EXERCICES – CHAPITRE 9

INÉQUATIONS

Règles de base et premier degré

EXERCICE 1 ⋆

1. Parmi les nombres -3, 0, 2 et 5, lesquels sont solutions de l'inéquation $3x - 7 \leqslant 2$? Justifier par un calcul pour chacun.
2. Même question pour l'inéquation $(x-1)(x+3) > 0$, avec les nombres -5, -2, 0 et 3.
3. Une inéquation admet-elle en général un nombre fini de solutions ? Pourquoi écrit-on l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle plutôt que sous forme de liste ?

EXERCICE 2 ⋆

1. On sait que $x \leqslant 4$. Recopier et compléter par le symbole qui convient.

   a) $x + 3 \ldots 7$ c) $2x \ldots 8$ e) $\dfrac{x}{2} \ldots 2$

   b) $x - 5 \ldots -1$ d) $-3x \ldots -12$ f) $-x \ldots -4$

2. On sait maintenant que $-2 \leqslant x \leqslant 5$. Encadrer chacune des expressions suivantes.

   a) $3x$ b) $-x$ c) $x + 1$ d) $2x - 3$

EXERCICE 3 ⋆

Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.

a) $2x + 5 < 11$ c) $-2x + 7 \leqslant 1$ e) $4x + 1 \leqslant 7x - 8$

b) $3x - 4 \geqslant 8$ d) $5 - x > 12$ f) $-5x + 2 > 3x - 14$

EXERCICE 4 ⋆

Même consigne.

a) $3(x-2) \leqslant 2x + 1$ c) $\dfrac{x}{2} + 1 \leqslant 3$ e) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{4} \leqslant 1$

b) $2(3-x) > 4(x+1)$ d) $\dfrac{2x-1}{3} > 1$ f) $-(x+3) \geqslant 2(1-x)$

EXERCICE 5 ⋆

Résoudre les inéquations suivantes. On donnera l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle, dont les bornes seront écrites sous forme de fractions irréductibles lorsque c'est nécessaire.

a) $5x - 3 < 2x + 4$ d) $7 - 2x > 5x + 1$

b) $4x + 1 \geqslant 6x - 4$ e) $3(x-1) < 5x + 2$

c) $-3x + 2 \leqslant 4x - 3$ f) $\dfrac{3x+1}{4} > \dfrac{x-2}{3}$

EXERCICE 6 ⋆⋆

Pour chacune des inéquations suivantes, indiquer d'abord **si le sens de l'inégalité va changer** au cours de la résolution, en justifiant, puis résoudre.

a) $-2x < 8$

b) $x - 5 < -8$

c) $3x > -9$

d) $-\dfrac{x}{4} \geqslant 2$

e) $-5 < 2x$

f) $7 - 3x \leqslant 1$

EXERCICE 7 ⋆⋆

1. Résoudre chacune des inéquations suivantes, donner l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle, puis le représenter sur une droite graduée.

   a) $2x - 6 \geqslant 0$ b) $-x + 2 > 0$ c) $3x + 9 \leqslant 0$ d) $-4x - 8 < 0$

2. Résoudre le système suivant, c'est-à-dire déterminer les réels qui vérifient les deux inéquations *en même temps* :

$$\begin{cases} 2x + 1 > -3 \\ x - 4 \leqslant 1 \end{cases}$$

   On donnera l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle et on le représentera.

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. Une salle d'escalade propose deux formules. La formule A coûte 15 euros par mois, plus 0,50 euro par séance. La formule B coûte 30 euros par mois, avec un nombre de séances illimité.
   (a) Exprimer, en fonction du nombre n de séances mensuelles, le prix payé avec chacune des deux formules.
   (b) À partir de combien de séances par mois la formule B devient-elle strictement plus avantageuse ?
2. Marius a obtenu 12 et 9 à ses deux premiers devoirs. Quelle note minimale doit-il obtenir au troisième pour que sa moyenne atteigne au moins 12 ?

Signe des fonctions affines

EXERCICE 9 ⋆

Pour chacune des fonctions affines suivantes, déterminer la racine, préciser le signe du coefficient directeur, puis décrire le signe de la fonction.

a) $f(x) = 2x - 6$

b) $f(x) = -3x + 12$

c) $f(x) = x + 5$

d) $f(x) = -x - 2$

e) $f(x) = 4x$

f) $f(x) = -5x + 1$

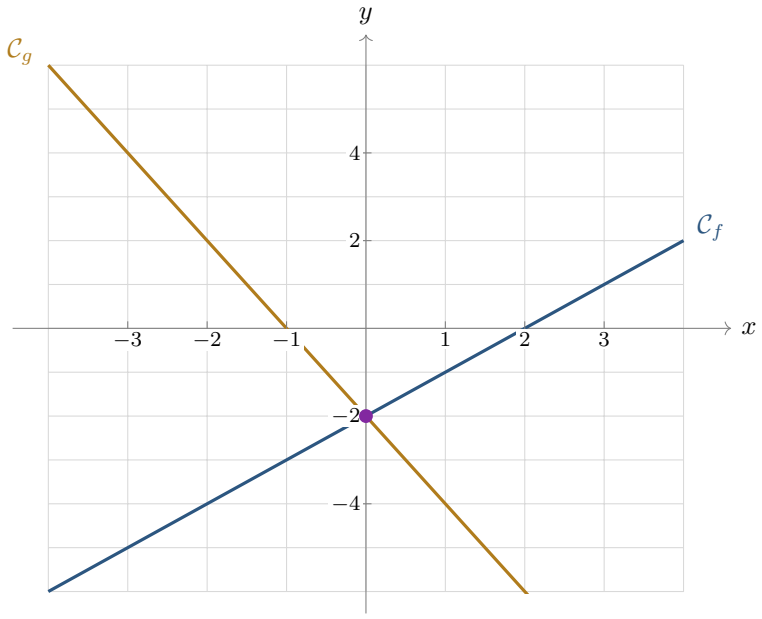
EXERCICE 10 ⋆

Dresser le tableau de signes de chacune des fonctions suivantes, puis en déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation indiquée.

1. $f(x) = 3x - 9$; résoudre $f(x) \geqslant 0$
2. $g(x) = -2x + 5$; résoudre $g(x) < 0$
3. $h(x) = 5x + 15$; résoudre $h(x) \leqslant 0$
4. $k(x) = -x + 7$; résoudre $k(x) > 0$

EXERCICE 11 ⋆⋆

Sur le graphique ci-dessous sont tracées les droites représentatives de deux fonctions affines f et g.



1. Lire graphiquement la racine de f, puis celle de g.
2. En déduire le tableau de signes de f, puis celui de g.
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant 0$, puis $g(x) < 0$.
4. Lire les coordonnées du point marqué en violet. Que représente-t-il ?
5. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.
6. Déterminer les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$, puis retrouver le résultat de la question 5 par le calcul.

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. Une fonction affine f s'annule en 3 et est positive pour $x > 3$. Que peut-on dire du signe de son coefficient directeur ? Donner un exemple d'une telle fonction.
2. Une fonction affine g s'annule en -2 et vérifie $g(0) = 4$. Déterminer son expression.
3. Une fonction affine h est négative avant 5, positive après, et vérifie $h(0) = -10$. Déterminer son expression.
4. Existe-t-il une fonction affine positive sur $\mathbb{R}$ tout entier ? Si oui, donner un exemple ; si non, expliquer pourquoi.

Inéquations produit

EXERCICE 13 ⋆

Résoudre les inéquations suivantes à l'aide d'un tableau de signes.

a) $(x-1)(x+3) \geqslant 0$

b) $(2x-4)(x+1) < 0$

c) $(-x+3)(x+2) \leqslant 0$

d) $(3x+6)(-2x+1) > 0$

e) $x(x-5) \geqslant 0$

f) $(2x-1)(3x+9) \leqslant 0$

EXERCICE 14 ⋆⋆

Résoudre les inéquations suivantes.

a) $(3x-2)(2x+5) \geqslant 0$

b) $(4x+3)(5x-1) < 0$

c) $(2x-7)(-3x-1) \leqslant 0$

d) $x(6x+5) > 0$

e) $(2x+1)(x-3) \geqslant (2x+1)(2x-1)$

f) $9x^2 < 4$

EXERCICE 15 ⋆⋆

Factoriser par un facteur commun, puis résoudre.

1. $x^2 - 3x \geqslant 0$
2. $2x^2 + 6x < 0$
3. $(x-2)(x+1) - (x-2)(2x+5) \leqslant 0$
4. $(3x-1)(x+2) + (3x-1) > 0$

Pour d), on remarquera que $3x - 1 = (3x-1) \times 1$.

EXERCICE 16 ⋆⋆

Factoriser à l'aide d'une identité remarquable, puis résoudre.

a) $x^2 - 9 \leqslant 0$

b) $x^2 - 16 > 0$

c) $4x^2 - 25 \geqslant 0$

d) $x^2 - 5 < 0$

e) $(x+1)^2 - 4 \leqslant 0$

f) $9 - x^2 \geqslant 0$

Pour d), on écrira $5 = \left(\sqrt{5}\right)^2$.

EXERCICE 17 ⋆⋆

Ramener d'abord tous les termes du même côté, factoriser, puis résoudre.

1. $x^2 \geqslant 4x$
2. $(x+2)^2 < 9$
3. $x(x+1) > 2(x+1)$
4. $(2x-3)(x+1) \geqslant (2x-3)(3-x)$

Pour a) et c), on prendra bien garde à ne pas diviser par une expression contenant x : elle pourrait être nulle, ou négative.

EXERCICE 18 ⋆⋆

Résoudre les inéquations suivantes, dont le produit comporte trois facteurs.

1. $(x-1)(x+2)(x-4) \geqslant 0$
2. $x(x-3)(-x+1) < 0$

Inéquations quotient

EXERCICE 19 ⋆

Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{x-2}{x+3} \geqslant 0$

b) $\dfrac{x+1}{x-4} < 0$

c) $\dfrac{2x-6}{x+1} \leqslant 0$

d) $\dfrac{-x+5}{x-2} > 0$

e) $\dfrac{3x+9}{-2x+4} \geqslant 0$

f) $\dfrac{x}{x-1} \leqslant 0$

EXERCICE 20 ⋆⋆

Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{3x-1}{2x+5} \leqslant 0$

b) $\dfrac{4x+2}{3-x} > 0$

c) $\dfrac{2x-1}{x+4} \geqslant 2$

d) $\dfrac{x+3}{2x-1} < 1$

e) $\dfrac{3}{x} \geqslant \dfrac{1}{2}$

f) $\dfrac{5x+2}{x-1} \leqslant 3$

EXERCICE 21 ⋆⋆

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\dfrac{x+1}{x-2} \geqslant 1$
2. $\dfrac{2x}{x+3} < 1$
3. $\dfrac{1}{x} \leqslant 2$
4. $\dfrac{x-1}{x+2} \leqslant 2$

EXERCICE 22 ⋆⋆

Julie résout l'inéquation $\dfrac{1}{x} \leqslant 2$ de la façon suivante : « je multiplie les deux membres par x, ce qui donne $1 \leqslant 2x$, donc $x \geqslant \dfrac{1}{2}$ ».

1. Vérifier que $x = -1$ est solution de l'inéquation de départ.
2. Ce nombre appartient-il à l'ensemble trouvé par Julie ?
3. Expliquer précisément l'erreur commise. Quelle règle du cours a été oubliée ?
4. Comparer avec le résultat obtenu à la question 3 de l'exercice 21.
5. Rédiger un court conseil, à destination d'un camarade, expliquant pourquoi il ne faut jamais multiplier une inéquation par une expression contenant l'inconnue.

EXERCICE 23 ⋆⋆

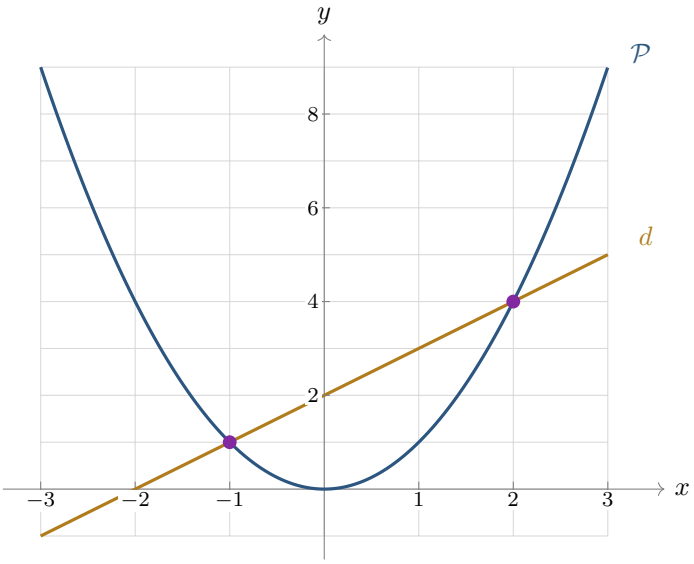
Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\dfrac{x^2-4}{x-1} \geqslant 0$
2. $\dfrac{x-3}{(x+1)(x-5)} \leqslant 0$

Position relative de deux courbes

EXERCICE 24 ⋆

Sur le graphique ci-dessous sont tracées la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ et la droite d d'équation $y = x + 2$.



1. Lire les coordonnées des deux points d'intersection, marqués en violet.
2. Sur quel intervalle la parabole est-elle en dessous de la droite ?
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \leqslant x + 2$.
4. Vérifier ce résultat par le calcul, en utilisant la factorisation $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$.

EXERCICE 25 ⋆⋆

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 2$ et $g(x) = -x + 6$.

1. Tracer les deux droites dans un même repère.
2. Calculer $f(x) - g(x)$ et réduire.
3. Étudier le signe de cette différence.
4. En déduire la position relative des deux droites, puis vérifier graphiquement.
5. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

EXERCICE 26 ⋆⋆

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = 4x - 3$.

1. Vérifier que $f(x) - g(x) = (x - 1)(x - 3)$, en développant le membre de droite.
2. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ à l'aide d'un tableau de signes.
3. En déduire la position relative de la parabole et de la droite.
4. Donner les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.

EXERCICE 27 ⋆⋆

On considère les fonctions f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$ et $g(x)=x$.

1. Démontrer que, pour tout $x>0$:
$$f(x)-g(x)=\frac{(1-x)(1+x)}{x}$$
2. Justifier que sur $]0\,;+\infty[$, les facteurs x et $1+x$ sont strictement positifs.
3. En déduire que le signe de $f(x)-g(x)$ est celui de $1-x$, puis déterminer la position relative de l'hyperbole et de la droite sur $]0\,;+\infty[$.
4. Reprendre l'étude sur $]-\infty\,;0[$. Le résultat est-il le même ?

Exercices de synthèse

EXERCICE 28 : QCM ⋆

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. La justifier.

Question	**Réponse A**	**Réponse B**	**Réponse C**
1. L'inéquation $-3x>9$ a pour solutions :	$]-\infty\,;-3[$	$]-3\,;+\infty[$	$]3\,;+\infty[$
2. Si $x\leqslant 2$, alors :	$-x\leqslant -2$	$-x\geqslant -2$	$-x\leqslant 2$
3. La racine de la fonction affine $f(x)=4x-12$ est :	12	3	-3
4. La fonction $f(x)=-2x+8$ est positive sur :	$]-\infty\,;4]$	$[4\,;+\infty[$	$\mathbb{R}$
5. L'inéquation $(x-1)(x+5)\leqslant 0$ a pour solutions :	$[-5\,;1]$	$[1\,;5]$	$]-\infty\,;-5]\cup[1\,;+\infty[$
6. La valeur interdite de $\dfrac{x+2}{3x-6}$ est :	-2	6	2
7. L'inéquation $x^2\leqslant 25$ a pour solutions :	$[-5\,;5]$	$]-\infty\,;5]$	$[5\,;+\infty[$
8. Si $\dfrac{A}{B}>0$, alors :	A et B sont de même signe	A et B sont positifs	$A>B$
9. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ si et seulement si :	$f(x)-g(x)<0$	$f(x)-g(x)>0$	$f(x)>0$
10. Dans un tableau de signes, une valeur interdite se signale par :	un zéro	une double barre	rien de particulier

EXERCICE 29 : VRAI OU FAUX ⋆⋆

Chacune des affirmations suivantes est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse : par une démonstration si l'affirmation est vraie, par un contre-exemple sinon.

1. Une inéquation admet toujours une infinité de solutions.
2. Si $a < b$, alors $-a < -b$.
3. Si $a < b$, alors $a + 7 < b + 7$.
4. Si $a < b$, alors $3a < 3b$.
5. Toute fonction affine change de signe une fois exactement.
6. Le produit de deux nombres négatifs est positif.
7. Si $\dfrac{A}{B} = 0$, alors $A = 0$.
8. Les solutions de $\dfrac{x-3}{x+1} \geqslant 0$ comprennent la valeur -1.
9. L'inéquation $x^2 \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions $\mathbb{R}$.
10. Pour résoudre $\dfrac{1}{x} < 3$, il suffit de multiplier les deux membres par x.

EXERCICE 30 ⋆⋆

Une salle de sport propose deux formules. Avec la formule A, chaque séance coûte 8 euros. Avec la formule B, on paie un abonnement annuel de 60 euros, puis 3 euros par séance.

1. On note n le nombre de séances effectuées dans l'année. Exprimer en fonction de n le prix payé avec chacune des deux formules.
2. Résoudre l'inéquation traduisant « la formule B coûte moins cher que la formule A ».
3. À partir de combien de séances la formule B est-elle plus avantageuse ?
4. Tracer dans un même repère les deux droites correspondantes, pour n compris entre 0 et 25, et vérifier graphiquement le résultat précédent.
5. Que se passe-t-il exactement pour $n = 12$?

EXERCICE 31 ⋆⋆

1. Un triangle a pour base x et pour hauteur 6. Un rectangle a pour dimensions 2 et $x + 4$. Ces longueurs sont exprimées en centimètres, avec $x > 0$.
   (a) Exprimer l'aire de chaque figure en fonction de x.
   (b) Pour quelles valeurs de x l'aire du triangle est-elle strictement supérieure à celle du rectangle ?
2. Un carré a pour côté x, et un rectangle a pour dimensions $x - 2$ et $x + 3$, avec $x > 2$.
   (a) Exprimer l'aire de chacune des deux figures, puis développer celle du rectangle.
   (b) Démontrer que la différence des deux aires vaut $-x + 6$.
   (c) En déduire pour quelles valeurs de x le carré a la plus grande aire. On n'oubliera pas la contrainte $x > 2$.

EXERCICE 32 ⋆⋆⋆

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x-1)(x+3) \qquad \text{et} \qquad g(x) = (2x-1)(4-x)$$

1. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.
2. Résoudre l'inéquation $g(x) < 0$.
3. Démontrer que $f(x) - g(x) = (2x-1)^2$.
4. En déduire la position relative des courbes de f et de g. Ont-elles un point commun ? Si oui, lequel ?
5. Résoudre l'inéquation $f(x) \times g(x) \leqslant 0$.

EXERCICE 33 ⋆⋆⋆

Soit m un nombre réel. On considère la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_m(x) = (x-m)(x+2)$$

1. Déterminer les racines de f_m en fonction de m.
2. Résoudre l'inéquation $f_m(x) \leqslant 0$ dans le cas où $m = 3$, puis dans le cas où $m = -5$.
3. Que se passe-t-il lorsque $m = -2$? Résoudre alors l'inéquation.
4. Résoudre l'inéquation $f_m(x) \leqslant 0$ dans le cas général, en distinguant les trois situations possibles selon la position de m par rapport à -2.
5. Pour quelle valeur de m l'inéquation $f_m(x) \leqslant 0$ admet-elle exactement une solution ?