CORRIGÉ – CHAPITRE 10

VECTEURS

Vecteurs et translations

EXERCICE 1 ⋆

1. On compte les carreaux parcourus horizontalement puis verticalement.

Vecteur	Horizontal	Vertical	Description
$\vec{u_1}$	3 vers la droite	1 vers le haut	
$\vec{u_2}$	3 vers la droite	1 vers le haut	identique à $\vec{u_1}$
$\vec{u_3}$	3 vers la gauche	1 vers le bas	inverse de $\vec{u_1}$
$\vec{u_4}$	2 vers la droite	1 vers le haut	
$\vec{u_5}$	6 vers la droite	2 vers le haut	le double de $\vec{u_1}$

2. Deux vecteurs ont la même direction lorsque leurs représentants sont portés par des droites parallèles. En comparant les déplacements :

$$\boxed{\vec{u_1},\ \vec{u_2},\ \vec{u_3} \text{ et } \vec{u_5} \text{ ont la même direction}}$$

En effet, tous correspondent à un déplacement de 3 carreaux horizontalement pour 1 verticalement, ou à un multiple de ce déplacement. Le vecteur $\vec{u_4}$ fait exception : 2 pour 1.

3. Parmi ces quatre-là, $\vec{u_3}$ va vers la gauche et vers le bas, les autres vers la droite et vers le haut :

$$\boxed{\vec{u_1},\ \vec{u_2} \text{ et } \vec{u_5} \text{ ont le même sens}}$$

4. $$\boxed{\vec{u_1} = \vec{u_2}}$$

Ils ont la même direction, le même sens et la même longueur : ce sont deux représentants d'un même vecteur. Le quadrilatère formé par leurs origines et leurs extrémités est d'ailleurs un parallélogramme.

5. $$\boxed{\vec{u_3} = -\vec{u_1} = -\vec{u_2}}$$

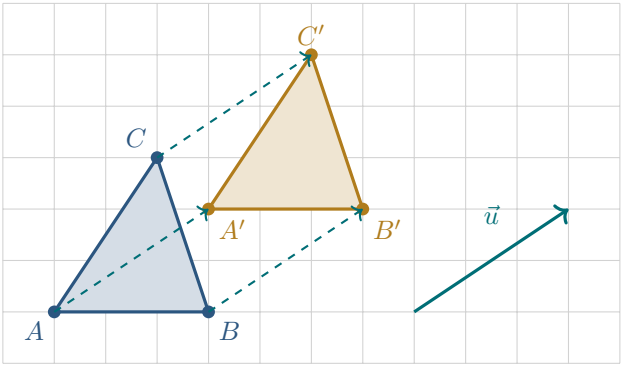
Même direction, même longueur, mais sens contraire.

6. Non : $\vec{u_5}$ a la même direction et le même sens que $\vec{u_1}$, mais sa longueur est deux fois plus grande.

$$\boxed{\vec{u_5} = 2\,\vec{u_1}}$$

EXERCICE 2 ⋆

1. et 2. Chaque point est déplacé de 3 carreaux vers la droite et 2 vers le haut.



2. Par construction $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{u}$. D'après la proposition 1 du cours, l'égalité $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ signifie que :

$$\boxed{ABB'A' \text{ est un parallélogramme}}$$

Attention à l'ordre des lettres : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ donne le parallélogramme $AA'B'B$, ou de façon équivalente $ABB'A'$ en le parcourant dans l'autre sens.

3. Une translation conserve les longueurs :

$$\boxed{AB = A'B'}$$

$$\boxed{\text{Les triangles } ABC \text{ et } A'B'C' \text{ sont superposables}}$$

4.

$$\boxed{\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \vec{u}}$$

EXERCICE 3 ⋆

1. Dans le parallélogramme $ABCD$, les côtés opposés sont parallèles et de même longueur, et le parcours $A \to B \to C \to D$ se fait dans l'ordre.

a) $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}}$

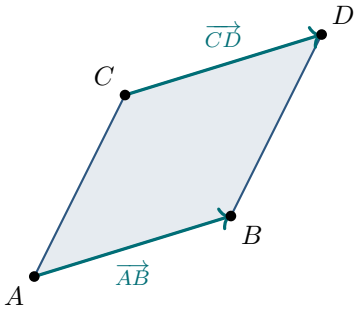
b) $\boxed{\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}}$

c) $\boxed{\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}}$

d) $\boxed{\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}}$

2. C'est le piège de ce chapitre. L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que l'on va de A à B exactement comme on va de C à D : les deux flèches sont parallèles et de même sens. En parcourant le quadrilatère, on part de A, on rejoint B, puis on doit rejoindre l'extrémité du second vecteur, c'est-à-dire D, avant de revenir par C.

$$\boxed{\text{C'est } ABDC \text{ qui est un parallélogramme}}$$



Le quadrilatère $ABCD$, lui, serait un quadrilatère croisé.

3. $\boxed{\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}}$

EXERCICE 4 ⋆⋆

1. Le point I étant le milieu de $[AB]$ et J celui de $[DC]$, les segments $[AI]$, $[IB]$, $[DJ]$ et $[JC]$ ont tous la même longueur, et sont tous parallèles et de même sens.

$$\boxed{\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{JC}}$$

2. $\boxed{\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IJ}}$

   Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ convient car $AIJD$ est un parallélogramme, comme le montre la question 4.

3. Oui : d'après la question 1, ces deux vecteurs sont tous deux égaux à $\overrightarrow{AI}$.

$$\boxed{\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{JC}}$$

4. On a $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{DJ}$ d'après la question 1. D'après la proposition 1, cette égalité signifie que :

$$\boxed{AIJD \text{ est un parallélogramme}}$$

   On vérifie l'ordre des lettres : on part de A, on va en I, puis on rejoint J, extrémité du second vecteur, avant de revenir par D.

5. $\boxed{-\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD} \qquad \text{et} \qquad -\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JI}}$

Somme de vecteurs et relation de Chasles

EXERCICE 5 ⋆

On applique la relation de Chasles : le point intermédiaire disparaît.

a) $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$

b) $\boxed{\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}}$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \boxed{\overrightarrow{AD}}$

d) $\boxed{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}}$

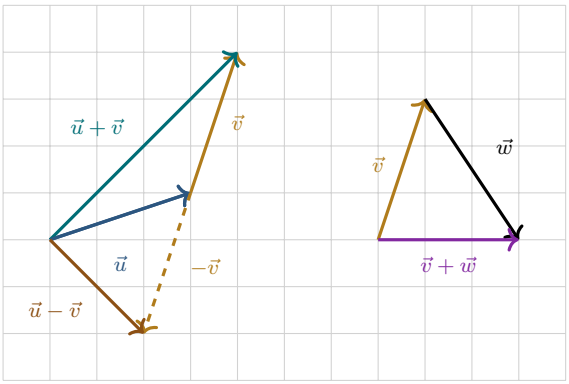
e) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{EE} = \boxed{\vec{0}}$

f) $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TR} = \overrightarrow{RR} = \boxed{\vec{0}}$

Dans les cas e) et f), on revient au point de départ : le déplacement total est nul.

EXERCICE 6 ⋆

1. à 4. Pour construire $\vec{u}+\vec{v}$, on place l'origine de $\vec{v}$ à l'extrémité de $\vec{u}$: la somme est la flèche qui joint le début du premier à la fin du second.



Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ s'obtient en enchaînant les trois déplacements : on trouve un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$.

5. En plaçant $\vec{u}$ après $\vec{v}$ plutôt que l'inverse, on aboutit au même point : les deux constructions donnent le même vecteur.

$$\boxed{\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}}$$

Les deux chemins forment d'ailleurs les deux côtés opposés d'un parallélogramme.

EXERCICE 7 ⋆⋆

a)
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\boxed{\vec{0}}$$

b) On remplace la soustraction par l'addition de l'opposé :
$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boxed{\overrightarrow{AC}}$$

c) On réorganise les termes, ce qui est permis car l'addition est commutative :
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\boxed{\overrightarrow{AD}}$$

d)
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MN}=\boxed{\vec{0}}$$

e)
$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\boxed{\overrightarrow{DB}}$$

f)
$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\boxed{\vec{0}}$$

On retiendra la règle générale : $\overrightarrow{XA}-\overrightarrow{XB}=\overrightarrow{BA}$, quel que soit le point X.

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. Dans le parallélogramme $ABCD$, on a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Donc :
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$
$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}}$$
La diagonale issue de A porte donc la somme des deux côtés issus de A : c'est la *règle du parallélogramme* énoncée par Newton en tête du chapitre.

2. (a) Le point O est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$, puisque les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$ ont donc même direction, même longueur et sens contraires :
$$\boxed{\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB}}$$

   (b) On regroupe les termes deux à deux :
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \underbrace{\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right)}_{=\vec{0}} + \underbrace{\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right)}_{=\vec{0}}$$
$$\boxed{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}}$$

3. C'est la question a) de l'exercice 7 :
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$
$$\boxed{\text{Parcourir un triangle en entier, c'est revenir à son point de départ}}$$
Le déplacement total est donc nul, quelle que soit la forme du triangle.

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. Le point I étant le milieu de $[AB]$, les segments $[AI]$ et $[IB]$ ont la même longueur, et les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{IB}$ ont la même direction — celle de la droite (AB) — et le même sens, puisque l'on parcourt le segment de A vers B.
$$\boxed{\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}}$$

2. En remplaçant $\overrightarrow{IB}$ par $\overrightarrow{AI}$ dans la relation de Chasles :
$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{II} = \boxed{\vec{0}}$$

3.
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AI} = \boxed{2\,\overrightarrow{AI}}$$

4. L'égalité $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} = \vec{0}$ signifie $\overrightarrow{JB} = -\overrightarrow{JA} = \overrightarrow{AJ}$, c'est-à-dire que J est situé sur $[AB]$ à égale distance de A et de B.
$$\boxed{J \text{ est le milieu de } [AB]}$$
La propriété de la question 2 est donc *caractéristique* du milieu.

5. On introduit M dans chacun des deux vecteurs :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}\right) \\ &= 2\,\overrightarrow{AM} + \underbrace{\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)}_{=\vec{0}}\end{aligned}$$
la dernière parenthèse étant nulle d'après la question 2, puisque M est le milieu de $[BC]$.
$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AM}}$$

Coordonnées d'un vecteur

EXERCICE 10 ⋆

1. On lit le déplacement horizontal, puis le déplacement vertical.

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$	$\vec{e}$
Coordonnées	$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

2. $\boxed{\vec{d} \text{ a une première coordonnée nulle}}$

   Aucun déplacement horizontal : le vecteur est **vertical**, donc parallèle à l'axe des ordonnées.

3. $\boxed{\vec{c} \text{ a une seconde coordonnée nulle}}$

   Aucun déplacement vertical : le vecteur est **horizontal**.

4. Non. Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ont la même première coordonnée 3, mais des secondes coordonnées opposées.

   $\boxed{\text{Aucun de ces cinq vecteurs n'est égal à un autre}}$

   En revanche $\vec{b}$ et $\vec{e}$ sont colinéaires, puisque $\vec{e} = \frac{4}{3}\vec{b}$ — on le vérifiera au moyen du déterminant en partie 5.

EXERCICE 11 ⋆

On applique la proposition 2 : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$.

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-2\\7-3\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}}$

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-1)\\-2-4\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}}$

c) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-0\\1-(-5)\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}}$

d) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-4\\-1-4\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}}$

e) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6-(-6)\\2-2\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}$

f) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\\1-(-3)\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}}$

En e), les deux points sont confondus : le vecteur obtenu est le **vecteur nul** $\vec{0}$. C'est le seul vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles, et le seul qui n'ait ni direction ni sens.

EXERCICE 12 ⋆

1. $$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-1\\3-2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}} \quad ; \quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2-4\\5-3\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}}$$

2. En notant $D(x\,;y)$, le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+2\\y-5\end{pmatrix}$. L'égalité $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ impose l'égalité des coordonnées :

$$\begin{cases}x+2=3\\y-5=1\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x=1\\y=6\end{cases}$$

$$\boxed{D(1\,;6)}$$

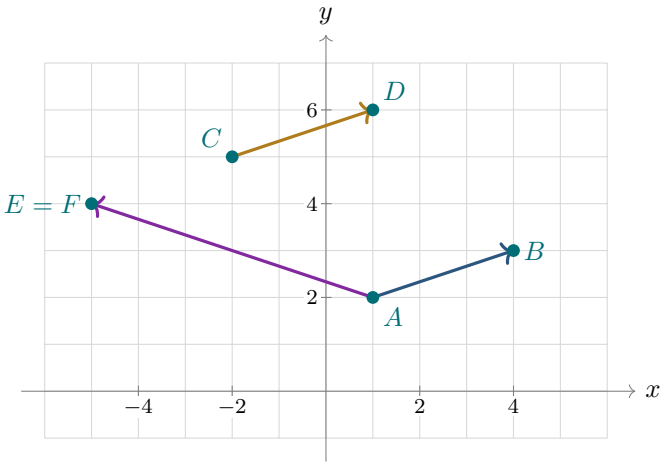
3. De même, $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$ donne :

$$\begin{cases}x-1=-6\\y-2=2\end{cases} \Longrightarrow \boxed{E(-5\,;4)}$$

4. Le quadrilatère $ABCF$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FC}$. En notant $F(x\,;y)$:

$$\begin{cases}-2-x=3\\5-y=1\end{cases} \Longrightarrow \boxed{F(-5\,;4)}$$

On constate que E et F sont confondus, ce qui n'a rien d'étonnant : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$ signifie que $ABCE$ est un parallélogramme.



5. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont bien deux flèches identiques, décalées l'une de l'autre.

EXERCICE 13 ⋆⋆

1. On applique $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

   (a) $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=\boxed{5}$

   (b) $\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=\boxed{13}$

   (c) $\sqrt{1+1}=\boxed{\sqrt{2}\approx 1{,}41}$

   (d) $\sqrt{0+49}=\boxed{7}$

   (e) $\sqrt{4+9}=\boxed{\sqrt{13}\approx 3{,}61}$

   (f) $\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=\boxed{10}$

   On remarquera en f) que $\vec{r}=-2\,\vec{u}$: sa norme est bien le double de celle de $\vec{u}$.

2.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \implies AB = \sqrt{9+16} = \boxed{5}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix} \implies AC = \sqrt{16+9} = \boxed{5}$$

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-7\\-1\end{pmatrix} \implies BC = \sqrt{49+1} = \boxed{\sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07}$$

3. Comme $AB = AC = 5$:

$$\boxed{\text{Le triangle } ABC \text{ est isocèle en } A}$$

On peut même préciser : $AB^2 + AC^2 = 25 + 25 = 50 = BC^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, il est aussi rectangle en A.

$$\boxed{\text{Le triangle } ABC \text{ est rectangle et isocèle en } A}$$

EXERCICE 14 ⋆⋆

1. Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. On calcule d'abord $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, puis on note $D(x\,;y)$:

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5-x\\1-y\end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 5-x=4\\ 1-y=2\end{cases}$$

$$\boxed{D(1\,;-1)}$$

2. Le milieu d'un segment a pour coordonnées la moyenne de celles de ses extrémités.

$$\text{milieu de } [AC] : \left(\frac{-1+5}{2}\,;\frac{2+1}{2}\right) = \boxed{\left(2\,;\frac{3}{2}\right)}$$

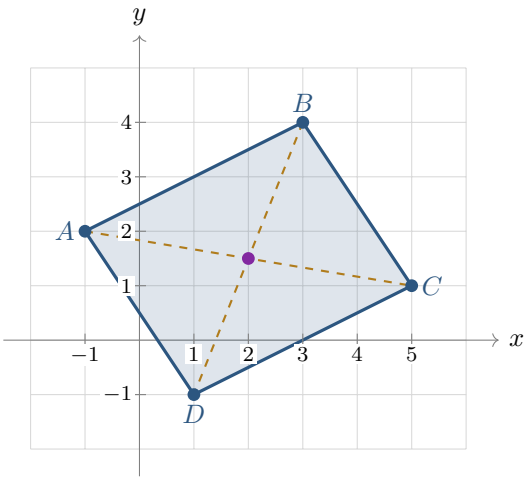
$$\text{milieu de } [BD] : \left(\frac{3+1}{2}\,;\frac{4-1}{2}\right) = \boxed{\left(2\,;\frac{3}{2}\right)}$$

3.

$$\boxed{\text{Les deux milieux sont confondus}}$$

$$\boxed{\text{Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu}}$$

4.



Le point violet, intersection des deux diagonales, a bien pour coordonnées $\left(2\,;\frac{3}{2}\right)$.

EXERCICE 15 ⋆

On additionne les coordonnées une à une, et l'on multiplie chaque coordonnée par le coefficient.

a) $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}2-1\\-3+5\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}$

b) $3\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-9\end{pmatrix}$ soit $\boxed{\begin{pmatrix}6\\-9\end{pmatrix}}$

c) $2\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}4+1\\-6-5\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}5\\-11\end{pmatrix}}$

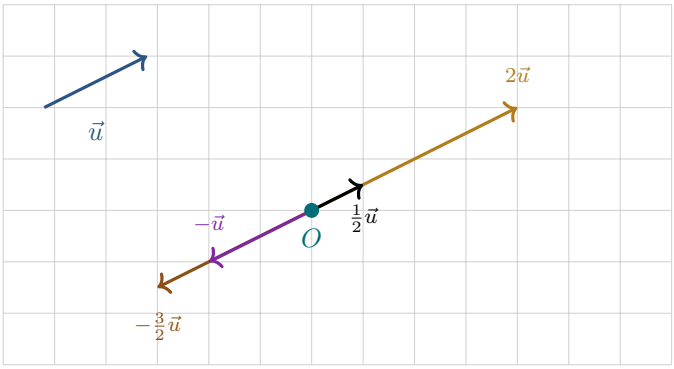
d) $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix}1+4\\2+0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}}$

e) $-2\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix}2+4\\-10+0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}6\\-10\end{pmatrix}}$

f) $\frac{1}{2}\vec{u}+2\vec{v}\begin{pmatrix}1-2\\-\frac{3}{2}+10\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-1\\\frac{17}{2}\end{pmatrix}}$

EXERCICE 16 ⋆

1. Le vecteur $\vec{u}$ correspond à un déplacement de 2 carreaux vers la droite et 1 vers le haut. On multiplie donc ce déplacement par le coefficient.



2.

Vecteur	Longueur	Sens
$2\vec{u}$	$2\times\|\vec{u}\|$	même sens que $\vec{u}$
$\frac{1}{2}\vec{u}$	$\frac{1}{2}\times\|\vec{u}\|$	même sens que $\vec{u}$
$-\vec{u}$	$\|\vec{u}\|$	sens contraire
$-\frac{3}{2}\vec{u}$	$\frac{3}{2}\times\|\vec{u}\|$	sens contraire

La longueur est toujours $|k|\times\|\vec{u}\|$: c'est la *valeur absolue* du coefficient qui intervient, jamais son signe.

3. Oui, une seule :

$$\boxed{k=0 \text{ donne } 0\,\vec{u}=\vec{0}}$$

4. Oui. Les vecteurs $3\vec{u}$ et $-5\vec{u}$ sont tous deux des multiples de $\vec{u}$: ils ont donc la même direction que $\vec{u}$, donc la même direction entre eux.

$$\boxed{3\vec{u} \text{ et } -5\vec{u} \text{ sont colinéaires}}$$

On peut d'ailleurs écrire $-5\vec{u}=-\dfrac{5}{3}\times 3\vec{u}$.

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. La relation de Chasles donne $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, et $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{u}$:

$$\boxed{\overrightarrow{BC} = \vec{v} - \vec{u}}$$

2. D'après la question 5 de l'exercice 9, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AI}$ puisque I est le milieu de $[BC]$:

$$\boxed{\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})}$$

3. L'égalité $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ est exactement la règle du parallélogramme démontrée à l'exercice 8 :

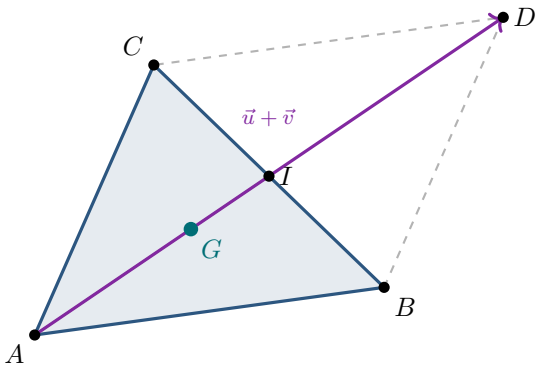
$$\boxed{ABDC \text{ est un parallélogramme}}$$

On retrouve l'ordre des lettres : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$*, donc* $ABDC$*.*

4. D'après la question 2, $\vec{u} + \vec{v} = 2\,\overrightarrow{AI}$, donc :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \times 2\,\overrightarrow{AI} = \boxed{\frac{2}{3}\,\overrightarrow{AI}}$$

Le point G se trouve donc sur le segment $[AI]$, aux deux tiers en partant de A : c'est le **centre de gravité** du triangle ABC.



EXERCICE 18 ⋆⋆

1. Le vecteur $\vec{u} + x\,\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1+2x \\ 2-x \end{pmatrix}$. L'égalité avec $\vec{w}$ donne :

$$\begin{cases} 1+2x = 5 \\ 2-x = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Les deux équations donnent la même valeur : le système est compatible.

$$\boxed{x = 2}$$

2. Le vecteur $a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3a-2b \\ -a+4b \end{pmatrix}$, d'où le système :

$$\begin{cases} 3a - 2b = -1 \\ -a + 4b = 7 \end{cases}$$

La seconde équation donne $a = 4b - 7$. En reportant dans la première :

$$3(4b-7) - 2b = -1 \iff 12b - 21 - 2b = -1 \iff 10b = 20 \iff b = 2$$

puis $a = 8 - 7 = 1$.

$$\boxed{a = 1 \text{ et } b = 2}$$

Vérification : $1 \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

3. Le système devient :

$$\begin{cases} 3a - 2b = 1 \\ -a + 4b = 1 \end{cases}$$

La seconde donne $a = 4b - 1$, d'où $3(4b-1) - 2b = 1$, soit $10b = 4$ et $b = \dfrac{2}{5}$, puis $a = \dfrac{8}{5} - 1 = \dfrac{3}{5}$.

$$\boxed{a = \frac{3}{5} \text{ et } b = \frac{2}{5}}$$

On observe que dans les trois cas le système admet une unique solution : c'est parce que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Tout vecteur du plan peut alors s'écrire, d'une seule façon, comme combinaison de ces deux-là.

Colinéarité

EXERCICE 19 ⋆

On applique $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.

	Calcul du déterminant	Conclusion
a)	$3 \times 4 - 6 \times 2 = 12 - 12 = 0$	colinéaires
b)	$1 \times 5 - 3 \times (-2) = 5 + 6 = 11$	non colinéaires
c)	$(-4) \times (-3) - 2 \times 6 = 12 - 12 = 0$	colinéaires
d)	$0 \times 0 - 2 \times 5 = -10$	non colinéaires
e)	$7 \times 2 - (-14) \times (-1) = 14 - 14 = 0$	colinéaires
f)	$2 \times 2 - 3 \times 3 = 4 - 9 = -5$	non colinéaires

EXERCICE 20 ⋆

Pour les trois couples colinéaires, on cherche k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$: il suffit de diviser une coordonnée de $\vec{v}$ par celle de $\vec{u}$, puis de vérifier sur l'autre.

a) $\dfrac{6}{3} = 2$ et $\dfrac{4}{2} = 2$: $\boxed{k = 2}$

c) $\dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{-3}{6} = -\dfrac{1}{2}$: $\boxed{k = -\dfrac{1}{2}}$

e) $\dfrac{-14}{7} = -2$ et $\dfrac{2}{-1} = -2$: $\boxed{k = -2}$

Second cas. Les deux vecteurs $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\-8\end{pmatrix}$ ont une première coordonnée nulle : ils sont tous deux verticaux, donc de même direction.

$$\boxed{\text{Ils sont colinéaires, sans aucun calcul}}$$

Le déterminant le confirme :

$$0 \times (-8) - 0 \times 3 = 0$$

On a d'ailleurs $\vec{v} = -\dfrac{8}{3}\,\vec{u}$.

EXERCICE 21 ⋆⋆

Pour tester l'alignement de trois points, on calcule le déterminant de deux vecteurs formés à partir d'un même point.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$:

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 3 \times 6 - 9 \times 2 = 18 - 18 = 0$$

$$\boxed{A,\ B \text{ et } C \text{ sont alignés}}$$

2. $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}$:

$$\det\left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}\right) = 2 \times 12 - 5 \times 5 = 24 - 25 = -1$$

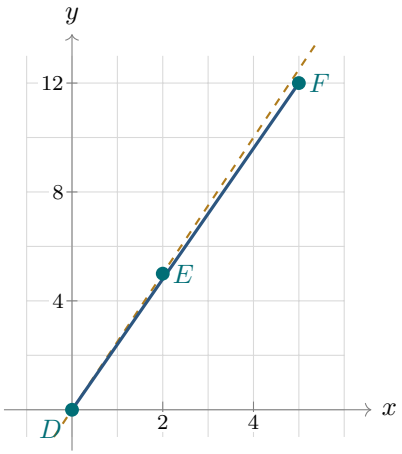
$$\boxed{D,\ E \text{ et } F \text{ ne sont pas alignés}}$$

3. $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GI}\begin{pmatrix}8\\-12\end{pmatrix}$:

$$\det\left(\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GI}\right) = 4 \times (-12) - 8 \times (-6) = -48 + 48 = 0$$

$$\boxed{G,\ H \text{ et } I \text{ sont alignés}}$$

Figure du cas 2.



En bleu ardoise la droite (DF), en pointillés ocre la droite (DE) prolongée : les trois points paraissent alignés à l'œil nu, et pourtant ils ne le sont pas. Le point E est très légèrement au-dessus de la droite (DF).

Seul le calcul du déterminant permet de conclure avec certitude

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$:

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = 3\times 4 - 6\times 2 = 0$$

(AB) et (CD) sont parallèles

2. $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$:

$$\det\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{GH}\right) = 3\times 3 - 3\times 2 = 9 - 6 = 3 \neq 0$$

(EF) et (GH) ne sont pas parallèles

3. Vérifions que C n'appartient pas à la droite (AB). On calcule $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$:

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = 3\times 4 - (-1)\times 2 = 12 + 2 = 14 \neq 0$$

Les points A, B et C ne sont donc pas alignés, et les quatre points ne le sont pas non plus. Comme de plus $\overrightarrow{CD} = 2\,\overrightarrow{AB}$, les deux droites sont parallèles mais les segments n'ont pas la même longueur.

$ABDC$ est un trapèze, mais ce n'est pas un parallélogramme

En effet $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$: les côtés $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles, mais $[CD]$ est deux fois plus long.

EXERCICE 23 ⋆⋆

On écrit à chaque fois que le déterminant est nul, puis on résout l'équation obtenue.

1. $$3\times 4 - 6\times m = 0 \iff 12 - 6m = 0 \iff \boxed{m = 2}$$

2. $$m\times(-3) - 2\times 5 = 0 \iff -3m - 10 = 0 \iff \boxed{m = -\frac{10}{3}}$$

3. On calcule $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\m-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}$, puis :

$$3\times 6 - 6\times(m-2) = 0 \iff 18 - 6m + 12 = 0 \iff 30 = 6m \iff \boxed{m = 5}$$

Vérification : pour $m = 5$, on a $B(4\,;5)$, et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ est bien colinéaire à $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}$.

4. $$m\times 2 - 3\times(m+1) = 0 \iff 2m - 3m - 3 = 0 \iff -m = 3 \iff \boxed{m = -3}$$

Vérification : pour $m = -3$, $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix} = -\vec{v}$.

Exercices de synthèse

EXERCICE 24 : QCM ⋆

Question	Réponse	Justification
1	**A**	C'est la relation de Chasles : le point intermédiaire B disparaît.
2	**B**	L'opposé de $\overrightarrow{MN}$ s'obtient en inversant le sens, donc en échangeant les deux lettres.
3	**A**	$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-1\\-1-3\end{pmatrix}$. La réponse B correspond à $\overrightarrow{BA}$.
4	**A**	On multiplie chaque coordonnée par -3 : $-3\times 2=-6$ et $-3\times(-1)=3$.
5	**B**	$2\times 1-3\times 5=2-15=-13$. La réponse A oublie le signe moins entre les deux produits.
6	**B**	C'est le théorème 2 du cours.
7	**B**	On parcourt $A\to B$, puis on rejoint D, extrémité du second vecteur, avant de revenir par C.
8	**B**	$\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{25}=5$.
9	**B**	$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$.
10	**A**	Les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont opposés, donc de somme nulle. La réponse B est fausse : ils ont des sens contraires.

EXERCICE 25 : VRAI OU FAUX ⋆⋆

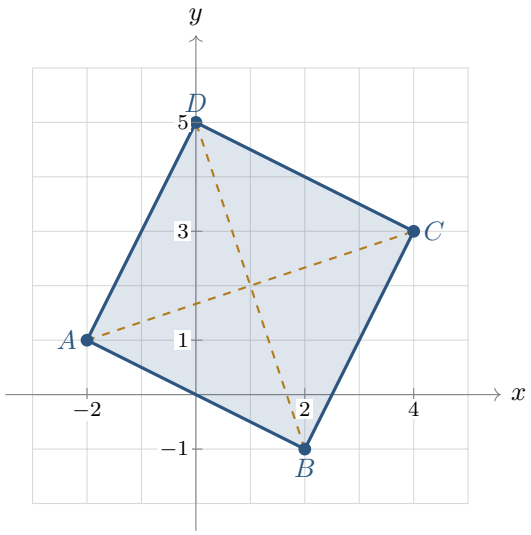
1. **Fausse**. Il faut aussi la même direction et le même sens. Contre-exemple : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont la même longueur mais ne sont pas égaux, ils sont opposés.
2. **Vraie**. C'est l'une des trois conditions de l'égalité de deux vecteurs : direction, sens *et* longueur.
3. **Vraie**. La définition du cours prévoit précisément ce cas : deux vecteurs sont colinéaires dès que l'un des deux est nul. On le vérifie aussi par le déterminant : $0\times y'-x'\times 0=0$.
4. **Vraie**. Si les deux vecteurs sont égaux, ils ont en particulier la même longueur, et $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=AB$.
5. **Fausse**. C'est la réciproque de la précédente, et elle est fausse : l'égalité des longueurs ne dit rien de la direction ni du sens. Contre-exemple : avec $A(0\,;0)$, $B(1\,;0)$, $C(0\,;0)$ et $D(0\,;1)$, on a $AB=CD=1$, mais $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\neq\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.
6. **Vraie**. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.
7. **Fausse**. L'affirmation tombe en défaut si l'un des deux vecteurs est nul : le vecteur $\vec{0}$ a un déterminant nul avec n'importe quel vecteur, alors qu'il n'a *aucune* direction. L'énoncé correct est : deux vecteurs *non nuls* de déterminant nul ont la même direction.
8. **Vraie**. C'est la méthode du cours : les points sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, ce que traduit exactement la nullité du déterminant.

9. **Vraie**. D'après la définition du produit par un réel, la longueur de $k\vec{u}$ vaut $|k| \times \|\vec{u}\|$, soit ici $2\|\vec{u}\|$.

10. **Fausse**. Une longueur n'est jamais négative. Le vecteur $-\vec{u}$ a la *même* longueur que $\vec{u}$; c'est son sens qui change.

EXERCICE 26 ⋆⋆

1.



2. $$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-(-2)\\-1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4-0\\3-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs ont les mêmes coordonnées, donc ils sont égaux :

$\boxed{ABCD \text{ est un parallélogramme}}$

3. $$AB=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \implies AD=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

Deux côtés consécutifs du parallélogramme ont la même longueur :

$\boxed{ABCD \text{ est un losange}}$

4. $$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} \implies AC=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix} \implies BD=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

$\boxed{\text{Les deux diagonales ont la même longueur}}$

5. Un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur est un rectangle. Or c'est aussi un losange d'après la question 3.

$\boxed{ABCD \text{ est un carré}}$

On aurait pu s'en douter à la lecture de la figure, mais seuls les calculs de longueurs permettent de l'affirmer.

EXERCICE 27 ⋆⋆

1. Voir la figure de l'énoncé.
2. Dans le repère $(A\,;B,D)$, le point A est l'origine, le point B est l'extrémité du premier vecteur de base et D celle du second.

$$\boxed{A(0\,;0) \quad ; \quad B(1\,;0) \quad ; \quad C(1\,;1) \quad ; \quad D(0\,;1)}$$

Le point C s'obtient par la règle du parallélogramme : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

3. Soit un triangle équilatéral de côté 1, et H le pied de la hauteur issue du sommet opposé à la base. Cette hauteur coupe la base en son milieu, donc la moitié de la base mesure $\dfrac{1}{2}$. Le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ainsi formé donne :

$$h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \iff h^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{h = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

4. Point I. Le triangle ABI est équilatéral de côté 1, construit au-dessus de $[AB]$. Son sommet I se trouve à l'aplomb du milieu de $[AB]$, à la hauteur $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\boxed{I\left(\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Point V. Le triangle BCV est équilatéral de côté 1, construit à droite du segment vertical $[BC]$. Son sommet V se trouve donc à la hauteur du milieu de $[BC]$, c'est-à-dire à l'ordonnée $\dfrac{1}{2}$, et décalé de $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ vers la droite par rapport à l'abscisse 1 :

$$\boxed{V\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{1}{2}\right)}$$

5.

$$\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} - 0\\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\end{pmatrix}}$$

$$\overrightarrow{DV}\begin{pmatrix}1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 0\\ \frac{1}{2} - 1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}}$$

6. On calcule le déterminant. Il faut développer le second produit avec soin :

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DV}\right) &= \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\\ &= -\frac{1}{4} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = 0\end{aligned}$$

Le déterminant est nul, donc $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{DV}$ sont colinéaires.

$$\boxed{\text{Les points } D,\ I \text{ et } V \text{ sont alignés}}$$

On peut préciser le rapport : $\overrightarrow{DV} = \left(2 + \sqrt{3}\right)\overrightarrow{DI}$, *soit environ* 3,73 *fois plus long.*

EXERCICE 28 ⋆⋆

1. $$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$$
$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = 3\times 6 - 9\times 2 = 18 - 18 = 0$$
$$\boxed{\text{Les points } A,\ B \text{ et } C \text{ sont alignés}}$$

2. On calcule $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}$, puis :
$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) = 3\times 7 - 6\times 2 = 21 - 12 = 9 \neq 0$$
$$\boxed{D \text{ n'appartient pas à la droite } (AB)}$$

3. En notant $E(x\,;y)$, l'égalité $\overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{AB}$ donne :
$$\begin{cases} x+1 = 6 \\ y+1 = 4 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{E(5\,;3)}$$

   Première justification. Par construction, $\overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{AB}$: les deux vecteurs sont colinéaires, donc E appartient à (AB).

   Seconde justification. Par le calcul : $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right) = 3\times 4 - 6\times 2 = 0$.

   $$\boxed{A,\ B \text{ et } E \text{ sont alignés}}$$

4. En notant $F(x\,;y)$, l'égalité $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AB}$ donne :
$$\begin{cases} x-5 = 3 \\ y-6 = 2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{F(8\,;8)}$$

   Comme $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AB}$, ces deux vecteurs sont en particulier colinéaires :

   $$\boxed{(AB) \text{ et } (DF) \text{ sont parallèles}}$$

   Elles sont d'ailleurs distinctes, puisque D n'appartient pas à (AB) d'après la question 2.

EXERCICE 29 ⋆⋆

1. Le déplacement total est la somme des deux déplacements :
$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}4+0\\0+3\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}}$$
$$\boxed{\text{Le randonneur s'est déplacé de 4 km vers l'est et 3 km vers le nord}}$$

2. $$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = \boxed{5}$$
$$\boxed{\text{C'est la distance à vol d'oiseau entre le départ et l'étape, soit 5 km}}$$
   Il a marché $4+3=7$ km, mais ne se trouve qu'à 5 km de son point de départ.

3.
$$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix}4-1\\3+2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}}$$
$$\|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\|=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}\approx\boxed{5{,}83\text{ km}}$$

4. Le point d'arrivée est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$. Comme A est l'origine :

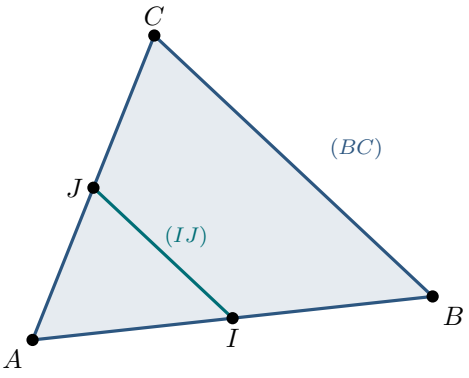
$$\boxed{\text{Le point d'arrivée a pour coordonnées } (3\,;5)}$$

5. Pour revenir en A, il faut effectuer le déplacement opposé :

$$\boxed{-(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}}$$

soit 3 km vers l'ouest et 5 km vers le sud, pour une distance totale de $\sqrt{34}\approx 5{,}83$ km.

EXERCICE 30 ⋆⋆⋆

1.


2. Le point I est le milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$ d'après la question 3 de l'exercice 9. En divisant par 2 :

$$\boxed{\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$$

Le même raisonnement dans le triangle donne :

$$\boxed{\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$$

3. On introduit le point A à l'aide de la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ}&=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}\\&=-\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}\\&=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$.

$$\boxed{\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$$

4. L'égalité précédente montre que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, le coefficient valant $\frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Les droites } (IJ) \text{ et } (BC) \text{ sont parallèles}}$$

5. La longueur d'un vecteur multiplié par $\frac{1}{2}$ est la moitié de la longueur du vecteur initial :

$$\boxed{IJ = \frac{BC}{2}}$$

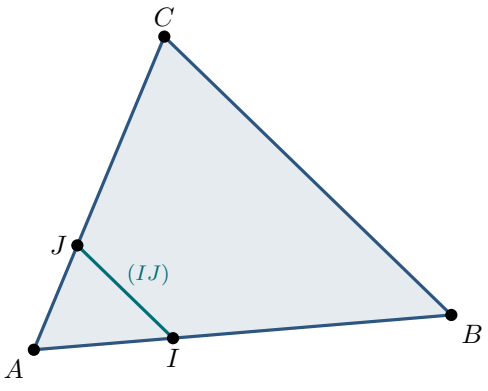
6. $$\boxed{\text{C'est le théorème de la droite des milieux}}$$

Il est ici démontré en trois lignes de calcul vectoriel, alors que la démonstration géométrique classique demande de passer par un parallélogramme auxiliaire.

EXERCICE 31 ⋆⋆⋆

Partie A : démonstration générale.

1.



2. Le raisonnement est identique à celui de l'exercice précédent, avec $\frac{1}{3}$ au lieu de $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}}$$

3. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires :

$$\boxed{\text{Les droites } (IJ) \text{ et } (BC) \text{ sont parallèles}}$$

4. Le calcul ne dépend pas de la valeur particulière du coefficient. Avec $\overrightarrow{AI} = k\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = k\,\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -k\,\overrightarrow{AB} + k\,\overrightarrow{AC} \\ &= k\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = k\,\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{IJ} = k\,\overrightarrow{BC},\ \text{donc } (IJ) \text{ et } (BC) \text{ sont parallèles}}$$

C'est le théorème de Thalès, ici démontré vectoriellement et d'un seul coup pour toutes les valeurs de k.

Partie B : vérification dans un repère.

5. $$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}10-1\\5-2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}} \quad ; \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4-1\\11-2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}}$$

6. $$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{I(1+3\,;2+1)=I(4\,;3)}$$

$$\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{J(1+1\,;2+3)=J(2\,;5)}$$

7. $$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}2-4\\5-3\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}} \quad ; \quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4-10\\11-5\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-6\\6\end{pmatrix}}$$

On vérifie bien que $\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}=\overrightarrow{IJ}$.

8. $$\det\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{BC}\right)=(-2)\times 6-(-6)\times 2=-12+12=0$$

$\boxed{\text{Le déterminant est nul : les droites } (IJ) \text{ et } (BC) \text{ sont parallèles}}$

EXERCICE 32 ⋆⋆⋆

Question préliminaire.

On lit sur la figure, en s'appuyant sur les points de subdivision.

- Le point marqué sur $[AB]$ en est le milieu. Le point R se trouve de l'autre côté de A, à la même distance : $\overrightarrow{AR}$ est donc de sens contraire à $\overrightarrow{AB}$ et de longueur moitié.
- Les deux points marqués sur $[AC]$ le partagent en trois parts égales, et S est le premier en partant de A.
- Les quatre points marqués sur $[BC]$ le partagent en cinq parts égales, et T est le troisième en partant de B.

$$\boxed{\alpha=-\frac{1}{2} \quad ; \quad \beta=\frac{1}{3} \quad ; \quad \gamma=\frac{3}{5}}$$

Partie A : méthode vectorielle.

1. On introduit le point A par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RS}&=\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{AS}=-\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{AS}\\&=-\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{RS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$$

2. On part de $\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BT}$, puis on exprime $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$$

d'où :

$$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$$
$$= \left(1 - \frac{3}{5}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AT} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}}$$

3. De même que pour $\overrightarrow{RS}$:

$$\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$$
$$= \left(\frac{5}{10} + \frac{4}{10}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\boxed{\overrightarrow{RT} = \frac{9}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}}$$

4. On multiplie l'expression précédente par $\frac{5}{9}$:

$$\frac{5}{9}\overrightarrow{RT} = \frac{5}{9} \times \frac{9}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{9} \times \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

On reconnaît exactement l'expression de $\overrightarrow{RS}$ obtenue à la question 1 :

$$\boxed{\overrightarrow{RS} = \frac{5}{9}\overrightarrow{RT}}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ sont donc colinéaires :

$$\boxed{\text{Les points } R,\ S \text{ et } T \text{ sont alignés}}$$

Partie B : méthode analytique.

5. Dans le repère $(A\,;B,C)$, le point A est l'origine et les vecteurs de base sont $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Les coordonnées d'un point M sont donc les coefficients de $\overrightarrow{AM}$ dans cette base.

$$\boxed{A(0\,;0) \quad ; \quad B(1\,;0) \quad ; \quad C(0\,;1)}$$

Comme $\overrightarrow{AR} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$:

$$\boxed{R\left(-\frac{1}{2}\,;0\right) \qquad ; \qquad S\left(0\,;\frac{1}{3}\right)}$$

6. La question 2 de la partie A a établi que $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$:

$$\boxed{T\left(\frac{2}{5}\,;\frac{3}{5}\right)}$$

7.

$$\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}\frac{2}{5} - 0\\ \frac{3}{5} - \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

La seconde coordonnée vaut $\frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{9}{15} - \frac{5}{15} = \frac{4}{15}$.

$$\boxed{\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{4}{15}\end{pmatrix}}$$

8.
$$\overrightarrow{SR}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}-0\\0-\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}}$$

On calcule le déterminant :
$$\det\left(\overrightarrow{ST},\overrightarrow{SR}\right)=\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{4}{15}=-\frac{2}{15}+\frac{4}{30}=-\frac{2}{15}+\frac{2}{15}=0$$

$$\boxed{\overrightarrow{ST}\text{ et }\overrightarrow{SR}\text{ sont colinéaires}}$$

9. Les vecteurs $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{SR}$ ayant la même origine S et étant colinéaires :

$$\boxed{\text{Les points } R,\ S \text{ et } T \text{ sont alignés}}$$

Comparaison des deux méthodes. La méthode analytique est plus rapide et plus mécanique : une fois le repère choisi, tout se ramène à des calculs de coordonnées, sans qu'il faille deviner quelle relation de Chasles introduire. La méthode vectorielle est en revanche plus générale, car elle n'exige aucun repère et fournit directement le coefficient $\frac{5}{9}$ liant les deux vecteurs, ce qui renseigne sur la position relative des trois points.

EXERCICE 33 ⋆⋆⋆

1. On procède comme à l'exercice précédent, en écrivant $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$:
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AT}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BT}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\\&=\left(1-\frac{3}{7}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$
$$\boxed{\overrightarrow{AT}=\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}}$$

2. Dans le repère $(A\,;B,C)$, les coordonnées d'un point sont les coefficients du vecteur qui le joint à A.
$$\boxed{M(a\,;0)\quad;\quad S\left(0\,;\frac{2}{5}\right)\quad;\quad T\left(\frac{4}{7}\,;\frac{3}{7}\right)}$$

3.
$$\overrightarrow{SM}\begin{pmatrix}a-0\\0-\frac{2}{5}\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}a\\-\frac{2}{5}\end{pmatrix}}$$
$$\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}\frac{4}{7}-0\\\frac{3}{7}-\frac{2}{5}\end{pmatrix}$$
La seconde coordonnée vaut $\frac{3}{7}-\frac{2}{5}=\frac{15}{35}-\frac{14}{35}=\frac{1}{35}$.
$$\boxed{\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\\frac{1}{35}\end{pmatrix}}$$

4. Les points S, T et M sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{SM}$ et $\overrightarrow{ST}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si leur déterminant est nul :

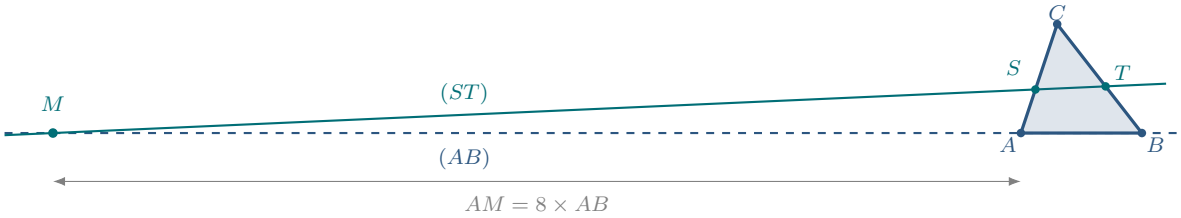
$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{SM},\overrightarrow{ST}\right) &= a\times\frac{1}{35}-\frac{4}{7}\times\left(-\frac{2}{5}\right)\\ &= \frac{a}{35}+\frac{8}{35}=\frac{a+8}{35}\end{aligned}$$

Ce déterminant s'annule si et seulement si $a+8=0$:

$$\boxed{a=-8}$$

5. Comme $\overrightarrow{AM}=-8\,\overrightarrow{AB}$, le coefficient est négatif : le point M se situe sur la droite (AB), du côté opposé à B par rapport à A. Sa distance à A vaut de plus $8\times AB$.

$\boxed{M \text{ n'appartient pas au segment } [AB] : \text{ il est très à l'extérieur}}$



La figure est tracée à l'échelle, avec la même unité sur les deux axes : c'est la raison pour laquelle le triangle apparaît minuscule. La droite (ST) est en effet presque parallèle à (AB) — sa pente ne vaut que 0,044 *— de sorte qu'il faut reculer de huit longueurs AB avant qu'elles ne se croisent en M.*