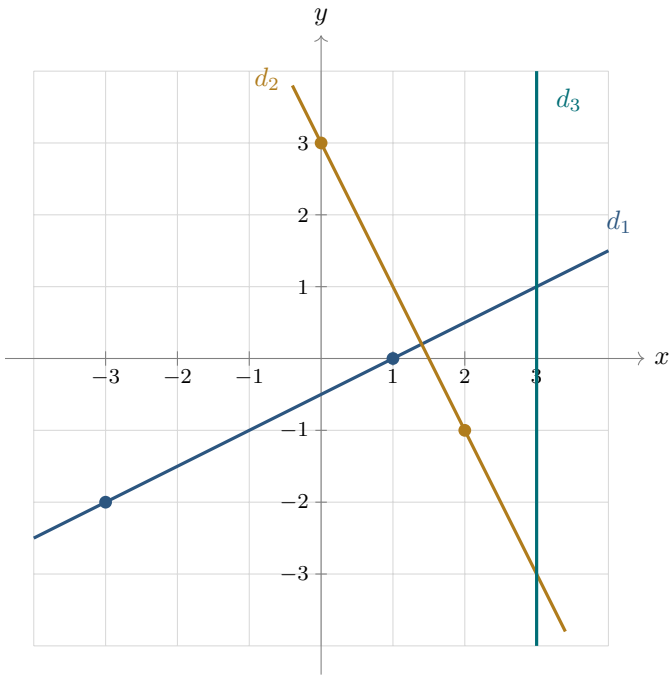
EXERCICES – CHAPITRE 8

ÉQUATIONS CARTÉSIENNES

Vecteur directeur et équation cartésienne

EXERCICE 1 ⋆

Sur le graphique ci-dessous sont tracées trois droites d_1, d_2 et d_3.



1. Lire les coordonnées des deux points marqués sur d_1, puis en déduire un vecteur directeur de cette droite.
2. Faire de même pour d_2.
3. Donner un vecteur directeur de d_3. Que remarque-t-on ?
4. Parmi les vecteurs suivants, lesquels sont des vecteurs directeurs de d_1 ?

$$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{w}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{t}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$$

5. Combien une droite admet-elle de vecteurs directeurs ? Justifier.

EXERCICE 2 ⋆

On considère la droite d d'équation cartésienne $3x - 2y + 5 = 0$.

1. Les points suivants appartiennent-ils à d ? Justifier chaque réponse par un calcul.

$$A(1\,;4) \quad ; \quad B(-1\,;1) \quad ; \quad C(2\,;5) \quad ; \quad D(3\,;7)$$

2. Déterminer l'ordonnée y du point $E(5\,;y)$ appartenant à d.
3. Déterminer l'abscisse x du point $F(x\,;-2)$ appartenant à d.
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de d avec l'axe des ordonnées.

EXERCICE 3 ⋆

Pour chacune des droites suivantes, donner un vecteur directeur.

a) $d_1 : 2x + 5y - 3 = 0$

b) $d_2 : x - 4y = 0$

c) $d_3 : 3x + 7 = 0$

d) $d_4 : -2y + 6 = 0$

e) $d_5 : -x + y + 2 = 0$

f) $d_6 : 4x - 6y + 1 = 0$

Pour f), on donnera un vecteur directeur à coordonnées entières les plus petites possibles.

EXERCICE 4 ⋆

Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

1. $A(1\,;2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$
2. $A(-2\,;5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$
3. $A(0\,;-3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$
4. $A(4\,;1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$
5. $A(-1\,;-1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

Pour d) et e), préciser la position particulière de la droite obtenue.

EXERCICE 5 ⋆⋆

Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) dans chacun des cas suivants.

a) $A(1\,;2)$ et $B(3\,;6)$

b) $A(-2\,;1)$ et $B(4\,;-3)$

c) $A(0\,;5)$ et $B(3\,;5)$

d) $A(2\,;-1)$ et $B(2\,;4)$

e) $A(-3\,;2)$ et $B(1\,;-2)$

On vérifiera à chaque fois que les coordonnées de A *et* celles de B sont bien solutions de l'équation trouvée.

EXERCICE 6 ⋆⋆

1. Déterminer le réel m pour que le point $A(2\,;m)$ appartienne à la droite d'équation $3x-4y+2=0$.
2. Déterminer le réel k pour que la droite d'équation $kx + 3y - 6 = 0$ passe par le point $B(3\,;1)$.
3. Déterminer le réel m pour que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}m\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ soient colinéaires.
4. Déterminer le réel m pour que la droite d'équation $2x+my-5=0$ admette $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

Équation réduite

EXERCICE 7 ⋆

Déterminer, lorsqu'elle existe, l'équation réduite de chacune des droites suivantes.

a) $3x + 2y - 6 = 0$

b) $x - y + 4 = 0$

c) $5x + y - 2 = 0$

d) $-2x + 4y + 6 = 0$

e) $3x - 6 = 0$

f) $-y + 7 = 0$

EXERCICE 8 ⋆

Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites suivantes.

a) $y = 2x - 5$

b) $y = -3x + 1$

c) $y = \dfrac{x}{3} + 2$

d) $y = -4$

e) $y = -\dfrac{2}{5}x - \dfrac{1}{2}$

Pour e), on multipliera d'abord les deux membres par 10 afin d'obtenir des coefficients entiers.

EXERCICE 9 ⋆

Pour chacune des droites suivantes, donner le coefficient directeur m, l'ordonnée à l'origine p, préciser si la droite monte ou descend de gauche à droite, et donner les coordonnées de son point d'intersection avec l'axe des ordonnées.

a) $y = 3x - 1$

b) $y = -x + 2$

c) $y = \dfrac{x}{2}$

d) $y = -5$

e) $y = -\dfrac{2}{3}x + 4$

f) $y = 7x$

EXERCICE 10 ⋆⋆

Déterminer, lorsqu'elle existe, l'équation réduite de la droite (AB).

a) $A(1\,;3)$ et $B(4\,;9)$

b) $A(-2\,;5)$ et $B(2\,;-3)$

c) $A(0\,;-1)$ et $B(3\,;1)$

d) $A(-1\,;2)$ et $B(5\,;2)$

e) $A(3\,;1)$ et $B(3\,;-4)$

On rappelle que le coefficient directeur se calcule par $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, ce qui suppose $x_A \neq x_B$.

EXERCICE 11 ⋆

Déterminer une équation de chacune des droites suivantes.

1. L'axe des abscisses, puis l'axe des ordonnées.
2. La droite parallèle à l'axe des abscisses passant par $A(2\,;-3)$.
3. La droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par ce même point A.
4. La droite passant par l'origine et par le point $B(1\,;1)$.

Laquelle de ces droites n'admet pas d'équation réduite ? Justifier.

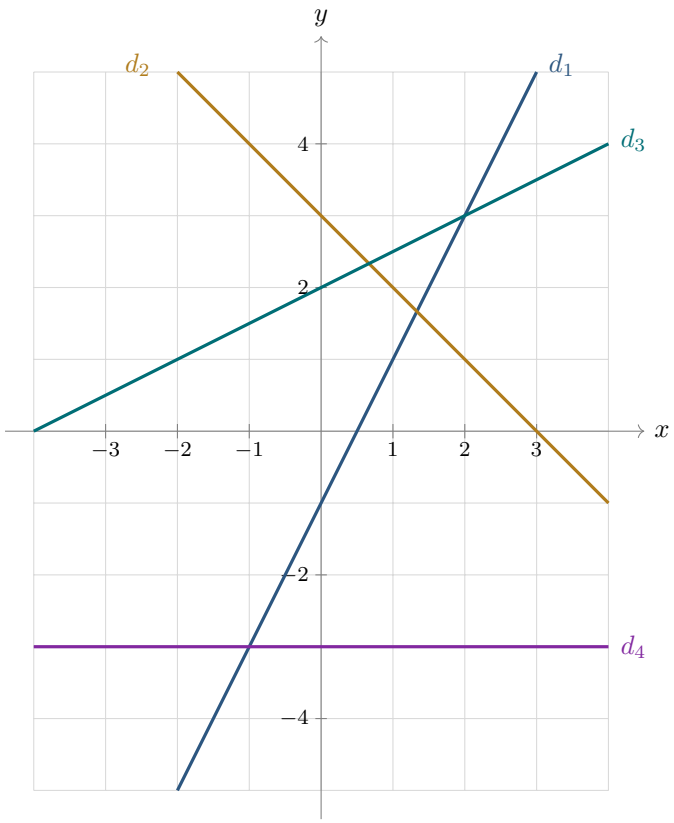
EXERCICE 12 ⋆⋆

1. Une droite passe par $A(2\,;5)$ et a pour coefficient directeur 3. Déterminer son équation réduite.
2. Une droite a pour ordonnée à l'origine -2 et passe par $B(4\,;6)$. Déterminer son équation réduite.
3. Déterminer le réel m pour que la droite d'équation $y = mx + 2$ passe par $C(-3\,;8)$.
4. Les droites d'équations $y = 3x - 1$ et $y = 3x + 5$ sont-elles sécantes ? Justifier sans calcul.

Lectures et tracés graphiques

EXERCICE 13 ⋆

Déterminer par lecture graphique l'équation réduite de chacune des quatre droites tracées ci-dessous. On expliquera la démarche pour la première : lecture de l'ordonnée à l'origine, puis du coefficient directeur.



EXERCICE 14 ⋆

Tracer, dans un même repère que l'on construira en prenant 1 cm pour une unité sur chaque axe, les droites d'équations :

$$d_1 : y = 3x - 2 \quad ; \quad d_2 : y = -\frac{x}{2} + 1 \quad ; \quad d_3 : y = 4 \quad ; \quad d_4 : y = -2x$$

Pour chaque droite, on précisera les deux points utilisés pour la construire. On pourra soit placer le point d'ordonnée à l'origine puis utiliser le coefficient directeur, soit choisir deux valeurs de x et calculer les ordonnées correspondantes.

Tracer enfin la droite d_5 d'équation $x = -3$. Pourquoi la méthode précédente ne s'applique-t-elle pas ?

EXERCICE 15 ⋆

Tracer, dans un même repère, les droites d'équations cartésiennes suivantes.

a) $2x + y - 4 = 0$

b) $x - 3y + 3 = 0$

c) $3x + 2y = 0$

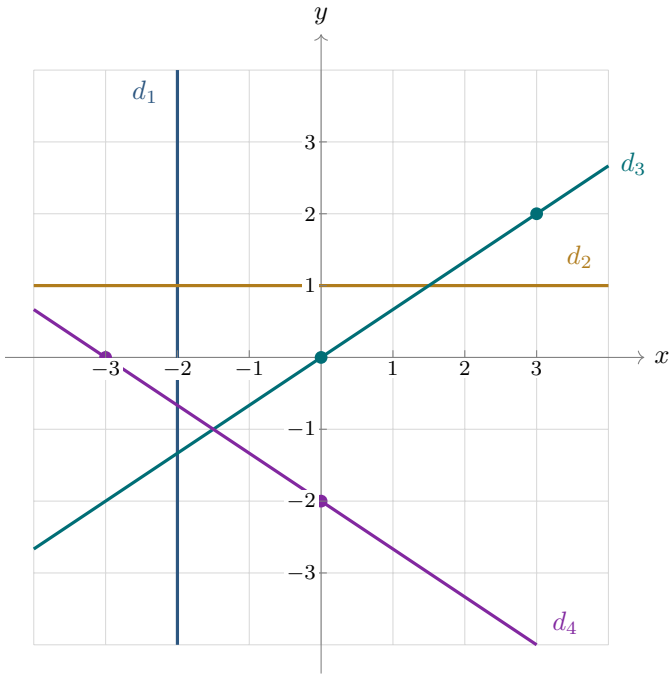
d) $2x - 5 = 0$

e) $-y + 1 = 0$

Conseil : pour a) et b), le plus rapide est de chercher les points d'intersection avec les deux axes, c'est-à-dire de calculer y pour $x = 0$, puis x pour $y = 0$. Cette méthode échoue pour c) : pourquoi ? Comment faire alors ?

EXERCICE 16 ⋆⋆

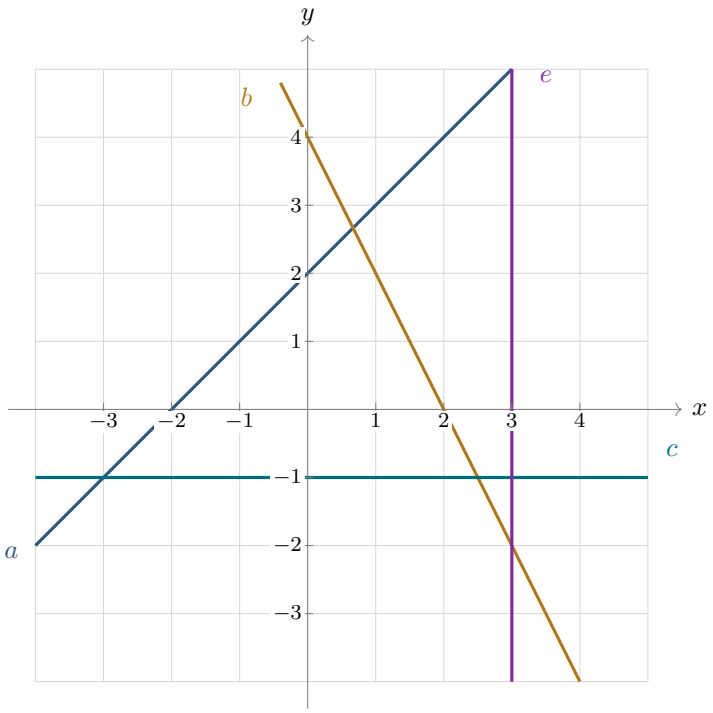
Déterminer par lecture graphique une équation cartésienne de chacune des quatre droites ci-dessous.



Les points marqués sont à coordonnées entières. Pour d_1 et d_2, on prendra garde : l'une de ces deux droites n'admet pas d'équation réduite.

EXERCICE 17 ⋆⋆

Sur le graphique ci-dessous sont tracées quatre droites. Six équations sont proposées : associer à chaque droite l'équation qui lui correspond, et identifier les deux équations qui ne correspondent à aucune droite tracée.



1. $2x + y - 4 = 0$
2. $y = x + 2$
3. $x - 3 = 0$
4. $y + 1 = 0$
5. $y = 2x + 4$
6. $x + y - 2 = 0$

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. Tracer dans un même repère les droites d'équations :

$$d_1 : y = x + 1 \quad ; \quad d_2 : y = -2x + 7 \quad ; \quad d_3 : y = 3x - 3$$

2. Que semble-t-on pouvoir dire de ces trois droites ?
3. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection de d_1 et d_2.
4. Vérifier que ce point appartient également à d_3. La conjecture est-elle démontrée ?
5. Tracer enfin la droite d_4 d'équation $y = x - 2$. Quelle est sa position par rapport à d_1 ? Justifier par le calcul.

Positions relatives et systèmes

EXERCICE 19 ⋆

Dans chaque cas, déterminer si les deux droites sont sécantes ou parallèles, en utilisant le critère $ab' - a'b$.

1. $d : 2x + 3y - 1 = 0$ et $d' : 4x + 6y + 5 = 0$
2. $d : x - 2y + 3 = 0$ et $d' : 3x + y - 2 = 0$
3. $d : -x + 4y = 0$ et $d' : 2x - 8y + 1 = 0$

4. $d : 5x + y - 2 = 0$ et $d' : x - 5y + 3 = 0$
5. $d : 3x - 6 = 0$ et $d' : 2y + 1 = 0$

EXERCICE 20 ⋆

Résoudre les systèmes suivants **par substitution**.

1. $\begin{cases} x + 2y - 7 = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 4x + 3y - 10 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$

EXERCICE 21 ⋆

Résoudre les systèmes suivants **par combinaison linéaire**.

1. $\begin{cases} 3x + 2y - 12 = 0 \\ 3x - 4y + 6 = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x + 5y - 1 = 0 \\ 2x - 3y - 9 = 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ 3x - 2y + 11 = 0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2x + 3y - 16 = 0 \\ 3x - 2y - 11 = 0 \end{cases}$

Pour le dernier, aucune inconnue ne disparaît directement : il faudra multiplier chaque équation par un facteur bien choisi avant de les additionner.

EXERCICE 22 ⋆⋆

Pour chacun des systèmes suivants, prévoir d'abord le nombre de solutions à l'aide du critère $ab' - a'b$, puis résoudre.

1. $\begin{cases} 2x + 4y - 6 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x - 2y - 5 = 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x + y - 2 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$

Interpréter géométriquement chacun des trois cas obtenus.

EXERCICE 23 ⋆⋆

Résoudre les systèmes suivants par la méthode de votre choix. Chacun admet un unique couple solution, que l'on donnera sous la forme la plus simple possible.

1. $\begin{cases} 4x - 3y - 5 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 5x + 4y - 7 = 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x + 2y - 5 = 0 \\ 4x - 5y + 24 = 0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ 5x - y - 3 = 0 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 3x - 5y + 2 = 0 \\ 4x + 7y - 6 = 0 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 6x + 4y - 5 = 0 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$

On vérifiera systématiquement le couple obtenu en le remplaçant dans les *deux* équations de départ.

EXERCICE 24 ⋆⋆

On considère les droites $d : 2x - y - 1 = 0$ et $d' : x + y - 5 = 0$.

1. Démontrer que d et d' sont sécantes.
2. Déterminer par le calcul les coordonnées de leur point d'intersection.
3. Tracer les deux droites dans un même repère et vérifier graphiquement le résultat précédent.

EXERCICE 25 ⋆⋆

Dans un cinéma, trois places adulte et deux places enfant coûtent 44 euros. Deux places adulte et quatre places enfant coûtent 48 euros.

1. En notant x le prix d'une place adulte et y celui d'une place enfant, traduire l'énoncé par un système de deux équations.
2. Résoudre ce système par la méthode de votre choix.
3. Vérifier que les prix trouvés conviennent bien.

Exercices de synthèse

EXERCICE 26 : QCM ⋆

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. La justifier.

Question	**Réponse A**	**Réponse B**	**Réponse C**
1. Un vecteur directeur de la droite $3x-5y+2=0$ est :	$\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
2. L'équation réduite de $2x+4y-8=0$ est :	$y=-\frac{x}{2}+2$	$y=2x-8$	$y=-2x+8$
3. Le point $A(2\,;-1)$ appartient à la droite d'équation :	$x+2y=0$	$x-2y-5=0$	$2x+y-5=0$
4. La droite d'équation $x=4$ est :	parallèle à l'axe des abscisses	parallèle à l'axe des ordonnées	passant par l'origine
5. Les droites $y=3x-1$ et $y=3x+4$ sont :	sécantes	parallèles	confondues
6. Les droites $2x-y+1=0$ et $4x-2y+2=0$ sont :	sécantes	strictement parallèles	confondues
7. Le coefficient directeur de la droite passant par $A(1\,;2)$ et $B(3\,;8)$ est :	3	6	$\frac{1}{3}$
8. La droite d'équation $y=mx+p$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées :	$(m\,;0)$	$(0\,;p)$	$(p\,;0)$
9. Le système $\begin{cases} x+y-3=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$ a pour solution :	$(1\,;2)$	$(2\,;1)$	$(-1\,;2)$
10. La droite d'équation $5y+10=0$ a pour équation réduite :	$y=-2$	$y=2$	$x=-2$

EXERCICE 27 : VRAI OU FAUX ⋆⋆

Chacune des affirmations suivantes est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse : par une démonstration si l'affirmation est vraie, par un contre-exemple sinon.

1. Toute droite du plan admet une équation cartésienne.
2. Toute droite du plan admet une équation réduite.
3. Une droite admet une infinité de vecteurs directeurs.
4. Une droite admet une unique équation cartésienne.
5. Si deux droites ont le même coefficient directeur, alors elles sont parallèles.
6. Si deux droites sont parallèles, alors elles ont le même coefficient directeur.
7. Le vecteur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $ax + by + c = 0$.
8. Un système de deux équations à deux inconnues admet toujours exactement une solution.
9. Les droites d'équations $2x + 3y - 1 = 0$ et $4x + 6y - 2 = 0$ sont confondues.
10. Les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes sont solutions du système formé par leurs deux équations.

EXERCICE 28 ⋆⋆

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-1\,;1)$, $B(5\,;3)$ et $C(1\,;-3)$.

1. Placer ces trois points et tracer le triangle ABC.
2. Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (AB), (AC) et (BC).
3. Le point $D(7\,;1)$ appartient-il à la droite (BC) ? Justifier.
4. Déterminer les coordonnées du milieu M du segment $[BC]$, puis une équation cartésienne de la médiane issue de A.
5. Tracer cette médiane sur la figure et vérifier la cohérence du résultat.

EXERCICE 29 ⋆⋆

Un opérateur téléphonique propose deux forfaits. Le forfait A coûte 12 euros par mois, auxquels s'ajoutent 0,20 euro par gigaoctet consommé. Le forfait B coûte 20 euros par mois, auxquels s'ajoutent 0,10 euro par gigaoctet.

1. On note x le nombre de gigaoctets consommés dans le mois. Exprimer en fonction de x le prix y_A payé avec le forfait A, puis le prix y_B payé avec le forfait B.
2. Reconnaître deux équations réduites de droites. Donner leur coefficient directeur et leur ordonnée à l'origine, puis interpréter chacun de ces deux nombres dans le contexte.
3. Tracer les deux droites dans un repère, en prenant 1 cm pour 10 gigaoctets en abscisse et 1 cm pour 4 euros en ordonnée, avec $0 \leqslant x \leqslant 120$.
4. Déterminer graphiquement à partir de combien de gigaoctets le forfait B devient plus avantageux.
5. Retrouver ce résultat par le calcul, en résolvant une équation.

EXERCICE 30 ⋆⋆⋆

Dans un repère, on considère les points $A(-2\,;-1)$, $B(2\,;1)$, $C(4\,;5)$ et $D(0\,;3)$.

1. Placer ces quatre points et tracer le quadrilatère $ABCD$.
2. Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
3. Déterminer une équation cartésienne des droites (AB) et (DC), puis vérifier à l'aide du critère $ab' - a'b$ qu'elles sont bien parallèles.
4. Déterminer de même une équation cartésienne des droites (AD) et (BC), et vérifier qu'elles sont parallèles.
5. Déterminer les coordonnées du milieu de $[AC]$, puis celles du milieu de $[BD]$. Que constate-t-on ? Quelle propriété du parallélogramme retrouve-t-on ?
6. Déterminer une équation cartésienne de la diagonale (AC), puis vérifier par le calcul que le point trouvé à la question 5 lui appartient.

EXERCICE 31 ⋆⋆⋆

On considère les droites $d_1 : 2x - y + 1 = 0$ et $d_2 : x + y - 4 = 0$, ainsi que la famille de droites $d_3 : 3x - 2y + m = 0$, où m est un réel.

1. Démontrer que d_1 et d_2 sont sécantes, puis déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I.
2. Déterminer le réel m pour que les trois droites soient concourantes, c'est-à-dire passent toutes les trois par le même point.
3. On prend maintenant $m = 0$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de d_1 et d_3, puis vérifier que ce point n'appartient pas à d_2.
4. Que peut-on en conclure sur la figure formée par les trois droites lorsque $m = 0$?
5. Tracer les trois droites pour $m = 0$ afin d'illustrer la conclusion précédente.