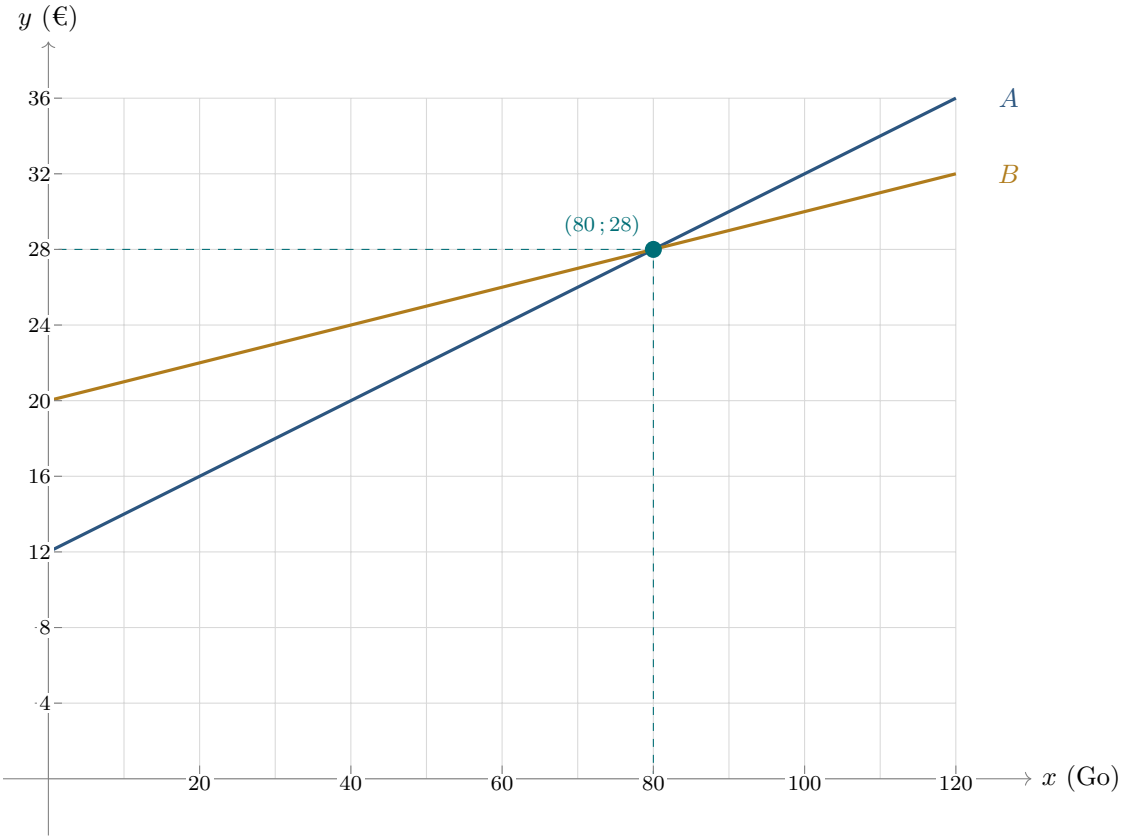
2. Ce sont deux équations réduites de droites.

Forfait A :	$m = 0{,}2$ et $p = 12$
Forfait B :	$m = 0{,}1$ et $p = 20$

L'ordonnée à l'origine p est le prix payé pour zéro gigaoctet, c'est-à-dire l'abonnement mensuel. Le coefficient directeur m est le prix d'un gigaoctet supplémentaire.

Le forfait A a un abonnement moins cher, mais un gigaoctet deux fois plus cher

3. et 4.



On lit que les deux droites se croisent pour $x = 80$.

Au-delà de 80 Go, le forfait B devient plus avantageux

En effet, à droite de ce point, la droite B passe en dessous de la droite A : elle correspond donc à un prix plus faible.

4. On résout $y_A = y_B$:

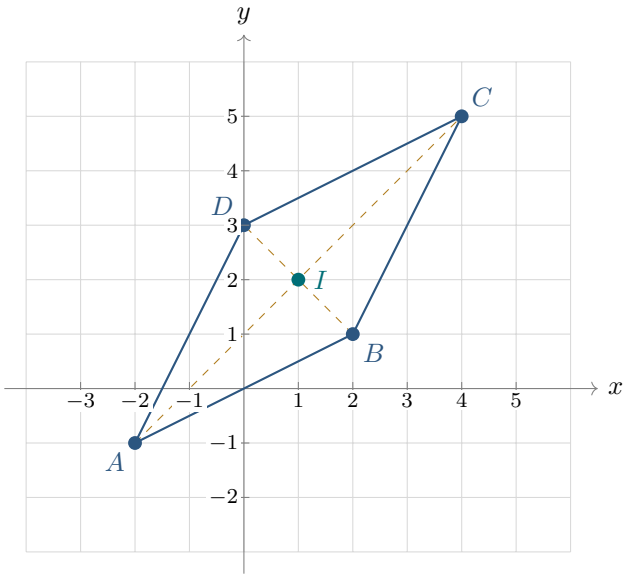
$$\begin{aligned} 0{,}2x + 12 &= 0{,}1x + 20 \\ 0{,}1x &= 8 \\ x &= 80 \end{aligned}$$

Le calcul confirme la lecture graphique : le seuil est de 80 Go

Le prix payé est alors le même dans les deux cas : $0{,}2 \times 80 + 12 = 28$ euros.

EXERCICE 30 ⋆⋆⋆

1. Voici la figure.



2. On calcule les deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 4-0 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{ABCD \text{ est un parallélogramme}}$$

3. (AB) : vecteur directeur $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, d'où $2x - 4y + c = 0$. Avec $A(-2\,;-1)$: $-4 + 4 + c = 0$, donc $c = 0$.

$$2x - 4y = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{x - 2y = 0}$$

(DC) : même vecteur directeur, d'où $2x - 4y + c = 0$. Avec $D(0\,;3)$: $-12 + c = 0$, donc $c = 12$.

$$2x - 4y + 12 = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{x - 2y + 6 = 0}$$

Critère : $(a\,;b) = (1\,;-2)$ et $(a'\,;b') = (1\,;-2)$, donc $ab' - a'b = 1 \times (-2) - 1 \times (-2) = 0$.

Les droites (AB) et (DC) sont bien parallèles

4. $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, d'où $4x - 2y + c = 0$. Avec A : $-8 + 2 + c = 0$, donc $c = 6$.

$$4x - 2y + 6 = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{2x - y + 3 = 0}$$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ également, d'où $2x - y + c = 0$. Avec $B(2\,;1)$: $4 - 1 + c = 0$, donc $c = -3$.

$$\boxed{2x - y - 3 = 0}$$

Critère : $2 \times (-1) - 2 \times (-1) = 0$.

$$\boxed{\text{Les droites } (AD) \text{ et } (BC) \text{ sont bien parallèles}}$$

5.

$$\text{milieu de } [AC] : \left(\frac{-2+4}{2}\,;\frac{-1+5}{2}\right) = (1\,;2)$$

$$\text{milieu de } [BD] : \left(\frac{2+0}{2}\,;\frac{1+3}{2}\right) = (1\,;2)$$

$$\boxed{\text{Les deux milieux sont confondus au point } I(1\,;2)}$$

$$\boxed{\text{On retrouve que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu}}$$

6. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}$, d'où $6x - 6y + c = 0$. Avec $A(-2\,;-1)$: $-12 + 6 + c = 0$, donc $c = 6$.

$$6x - 6y + 6 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{x - y + 1 = 0}$$

Vérification avec $I(1\,;2)$: $1 - 2 + 1 = 0$.

$$\boxed{I \text{ appartient bien à la diagonale } (AC)}$$

EXERCICE 31 ⋆⋆⋆

1. Les coefficients sont $(2\,;-1)$ et $(1\,;1)$:

$$ab' - a'b = 2 \times 1 - 1 \times (-1) = 3 \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{d_1 \text{ et } d_2 \text{ sont sécantes}}$$

On résout ensuite :

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 & (e_1) \\ x + y - 4 = 0 & (e_2) \end{cases}$$

Les coefficients de y sont opposés : on effectue $(e_1) + (e_2)$.

$$\begin{aligned}(2x - y + 1) + (x + y - 4) &= 0\\ 3x - 3 &= 0\\ x &= 1\end{aligned}$$

On reporte dans (e_2) : $1 + y - 4 = 0$, donc $y = 3$.

$$\boxed{I(1\,;3)}$$

2. Les trois droites sont concourantes si d_3 passe par I. On injecte donc les coordonnées de I dans l'équation de d_3 :

$$3 \times 1 - 2 \times 3 + m = 0 \iff 3 - 6 + m = 0 \iff \boxed{m = 3}$$

3. Pour $m = 0$, l'équation de d_3 est $3x - 2y = 0$. On résout avec d_1 :

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 & (e_1) \\ 3x - 2y = 0 & (e_2) \end{cases}$$

On effectue $2 \times (e_1) - (e_2)$:

$$\begin{aligned} 2(2x - y + 1) - (3x - 2y) &= 0 \\ 4x - 2y + 2 - 3x + 2y &= 0 \\ x + 2 &= 0 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

On reporte dans (e_1) : $-4 - y + 1 = 0$, donc $y = -3$. Le point d'intersection est $J(-2\,;-3)$. On vérifie s'il appartient à d_2 :

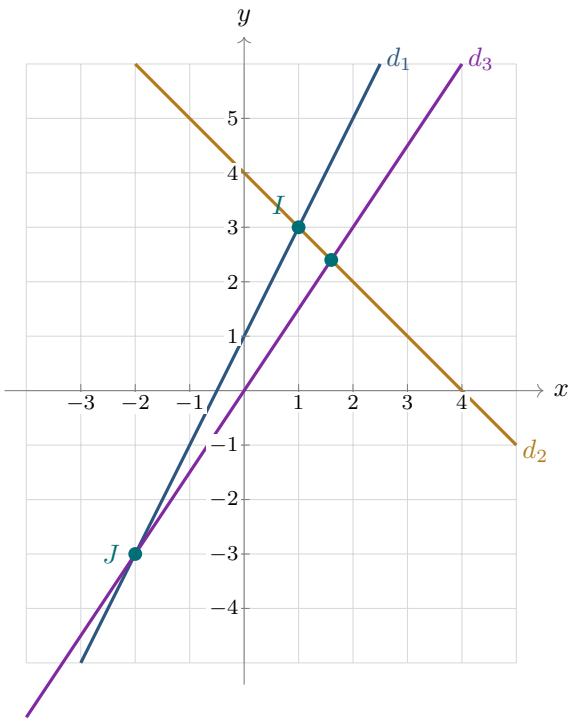
$$-2 + (-3) - 4 = -9 \neq 0$$

$\boxed{J \text{ n'appartient pas à } d_2}$

4. Les trois droites sont deux à deux sécantes, mais ne passent pas par un même point : elles se coupent donc en trois points distincts.

$\boxed{\text{Pour } m = 0, \text{ les trois droites délimitent un triangle}}$

5. Voici la figure pour $m = 0$.



Le triangle est très aplati, ce qui explique pourquoi une lecture graphique seule aurait pu laisser croire que les trois droites étaient concourantes : seul le calcul permet de trancher.