CORRIGÉ – CHAPITRE 9

INÉQUATIONS

Règles de base et premier degré

EXERCICE 1 ⋆

1. On remplace x par chacune des valeurs proposées.

$$\begin{aligned} x=-3: &\quad 3\times(-3)-7=-16\leqslant 2 &&\Longrightarrow \boxed{-3 \text{ est solution}}\\ x=0: &\quad -7\leqslant 2 &&\Longrightarrow \boxed{0 \text{ est solution}}\\ x=2: &\quad 6-7=-1\leqslant 2 &&\Longrightarrow \boxed{2 \text{ est solution}}\\ x=5: &\quad 15-7=8>2 &&\Longrightarrow \boxed{5 \text{ n'est pas solution}} \end{aligned}$$

2. On calcule le produit à chaque fois, en appliquant la règle des signes.

$$\begin{aligned} x=-5: &\quad (-6)\times(-2)=12>0 &&\Longrightarrow \boxed{-5 \text{ est solution}}\\ x=-2: &\quad (-3)\times 1=-3<0 &&\Longrightarrow \boxed{-2 \text{ n'est pas solution}}\\ x=0: &\quad (-1)\times 3=-3<0 &&\Longrightarrow \boxed{0 \text{ n'est pas solution}}\\ x=3: &\quad 2\times 6=12>0 &&\Longrightarrow \boxed{3 \text{ est solution}} \end{aligned}$$

3. $\boxed{\text{Une inéquation admet en général une } \textit{infinité} \text{ de solutions}}$

On ne peut donc pas les énumérer une à une : il faut les *décrire*. L'intervalle est précisément l'outil qui permet de désigner d'un seul coup une infinité de nombres, en n'en citant que les deux bornes.

EXERCICE 2 ⋆

1. On part de $x\leqslant 4$ et l'on applique les règles de la propriété 1.

	Réponse	**Opération effectuée**
a)	$x+3\leqslant 7$	on ajoute 3 : le sens ne change pas
b)	$x-5\leqslant -1$	on retranche 5 : le sens ne change pas
c)	$2x\leqslant 8$	on multiplie par $2>0$: le sens ne change pas
d)	$-3x\geqslant -12$	on multiplie par $-3<0$: **le sens change**
e)	$\dfrac{x}{2}\leqslant 2$	on divise par $2>0$: le sens ne change pas
f)	$-x\geqslant -4$	on multiplie par $-1<0$: **le sens change**

2. On part de $-2\leqslant x\leqslant 5$.

   a) On multiplie par 3, qui est positif : $\boxed{-6\leqslant 3x\leqslant 15}$

b) On multiplie par -1 : les deux inégalités changent de sens, et il faut donc *échanger* les bornes pour réécrire l'encadrement dans l'ordre croissant.

$$2 \geqslant -x \geqslant -5 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \boxed{-5 \leqslant -x \leqslant 2}$$

c) On ajoute 1 : $\boxed{-1 \leqslant x+1 \leqslant 6}$

d) On multiplie par 2 puis on retranche 3 :

$$-4 \leqslant 2x \leqslant 10 \qquad \text{puis} \qquad \boxed{-7 \leqslant 2x-3 \leqslant 7}$$

EXERCICE 3 ⋆

a)

$$2x+5<11 \iff 2x<6 \iff x<3 \qquad \boxed{S=]-\infty\,;3[}$$

b)

$$3x-4 \geqslant 8 \iff 3x \geqslant 12 \iff x \geqslant 4 \qquad \boxed{S=[4\,;+\infty[}$$

c)

$$-2x+7 \leqslant 1 \iff -2x \leqslant -6 \iff x \geqslant 3$$

la division par -2 changeant le sens. $\boxed{S=[3\,;+\infty[}$

d)

$$5-x>12 \iff -x>7 \iff x<-7 \qquad \boxed{S=]-\infty\,;-7[}$$

e)

$$4x+1 \leqslant 7x-8 \iff -3x \leqslant -9 \iff x \geqslant 3 \qquad \boxed{S=[3\,;+\infty[}$$

f)

$$-5x+2>3x-14 \iff -8x>-16 \iff x<2 \qquad \boxed{S=]-\infty\,;2[}$$

Les questions c), d), e) et f) exigent une division par un nombre négatif : c'est là que le sens de l'inégalité s'inverse.

EXERCICE 4 ⋆

a)

$$3(x-2) \leqslant 2x+1 \iff 3x-6 \leqslant 2x+1 \iff x \leqslant 7 \qquad \boxed{S=]-\infty\,;7]}$$

b)

$$2(3-x)>4(x+1) \iff 6-2x>4x+4 \iff -6x>-2 \iff x<\frac{1}{3}$$

$$\boxed{S=\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right[}$$

c)

$$\frac{x}{2}+1 \leqslant 3 \iff \frac{x}{2} \leqslant 2 \iff x \leqslant 4 \qquad \boxed{S=]-\infty\,;4]}$$

d) On multiplie les deux membres par 3, qui est positif :

$$\frac{2x-1}{3}>1 \iff 2x-1>3 \iff 2x>4 \iff x>2 \qquad \boxed{S=]2\,;+\infty[}$$

e) On réduit au même dénominateur 12 :

$$\frac{4x}{12} - \frac{3x}{12} \leqslant 1 \iff \frac{x}{12} \leqslant 1 \iff x \leqslant 12$$

$$\boxed{S =]-\infty\,;12]}$$

f)

$$-(x+3) \geqslant 2(1-x) \iff -x-3 \geqslant 2-2x \iff x \geqslant 5 \qquad \boxed{S = [5\,;+\infty[}$$

EXERCICE 5 ⋆

a)

$$5x-3 < 2x+4 \iff 3x < 7 \iff x < \frac{7}{3} \qquad \boxed{S = \left]-\infty\,;\frac{7}{3}\right[}$$

b)

$$4x+1 \geqslant 6x-4 \iff -2x \geqslant -5 \iff x \leqslant \frac{5}{2}$$

la division par -2 changeant le sens. $\boxed{S = \left]-\infty\,;\frac{5}{2}\right]}$

c)

$$-3x+2 \leqslant 4x-3 \iff -7x \leqslant -5 \iff x \geqslant \frac{5}{7} \qquad \boxed{S = \left[\frac{5}{7}\,;+\infty\right[}$$

d)

$$7-2x > 5x+1 \iff -7x > -6 \iff x < \frac{6}{7} \qquad \boxed{S = \left]-\infty\,;\frac{6}{7}\right[}$$

e)

$$3(x-1) < 5x+2 \iff 3x-3 < 5x+2 \iff -2x < 5 \iff x > -\frac{5}{2}$$

$$\boxed{S = \left]-\frac{5}{2}\,;+\infty\right[}$$

f) On multiplie les deux membres par 12, qui est positif :

$$\begin{aligned}\frac{3x+1}{4} > \frac{x-2}{3} &\iff 3(3x+1) > 4(x-2)\\ &\iff 9x+3 > 4x-8\\ &\iff 5x > -11 \iff x > -\frac{11}{5}\end{aligned}$$

$$\boxed{S = \left]-\frac{11}{5}\,;+\infty\right[}$$

Une borne fractionnaire n'a rien d'inquiétant : on la laisse sous forme de fraction irréductible, ce qui est toujours plus précis qu'une valeur décimale approchée.

EXERCICE 6 ⋆⋆

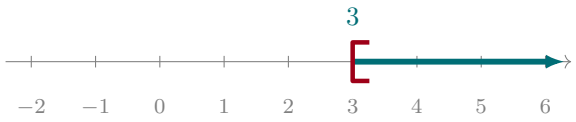
Le sens change si et seulement si l'on multiplie ou divise par un nombre **strictement négatif**. Peu importe qu'un nombre négatif figure ailleurs dans l'inéquation.

	Inéquation	**Le sens change ?**	**Solutions**
a)	$-2x < 8$	**oui**, on divise par -2	$]-4\,;+\infty[$
b)	$x - 5 < -8$	non, on ajoute seulement 5	$]-\infty\,;-3[$
c)	$3x > -9$	non, on divise par $3 > 0$	$]-3\,;+\infty[$
d)	$-\frac{x}{4} \geqslant 2$	**oui**, on multiplie par -4	$]-\infty\,;-8]$
e)	$-5 < 2x$	non, on divise par $2 > 0$	$\left]-\frac{5}{2}\,;+\infty\right[$
f)	$7 - 3x \leqslant 1$	**oui**, on divise par -3	$[2\,;+\infty[$

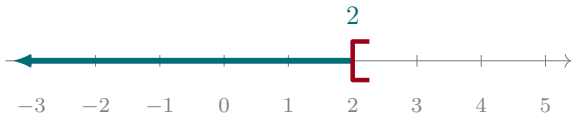
Les cas b), c) et e) contiennent pourtant tous un nombre négatif : celui-ci se trouve simplement du mauvais côté pour avoir la moindre influence.

EXERCICE 7 ⋆⋆

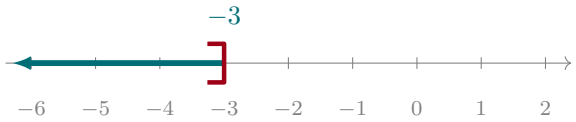
1. a) $2x - 6 \geqslant 0 \iff x \geqslant 3$: $\boxed{S = [3\,;+\infty[}$



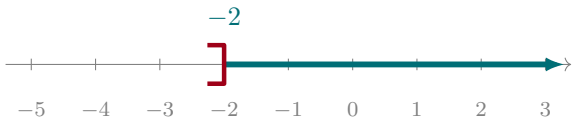
b) $-x + 2 > 0 \iff -x > -2 \iff x < 2$: $\boxed{S =]-\infty\,;2[}$



c) $3x + 9 \leqslant 0 \iff x \leqslant -3$: $\boxed{S =]-\infty\,;-3]}$



d) $-4x - 8 < 0 \iff -4x < 8 \iff x > -2$: $\boxed{S =]-2\,;+\infty[}$



On remarquera le codage des bornes : le crochet est tourné *vers* l'intervalle lorsque la borne est incluse, et il lui *tourne le dos* lorsqu'elle est exclue. C'est exactement la convention d'écriture des intervalles.

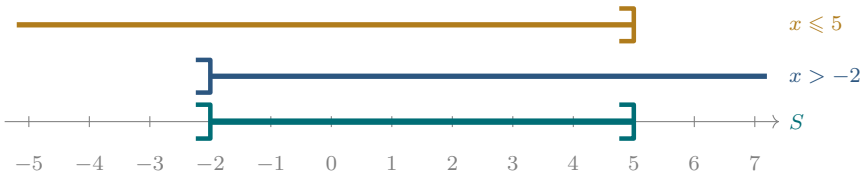
2. On résout séparément les deux inéquations :

$$2x + 1 > -3 \iff 2x > -4 \iff x > -2$$

$$x - 4 \leqslant 1 \iff x \leqslant 5$$

Les deux conditions doivent être vérifiées *simultanément* : on prend donc l'intersection des deux ensembles.

$$\boxed{S =]-2\,;5]}$$



EXERCICE 8 ⋆⋆

1. (a)

$$\boxed{\text{Formule } A : \ 15 + 0{,}5\,n} \quad ; \quad \boxed{\text{Formule } B : \ 30}$$

   (b) On résout $30 < 15 + 0{,}5\,n$:

$$30 < 15 + 0{,}5\,n \iff 15 < 0{,}5\,n \iff n > 30$$

   Le nombre de séances étant un entier :

$$\boxed{\text{La formule } B \text{ devient plus avantageuse à partir de 31 séances}}$$

   Pour exactement 30 séances, les deux formules coûtent 30 euros : elles sont équivalentes.

2. En notant n la note du troisième devoir :

$$\frac{12 + 9 + n}{3} \geqslant 12 \iff 21 + n \geqslant 36 \iff n \geqslant 15$$

$$\boxed{\text{Marius doit obtenir au moins 15}}$$

EXERCICE 9 ⋆

La racine s'obtient en résolvant $mx+p=0$, soit $x_0=-\dfrac{p}{m}$. On retient que f **est du signe de** m **après la racine**.

	$f(x)$	**Racine**	**Signe**
a)	$2x-6$	3	$m=2>0$: négatif avant 3, positif après
b)	$-3x+12$	4	$m=-3<0$: positif avant 4, négatif après
c)	$x+5$	-5	$m=1>0$: négatif avant -5, positif après
d)	$-x-2$	-2	$m=-1<0$: positif avant -2, négatif après
e)	$4x$	0	$m=4>0$: négatif avant 0, positif après
f)	$-5x+1$	$\frac{1}{5}$	$m=-5<0$: positif avant $\frac{1}{5}$, négatif après

EXERCICE 10 ⋆

1. $3x-9$ s'annule en 3, avec $m=3>0$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$3x-9$		$-$	0	$+$	

$$\boxed{f(x)\geqslant 0 \iff S=[3\,;+\infty[}$$

2. $-2x+5$ s'annule en $\dfrac{5}{2}$, avec $m=-2<0$.

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$-2x+5$		$+$	0	$-$	

$$\boxed{g(x)<0 \iff S=\left]\frac{5}{2}\,;+\infty\right[}$$

3. $5x+15$ s'annule en -3, avec $m=5>0$.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$5x+15$		$-$	0	$+$	

$$\boxed{h(x) \leqslant 0 \iff S =]-\infty\,;-3]}$$

4. $-x+7$ s'annule en 7, avec $m = -1 < 0$.

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$-x+7$		$+$	0	$-$	

$$\boxed{k(x) > 0 \iff S =]-\infty\,;7[}$$

EXERCICE 11 ⋆⋆

1. On lit l'abscisse du point où chaque droite coupe l'axe des abscisses :

$$\boxed{\text{racine de } f : 2} \quad ; \quad \boxed{\text{racine de } g : -1}$$

2. La droite $\mathcal{C}_f$ monte, donc f est négative avant sa racine et positive après. La droite $\mathcal{C}_g$ descend, donc g est positive avant, négative après.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

3.

$$\boxed{f(x) \geqslant 0 \iff S = [2\,;+\infty[} \quad ; \quad \boxed{g(x) < 0 \iff S =]-1\,;+\infty[}$$

4. Le point marqué a pour coordonnées $(0\,;-2)$:

$$\boxed{\text{C'est le point d'intersection des deux droites}}$$

Son abscisse est la valeur de x pour laquelle $f(x) = g(x)$.

5. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ à droite du point d'intersection :

$$\boxed{f(x) \geqslant g(x) \iff S = [0\,;+\infty[}$$

6. La droite $\mathcal{C}_f$ passe par $(2\,;0)$ et $(0\,;-2)$: son ordonnée à l'origine vaut -2 et son coefficient directeur 1. La droite $\mathcal{C}_g$ passe par $(-1\,;0)$ et $(0\,;-2)$: son ordonnée à l'origine vaut -2 et son coefficient directeur -2.

$$\boxed{f(x) = x - 2} \quad ; \quad \boxed{g(x) = -2x - 2}$$

On résout alors :

$$f(x) - g(x) = (x-2) - (-2x-2) = x - 2 + 2x + 2 = 3x$$

$$f(x) \geqslant g(x) \iff 3x \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$$

Le calcul confirme la lecture graphique.

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. Une fonction affine est du signe de son coefficient directeur *après* sa racine. Comme f est positive après 3 :

   $$\boxed{\text{Le coefficient directeur } m \text{ est strictement positif}}$$

   Par exemple $f(x) = x - 3$, ou encore $f(x) = 2x - 6$.

2. On cherche $g(x) = mx + p$. La condition $g(0) = 4$ donne $p = 4$, puis $g(-2) = 0$ donne :

   $$-2m + 4 = 0 \iff m = 2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{g(x) = 2x + 4}$$

3. De même $h(x) = mx + p$ avec $h(0) = -10$, donc $p = -10$. La racine étant 5 :

   $$5m - 10 = 0 \iff m = 2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{h(x) = 2x - 10}$$

   On vérifie que $m = 2 > 0$, ce qui est bien cohérent avec « négative avant, positive après ».

4. Oui, mais uniquement si le coefficient directeur est nul :

   $$\boxed{\text{Les fonctions constantes positives, par exemple } f(x) = 3}$$

   Si $m \neq 0$, la fonction admet une racine et change de signe en ce point : elle prend donc nécessairement des valeurs négatives.

Inéquations produit

EXERCICE 13 ⋆

a) Les facteurs s'annulent en 1 et -3, tous deux de coefficient positif.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S =]-\infty\,;-3] \cup [1\,;+\infty[}$$

b) Racines 2 et -1, coefficients $2 > 0$ et $1 > 0$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S =]-1\,;2[}$$

c) Racines 3 et -2. Attention : le facteur $-x+3$ a un coefficient *négatif*, il est donc positif avant sa racine.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$-x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
Produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S =]-\infty\,;-2] \cup [3\,;+\infty[}$$

d) Racines -2 et $\dfrac{1}{2}$, avec $3 > 0$ et $-2 < 0$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
Produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S = \left]-2\,;\frac{1}{2}\right[}$$

e) Racines 0 et 5.

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S =]-\infty\,;0] \cup [5\,;+\infty[}$$

f) Racines $\dfrac{1}{2}$ et -3.

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x+9$		$-$	0	$+$		$+$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S = \left[-3\,;\frac{1}{2}\right]}$$

EXERCICE 14 ⋆⋆

a) Racines $\dfrac{2}{3}$ et $-\dfrac{5}{2}$, coefficients $3 > 0$ et $2 > 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S = \left]-\infty\,;-\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{2}{3}\,;+\infty\right[}$$

b) Racines $-\dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{1}{5}$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$4x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$5x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S = \left]-\frac{3}{4}\,;\frac{1}{5}\right[}$$

c) Racines $\dfrac{7}{2}$ et $-\dfrac{1}{3}$, avec $2 > 0$ et $-3 < 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$2x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$-3x-1$		$+$	0	$-$		$-$	
Produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S = \left]-\infty\,;-\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{7}{2}\,;+\infty\right[}$$

d) Racines 0 et $-\dfrac{5}{6}$.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{6}$		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$6x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S = \left]-\infty\,;-\frac{5}{6}\right[\cup \,]0\,;+\infty[}$$

e) On ramène tout à gauche, puis on factorise par $2x+1$:

$$\begin{aligned}(2x+1)(x-3) - (2x+1)(2x-1) &\geqslant 0\\ (2x+1)\big[(x-3) - (2x-1)\big] &\geqslant 0\\ (2x+1)(-x-2) &\geqslant 0\end{aligned}$$

Racines $-\dfrac{1}{2}$ et -2, avec $2 > 0$ et $-1 < 0$.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x-2$		$+$	0	$-$		$-$	
Produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S = \left[-2\,;-\frac{1}{2}\right]}$$

f) On ramène à 0 et l'on reconnaît une différence de deux carrés :

$$9x^2 < 4 \iff 9x^2 - 4 < 0 \iff (3x-2)(3x+2) < 0$$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3x-2$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$3x+2$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S = \left]-\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right[}$$

EXERCICE 15 ⋆⋆

1. $x^2 - 3x = x(x-3)$, de racines 0 et 3.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$x-3$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$x(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S =]-\infty\,;0] \cup [3\,;+\infty[}$$

2. $2x^2 + 6x = 2x(x+3)$, de racines 0 et -3.

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$2x$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$2x(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S =]-3\,;0[}$$

3. On factorise par $x-2$:

$$(x-2)[(x+1) - (2x+5)] = (x-2)(-x-4)$$

Racines 2 et -4, avec $1 > 0$ et $-1 < 0$.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x-4$		$+$	0	$-$		$-$	
Produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S =]-\infty\,;-4] \cup [2\,;+\infty[}$$

4. Le second terme est $(3x-1)\times 1$, ce qui fait apparaître le facteur commun :

$$(3x-1)(x+2)+(3x-1) = (3x-1)\big[(x+2)+1\big] = (3x-1)(x+3)$$

Racines $\dfrac{1}{3}$ et -3.

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S =]-\infty\,;-3[\cup \left]\frac{1}{3}\,;+\infty\right[}$$

EXERCICE 16 ⋆⋆

Dans chaque cas on utilise l'identité $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$, puis un tableau de signes dont la structure est toujours la même : les deux facteurs sont de coefficients positifs, donc le produit est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles.

a) $x^2-9=(x-3)(x+3)$, de racines 3 et -3.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-9		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S = [-3\,;3]}$$

b) $x^2-16=(x-4)(x+4)$, de racines 4 et -4 : $\boxed{S =]-\infty\,;-4[\cup]4\,;+\infty[}$

c) $4x^2 - 25 = (2x-5)(2x+5)$, de racines $\dfrac{5}{2}$ et $-\dfrac{5}{2}$:

$$\boxed{S = \left]-\infty\,;-\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}\,;+\infty\right[}$$

d) En écrivant $5 = \left(\sqrt{5}\right)^2$, on obtient $x^2 - 5 = \left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)$:

$$\boxed{S = \left]-\sqrt{5}\,;\sqrt{5}\right[}$$

e) $(x+1)^2 - 4 = (x+1-2)(x+1+2) = (x-1)(x+3)$, de racines 1 et -3 : $\boxed{S = [-3\,;1]}$

f) $9 - x^2 = (3-x)(3+x)$, de racines 3 et -3. Attention, le facteur $3-x$ a un coefficient négatif.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$3+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$9-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S = [-3\,;3]}$$

On retrouve le même ensemble qu'en a), ce qui est logique : $9 - x^2 \geqslant 0$ équivaut à $x^2 - 9 \leqslant 0$.

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. On ramène tout à gauche puis on factorise :

$$x^2 \geqslant 4x \iff x^2 - 4x \geqslant 0 \iff x(x-4) \geqslant 0$$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S =]-\infty\,;0] \cup [4\,;+\infty[}$$

Il ne fallait surtout pas diviser par x : ce nombre peut être nul, et surtout son signe est inconnu, ce qui rendrait le sens de l'inégalité imprévisible.

2.

$$(x+2)^2 < 9 \iff (x+2)^2 - 9 < 0 \iff (x+2-3)(x+2+3) < 0 \iff (x-1)(x+5) < 0$$

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S =]-5\,;1[}$$

3. On ramène à 0 et l'on factorise par $x+1$:

$$x(x+1) > 2(x+1) \iff x(x+1) - 2(x+1) > 0 \iff (x+1)(x-2) > 0$$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S =]-\infty\,;-1[\cup]2\,;+\infty[}$$

Ici encore, diviser les deux membres par $x+1$ aurait été une faute : cette expression change de signe en -1.

4. On factorise par $2x-3$:

$$(2x-3)\big[(x+1) - (3-x)\big] \geqslant 0 \iff (2x-3)(2x-2) \geqslant 0$$

Racines $\dfrac{3}{2}$ et 1.

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S =]-\infty\,;1] \cup \left[\frac{3}{2}\,;+\infty\right[}$$

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. Trois facteurs, de racines 1, -2 et 4, tous de coefficient positif. Le tableau comporte donc quatre colonnes de signes.

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Produit		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S = [-2\,;1] \cup [4\,;+\infty[}$$

2. Racines 0, 3 et 1, que l'on range dans l'ordre croissant : $0 < 1 < 3$. Le facteur $-x+1$ a un coefficient négatif.

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x+1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S =]0\,;1[\cup]3\,;+\infty[}$$

Inéquations quotient

EXERCICE 19 ⋆

Un quotient est du signe du produit de son numérateur par son dénominateur. On place une **double barre** sous la valeur interdite, où le quotient n'existe pas.

a) Valeur interdite : -3. Racine du numérateur : 2.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x-2}{x+3}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S =]-\infty\,;-3[\cup [2\,;+\infty[}$$

La borne -3 est *exclue* car c'est la valeur interdite, alors que 2 est incluse puisque le quotient y vaut 0.

b) Valeur interdite : 4. Racine : -1.

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+1}{x-4}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$$\boxed{S =]-1\,;4[}$$

c) Valeur interdite : -1. Racine : 3.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$2x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{2x-6}{x+1}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S =]-1\,;3]}$$

d) Valeur interdite : 2. Racine : 5. Le numérateur a un coefficient négatif.

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$-x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-x+5}{x-2}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S =]2\,;5[}$$

e) Valeur interdite : 2. Racine : -3. Le dénominateur a un coefficient négatif.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$3x+9$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{3x+9}{-2x+4}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

$$\boxed{S = [-3\,;2[}$$

f) Valeur interdite : 1. Racine : 0.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x}{x-1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$$\boxed{S = [0\,;1[}$$

EXERCICE 20 ⋆⋆

a) Valeur interdite : $-\dfrac{5}{2}$. Racine : $\dfrac{1}{3}$.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{3x-1}{2x+5}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S = \left]-\frac{5}{2}\,;\frac{1}{3}\right]}$$

b) Valeur interdite : 3. Racine : $-\dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$4x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{4x+2}{3-x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

$$\boxed{S = \left]-\frac{1}{2}\,;3\right[}$$

c) On ramène à 0 en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{2x-1}{x+4} - 2 = \frac{2x-1-2(x+4)}{x+4} = \frac{2x-1-2x-8}{x+4} = \frac{-9}{x+4}$$

Le numérateur -9 est une constante strictement négative : le quotient est donc du signe opposé à celui de $x+4$.

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
-9		$-$		$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{-9}{x+4}$		$+$	‖	$-$	

$$\boxed{S =]-\infty\,;-4[}$$

d)

$$\frac{x+3}{2x-1} - 1 = \frac{x+3-(2x-1)}{2x-1} = \frac{-x+4}{2x-1}$$

Valeur interdite : $\dfrac{1}{2}$. Racine : 4.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
$-x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-x+4}{2x-1}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S = \left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[\cup\,]4\,;+\infty[}$$

e)

$$\frac{3}{x} - \frac{1}{2} = \frac{6-x}{2x}$$

Valeur interdite : 0. Racine : 6.

x	$-\infty$		0		6		$+\infty$
$6-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{6-x}{2x}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S =]0\,;6]}$$

f)

$$\frac{5x+2}{x-1} - 3 = \frac{5x+2-3(x-1)}{x-1} = \frac{2x+5}{x-1}$$

Valeur interdite : 1. Racine : $-\dfrac{5}{2}$.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		1		$+\infty$
$2x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{2x+5}{x-1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$$\boxed{S = \left[-\frac{5}{2}\,;1\right[}$$

EXERCICE 21 ⋆⋆

1.

$$\frac{x+1}{x-2} - 1 = \frac{x+1-(x-2)}{x-2} = \frac{3}{x-2}$$

Le numérateur 3 étant strictement positif, le quotient est du signe de $x-2$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
3		$+$		$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{3}{x-2}$		$-$	‖	$+$	

$$\boxed{S =]2\,;+\infty[}$$

2.

$$\frac{2x}{x+3} - 1 = \frac{2x-(x+3)}{x+3} = \frac{x-3}{x+3}$$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x-3}{x+3}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S =]-3\,;3[}$$

3.

$$\frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2x}{x}$$

Valeur interdite : 0. Racine : $\dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{1-2x}{x}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S =]-\infty\,;0[\cup \left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[}$$

4.

$$\frac{x-1}{x+2} - 2 = \frac{x-1-2(x+2)}{x+2} = \frac{-x-5}{x+2}$$

Valeur interdite : -2. Racine : -5.

x	$-\infty$		-5		-2		$+\infty$
$-x-5$		$+$	0	$-$		$-$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{-x-5}{x+2}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

$$\boxed{S =]-\infty\,;-5] \cup]-2\,;+\infty[}$$

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. $$\frac{1}{-1} = -1 \qquad \text{et} \qquad -1 \leqslant 2$$

   $$\boxed{x = -1 \text{ est bien solution de l'inéquation de départ}}$$

2. L'ensemble trouvé par Julie est $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, or $-1 < \frac{1}{2}$:

   $$\boxed{-1 \text{ n'appartient pas à l'ensemble trouvé par Julie}}$$

   Sa méthode a donc *perdu* des solutions : elle est nécessairement fausse.

3. Julie a multiplié les deux membres par x, sans connaître le signe de ce nombre. Or la propriété 1 du cours distingue deux cas :
   - si $x > 0$, le sens de l'inégalité est conservé et l'on obtient bien $1 \leqslant 2x$;
   - si $x < 0$, **le sens change** et l'on obtient $1 \geqslant 2x$.

   La règle oubliée est le changement de sens lors d'une multiplication par un nombre négatif

   Comme x est l'inconnue, son signe n'est pas connu : on ne peut pas trancher entre les deux cas.

4. La résolution correcte, menée à la question 3 de l'exercice 21, donne :

   $$S =]-\infty\,;0[\cup \left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$$

   Julie n'a trouvé que la seconde partie, celle qui correspond au cas $x > 0$. Il lui manque tout l'intervalle $]-\infty\,;0[$, qui correspond au cas $x < 0$.

5. « Ne multiplie jamais une inéquation par une expression contenant x. Son signe dépend de x, donc tu ne sais pas si le sens de l'inégalité doit changer. Ramène plutôt tout d'un même côté, réduis au même dénominateur, puis fais un tableau de signes : c'est la seule méthode qui traite tous les cas d'un coup. »

EXERCICE 23 ⋆⋆

1. Le numérateur se factorise : $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. Valeur interdite : 1. Racines du numérateur : 2 et -2. Le tableau comporte donc trois valeurs remarquables, rangées dans l'ordre $-2 < 1 < 2$.

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x^2-4}{x-1}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S = [-2\,;1[\cup [2\,;+\infty[}$$

2. Deux valeurs interdites cette fois : -1 et 5. Racine du numérateur : 3.

x	$-\infty$		-1		3		5		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x-3}{(x+1)(x-5)}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

$$\boxed{S =]-\infty\,;-1[\cup [3\,;5[}$$

Les deux bornes -1 et 5 sont exclues comme valeurs interdites, tandis que 3 est incluse.

Position relative de deux courbes

EXERCICE 24 ⋆

1. On lit les coordonnées des deux points marqués :

$$\boxed{(-1\,;1) \qquad \text{et} \qquad (2\,;4)}$$

2. Entre ces deux abscisses, la parabole passe sous la droite :

$$\boxed{\mathcal{P} \text{ est en dessous de } d \text{ sur }]-1\,;2[}$$

3. Dire que $x^2 \leqslant x+2$, c'est dire que la parabole est en dessous de la droite, ou la touche :

$$\boxed{S = [-1\,;2]}$$

4. On étudie le signe de la différence :

$$x^2 - (x+2) = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

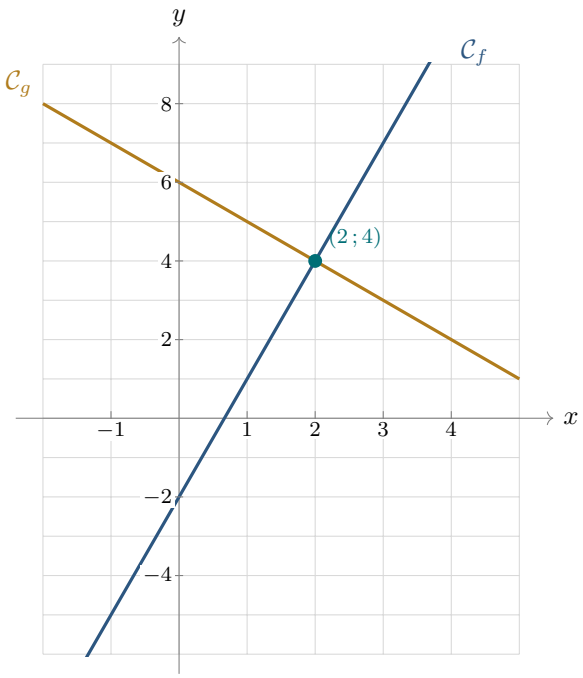
x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

La différence est négative ou nulle exactement sur $[-1\,;2]$.

$$\boxed{\text{Le calcul confirme la lecture graphique}}$$

EXERCICE 25 ⋆⋆

1. Les deux droites passent respectivement par $(0\,;-2)$ et $(0\,;6)$.



2. $$f(x)-g(x)=(3x-2)-(-x+6)=3x-2+x-6=\boxed{4x-8}$$

3. C'est une fonction affine de racine 2, de coefficient $4>0$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	

4. $$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est en dessous de } \mathcal{C}_g \text{ sur }]-\infty\,;2[\text{ et au-dessus sur }]2\,;+\infty[}$$

   La figure le confirme : les deux droites se croisent au point d'abscisse 2.

5. Les courbes se coupent là où la différence s'annule, c'est-à-dire en $x=2$. On calcule alors $f(2)=3\times 2-2=4$:

$$\boxed{\text{Le point d'intersection a pour coordonnées } (2\,;4)}$$

EXERCICE 26 ⋆⋆

1. On développe le membre de droite :

$$(x-1)(x-3)=x^2-3x-x+3=x^2-4x+3$$

   Or $f(x)-g(x)=x^2-(4x-3)=x^2-4x+3$: $\boxed{f(x)-g(x)=(x-1)(x-3)}$

2. Les deux facteurs sont de coefficient positif, de racines 1 et 3.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3.

La parabole est au-dessus de la droite sur $]-\infty\,;1[$ et sur $]3\,;+\infty[$
Elle est en dessous sur $]1\,;3[$

4. Les deux courbes se coupent aux abscisses où la différence s'annule, soit 1 et 3. On calcule les ordonnées avec $f(x)=x^2$:

Les points d'intersection sont $(1\,;1)$ et $(3\,;9)$

EXERCICE 27 ⋆⋆

1. Pour $x>0$, on réduit au même dénominateur :

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{x}-x=\frac{1}{x}-\frac{x^2}{x}=\frac{1-x^2}{x}$$

Or $1-x^2=(1-x)(1+x)$ par identité remarquable : $\boxed{f(x)-g(x)=\dfrac{(1-x)(1+x)}{x}}$

2. Sur $]0\,;+\infty[$, on a $x>0$ par hypothèse, et donc $1+x>1>0$:

Les facteurs x et $1+x$ sont strictement positifs

3. Le quotient d'un produit de deux nombres positifs est positif : le signe de $f(x)-g(x)$ ne dépend donc que du facteur $1-x$, qui s'annule en 1 et dont le coefficient est négatif.

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	

L'hyperbole est au-dessus de la droite sur $]0\,;1[$
Elle est en dessous sur $]1\,;+\infty[$

Les deux courbes se coupent au point $(1\,;1)$.

4. Sur $]-\infty\,;0[$, le facteur x est négatif, et $1+x$ change de signe en -1. Le facteur $1-x$, lui, reste positif puisque $x<0$.

x	$-\infty$		-1		0
$1-x$		$+$		$+$	
$1+x$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	

Sur $]-\infty\,;-1[$, l'hyperbole est au-dessus de la droite
Sur $]-1\,;0[$, elle est en dessous

Le résultat n'est donc pas le même : les deux courbes se recoupent en $(-1\,;-1)$

Exercices de synthèse

EXERCICE 28 : QCM ⋆

Question	Réponse	Justification
1	**A**	On divise par -3, donc le sens change : $x < -3$.
2	**B**	On multiplie par -1, donc le sens change : $-x \geqslant -2$.
3	**B**	$4x - 12 = 0$ donne $x = 3$.
4	**A**	Le coefficient -2 est négatif : la fonction est positive *avant* sa racine 4.
5	**A**	Les racines sont 1 et -5, et le produit de deux facteurs croissants est négatif *entre* elles.
6	**C**	Le dénominateur $3x - 6$ s'annule pour $x = 2$. La réponse A est la racine du numérateur, qui n'est pas interdite.
7	**A**	$x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$, négatif entre les racines.
8	**A**	Un quotient est positif si et seulement si numérateur et dénominateur ont le même signe : tous deux positifs, ou tous deux négatifs.
9	**B**	C'est la propriété 5 du cours : être au-dessus signifie avoir une ordonnée plus grande, donc une différence positive.
10	**B**	Le zéro signale une racine ; la double barre signale que l'expression n'existe pas.

EXERCICE 29 : VRAI OU FAUX ⋆⋆

1. **Fausse**. Contre-exemple : $x^2 < 0$ n'admet aucune solution, et $(x-1)^2 \leqslant 0$ n'en admet qu'une seule, $x = 1$.
2. **Fausse**. Multiplier par -1 change le sens : si $a < b$, alors $-a > -b$. Contre-exemple avec $a = 2$ et $b = 5$: on a bien $2 < 5$, mais $-2 > -5$.
3. **Vraie**. C'est la première règle de la propriété 1 : ajouter un même nombre aux deux membres ne change pas le sens.
4. **Vraie**. C'est la deuxième règle : 3 étant strictement positif, le sens est conservé.
5. **Fausse**. Une fonction affine constante, comme $f(x) = 3$, ne change jamais de signe. Ce n'est que lorsque $m \neq 0$ que la fonction change de signe une fois exactement.
6. **Vraie**. C'est la règle des signes : $(-a) \times (-b) = ab$, qui est positif si a et b le sont.
7. **Fausse**. Il faut aussi que le quotient existe, donc que $B \neq 0$. L'implication est correcte lorsque le quotient est défini, mais l'énoncé ne le précise pas : pour $A = B = 0$, le quotient n'a aucun sens.
8. **Fausse**. La valeur -1 annule le dénominateur : c'est une valeur interdite, elle ne peut donc jamais appartenir à l'ensemble des solutions.
9. **Vraie**. Un carré est toujours positif ou nul, donc tout réel convient : $S = \mathbb{R}$.
10. **Fausse**. C'est exactement l'erreur analysée à l'exercice 22 : le signe de x étant inconnu, on ne sait pas si le sens de l'inégalité doit changer.

EXERCICE 30 ⋆⋆

1. En notant n le nombre de séances :

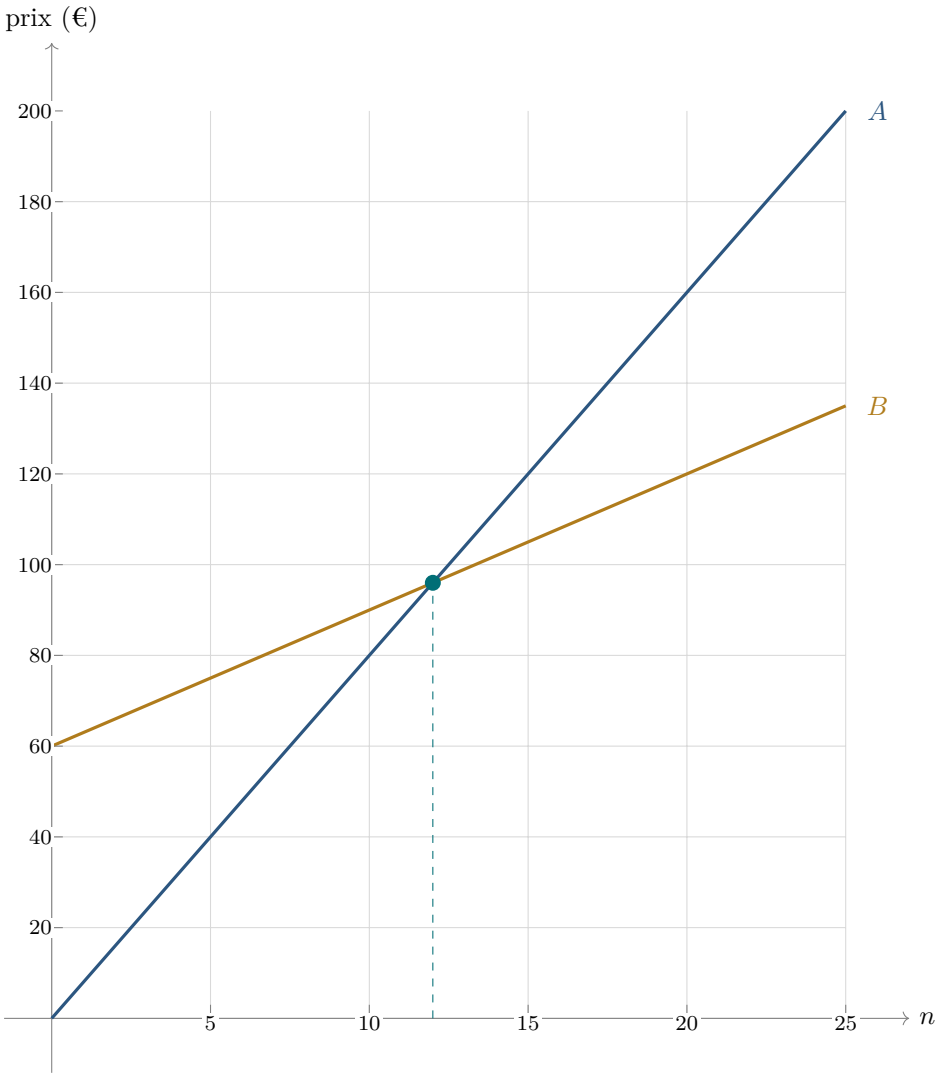
$$\boxed{\text{Formule } A : \ 8n} \quad ; \quad \boxed{\text{Formule } B : \ 60 + 3n}$$

2. $$60 + 3n < 8n \iff 60 < 5n \iff n > 12$$

3. Le nombre de séances étant un entier :

$$\boxed{\text{La formule } B \text{ est plus avantageuse à partir de 13 séances}}$$

4.



La droite ocre passe en dessous de la droite bleu ardoise à partir de $n = 12$: le graphique confirme le calcul.

5. Pour $n = 12$, les deux formules coûtent exactement le même prix :

$$8 \times 12 = 96 \qquad \text{et} \qquad 60 + 3 \times 12 = 96$$

Pour 12 séances, les deux formules coûtent 96 euros

C'est le point d'intersection des deux droites : l'inégalité y est une égalité, ce qui explique pourquoi l'avantage ne commence qu'à la séance suivante.

EXERCICE 31 ⋆⋆

1. (a)

$$\mathcal{A}_{\text{triangle}} = \frac{x \times 6}{2} = 3x \quad ; \quad \mathcal{A}_{\text{rectangle}} = 2(x+4) = 2x+8$$

(b)

$$3x > 2x + 8 \iff x > 8$$

L'aire du triangle dépasse celle du rectangle dès que $x > 8$

2. (a)

$$\mathcal{A}_{\text{carré}} = x^2$$

$$\mathcal{A}_{\text{rectangle}} = (x-2)(x+3) = x^2 + 3x - 2x - 6 = x^2 + x - 6$$

(b)
$$x^2 - \Big(x^2 + x - 6\Big) = x^2 - x^2 - x + 6 = \boxed{-x + 6}$$
Les termes en x^2 se sont éliminés : la différence est une simple fonction affine.

(c) Le carré a la plus grande aire lorsque la différence est strictement positive :
$$-x + 6 > 0 \iff x < 6$$
Il faut de plus respecter la contrainte $x > 2$, sans laquelle le rectangle n'existe pas — sa largeur $x - 2$ doit être strictement positive.
$$\boxed{S =]2\,;6[}$$

EXERCICE 32 ⋆⋆⋆

1. Racines $\dfrac{1}{2}$ et -3.

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S =]-\infty\,;-3] \cup \left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[}$$

2. Racines $\dfrac{1}{2}$ et 4. Le facteur $4 - x$ a un coefficient négatif.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S = \left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[\cup]4\,;+\infty[}$$

3. On factorise par $2x - 1$:
$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (2x-1)(x+3) - (2x-1)(4-x) \\ &= (2x-1)[(x+3) - (4-x)] \\ &= (2x-1)(2x-1) = \boxed{(2x-1)^2} \end{aligned}$$

4. Un carré est toujours positif ou nul, donc $f(x) - g(x) \geqslant 0$ pour tout réel x.

$$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de } \mathcal{C}_g \text{ sur } \mathbb{R} \text{ tout entier}}$$

La différence s'annule uniquement lorsque $2x - 1 = 0$, soit $x = \dfrac{1}{2}$. On calcule alors $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$:

$$\boxed{\text{Les deux courbes ont un unique point commun : l'origine } \left(\frac{1}{2}\,;0\right)}$$

5. En factorisant par $2x - 1$ dans les deux expressions :

$$f(x) \times g(x) = (2x-1)(x+3) \times (2x-1)(4-x) = (2x-1)^2(x+3)(4-x)$$

Le facteur $(2x-1)^2$ est **positif ou nul** : il ne change donc jamais le signe du produit, mais il l'annule en $x = \dfrac{1}{2}$. On étudie alors le signe de $(x+3)(4-x)$.

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
$(2x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)g(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Le produit est négatif sur $]-\infty\,;-3]$ et sur $[4\,;+\infty[$, mais il s'annule aussi en $x = \dfrac{1}{2}$, où le carré devient nul.

$$\boxed{S =]-\infty\,;-3] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [4\,;+\infty[}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions comporte un } \textit{point isolé}}$$

C'est la subtilité de cet exercice : un facteur au carré n'influence pas le signe du produit, mais il fournit une solution supplémentaire lorsque l'inégalité est large.

EXERCICE 33 ⋆⋆⋆

1. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est :

$$\boxed{\text{Les racines de } f_m \text{ sont } m \text{ et } -2}$$

2. Cas $m = 3$. Les racines sont 3 et -2, avec $-2 < 3$.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$f_3(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S = [-2\,;3]}$$

Cas $m = -5$. Les racines sont -5 et -2, avec cette fois $-5 < -2$.

x	$-\infty$		-5		-2		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f_{-5}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S = [-5\,;-2]}$$

3. Lorsque $m = -2$, les deux racines se confondent et l'expression devient un carré :

$$f_{-2}(x) = (x+2)(x+2) = (x+2)^2$$

Un carré étant toujours positif ou nul, l'inéquation $(x+2)^2 \leqslant 0$ n'est vérifiée que lorsque le carré est nul :

$$\boxed{S = \{-2\}}$$

4. On distingue trois situations selon la position de m par rapport à -2. Dans tous les cas, les deux facteurs ont un coefficient directeur positif, donc le produit est négatif *entre* les racines.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{si } m > -2 & : \ S = [-2\,;m] \\ \text{si } m = -2 & : \ S = \{-2\} \\ \text{si } m < -2 & : \ S = [m\,;-2] \end{array}}$$

On peut résumer les trois cas d'une seule phrase : S est l'intervalle fermé dont les bornes sont m et -2, rangées dans l'ordre croissant.

5. L'ensemble des solutions se réduit à un unique élément lorsque les deux bornes se confondent :

$$\boxed{m = -2}$$