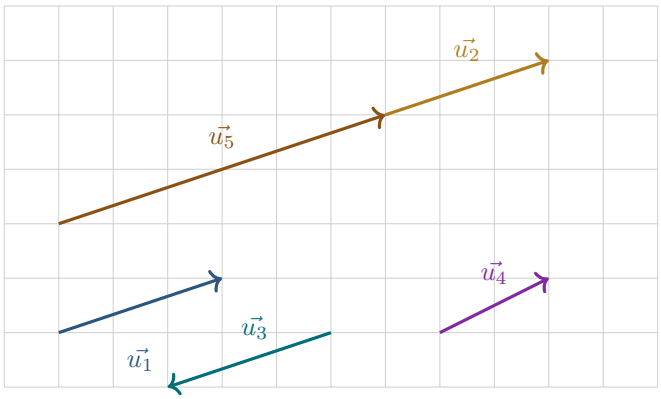
EXERCICES – CHAPITRE 10

VECTEURS

Vecteurs et translations

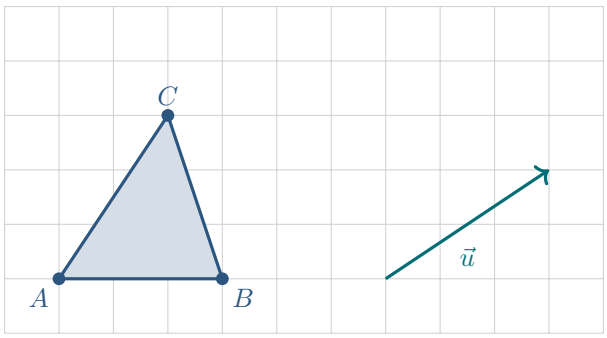
EXERCICE 1 ⋆

Sur le quadrillage ci-dessous sont représentés cinq vecteurs.



1. En comptant les carreaux, indiquer pour chaque vecteur de combien de carreaux il faut se déplacer horizontalement, puis verticalement.
2. Quels sont les vecteurs qui ont la même direction ? Justifier.
3. Parmi ceux-là, lesquels ont le même sens ?
4. Quels sont les deux vecteurs égaux ? Justifier en comparant direction, sens et longueur.
5. Quels sont les deux vecteurs opposés l'un de l'autre ?
6. Le vecteur $\vec{u_5}$ est-il égal à $\vec{u_1}$? Sinon, quelle relation les lie ?

EXERCICE 2 ⋆



1. Reproduire la figure sur papier quadrillé.
2. Construire les points A', B' et C', images respectives de A, B et C par la translation de vecteur $\vec{u}$.
3. Quelle est la nature du quadrilatère $ABB'A'$? Justifier.
4. Comparer les longueurs AB et $A'B'$. Que peut-on dire du triangle $A'B'C'$?

5. Citer trois vecteurs égaux à $\vec{u}$ sur la figure complétée.

EXERCICE 3 ⋆

1. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Recopier et compléter par le vecteur qui convient.

   a) $\overrightarrow{AB} = \ldots$ c) $\overrightarrow{BA} = \ldots$

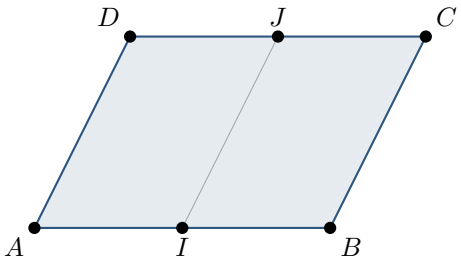
   b) $\overrightarrow{AD} = \ldots$ d) $\overrightarrow{CB} = \ldots$

2. Soient A, B, C et D quatre points tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Quel quadrilatère est un parallélogramme : $ABCD$ ou $ABDC$? Justifier en faisant une figure.

3. Soient E, F, G et H quatre points tels que $EFGH$ soit un parallélogramme. Écrire deux égalités vectorielles traduisant cette propriété.

EXERCICE 4 ⋆⋆

Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un parallélogramme et I est le milieu de $[AB]$.



J est le milieu de $[DC]$

1. Citer tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AI}$ que l'on peut lire sur la figure.
2. Citer tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AD}$.
3. Le vecteur $\overrightarrow{IB}$ est-il égal à $\overrightarrow{JC}$? Justifier.
4. Quelle est la nature du quadrilatère $AIJD$? Justifier à l'aide d'une égalité vectorielle.
5. Donner l'opposé de $\overrightarrow{DC}$, puis celui de $\overrightarrow{IJ}$.

Somme de vecteurs et relation de Chasles

EXERCICE 5 ⋆

Simplifier chacune des écritures suivantes à l'aide de la relation de Chasles.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

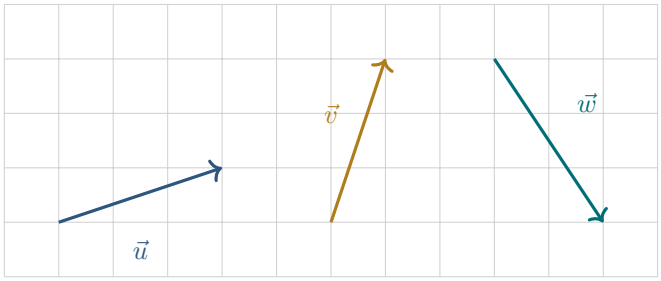
d) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

e) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HE}$

f) $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TR}$

EXERCICE 6 ⋆

Sur la figure ci-dessous sont représentés trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.



1. Reproduire la figure, puis construire un représentant du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ d'origine le point de coordonnées $(1\,;1)$.
2. Construire de même un représentant de $\vec{v}+\vec{w}$.
3. Construire un représentant de $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.
4. Construire un représentant de $\vec{u}-\vec{v}$.
   On rappelle que $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$.
5. Vérifier sur la figure que $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{v}+\vec{u}$ donnent bien le même vecteur.

EXERCICE 7 ⋆⋆

Simplifier les écritures suivantes. On fera apparaître les étapes du calcul.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{MN}$

e) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$

f) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$

Pour b) et e), on commencera par remplacer la soustraction par l'addition du vecteur opposé.

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Démontrer que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
   Cette égalité s'appelle la règle du parallélogramme.
2. Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O, c'est-à-dire le point d'intersection de ses diagonales.
   (a) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$? Et de $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OD}$?
   (b) En déduire que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.
3. Soient A, B, C trois points quelconques. Démontrer que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$, et interpréter ce résultat.

EXERCICE 9 ⋆⋆

Soient A et B deux points distincts, et I le milieu du segment $[AB]$.

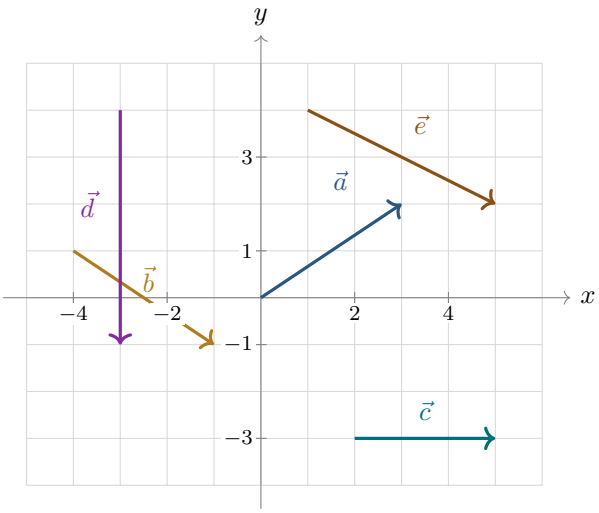
1. Justifier que $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$.
2. En déduire, à l'aide de la relation de Chasles, que $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
3. Démontrer que $\overrightarrow{AB}=2\,\overrightarrow{AI}$.
4. Réciproquement, soit J un point tel que $\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}=\vec{0}$. Que peut-on dire de J ?

5. Soit ABC un triangle et M le milieu de $[BC]$. Démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AM}$.
   On introduira le point M dans chacun des deux vecteurs à l'aide de la relation de Chasles.

Coordonnées d'un vecteur

EXERCICE 10 ⋆

Lire les coordonnées de chacun des vecteurs représentés ci-dessous.



1. Donner les coordonnées de $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ et $\vec{e}$.
2. Quel vecteur a une première coordonnée nulle ? Que peut-on dire de sa direction ?
3. Quel vecteur a une seconde coordonnée nulle ? Même question.
4. Deux de ces vecteurs sont-ils égaux ? Justifier.

EXERCICE 11 ⋆

Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans chacun des cas suivants.

a) $A(2\,;3)$ et $B(5\,;7)$

b) $A(-1\,;4)$ et $B(3\,;-2)$

c) $A(0\,;-5)$ et $B(-3\,;1)$

d) $A(4\,;4)$ et $B(4\,;-1)$

e) $A(-6\,;2)$ et $B(-6\,;2)$

f) $A\left(\frac{1}{2}\,;-3\right)$ et $B\left(\frac{5}{2}\,;1\right)$

Que remarque-t-on en e) ? Comment s'appelle le vecteur obtenu ?

EXERCICE 12 ⋆

On considère les points $A(1\,;2)$, $B(4\,;3)$ et $C(-2\,;5)$.

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{BC}$.
2. Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
3. Déterminer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$.
4. Déterminer les coordonnées du point F tel que $ABCF$ soit un parallélogramme.
5. Placer les cinq points dans un repère et vérifier graphiquement les résultats.

EXERCICE 13 ⋆⋆

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1. Calculer la norme de chacun des vecteurs suivants. On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée au centième si nécessaire.

   (a) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ (c) $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ (e) $\vec{t}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

   (b) $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}$ (d) $\vec{s}\begin{pmatrix}0\\-7\end{pmatrix}$ (f) $\vec{r}\begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix}$

2. Soient $A(1\,;2)$, $B(4\,;6)$ et $C(-3\,;5)$. Calculer AB, AC et BC.
3. En déduire la nature du triangle ABC.

EXERCICE 14 ⋆⋆

On considère les points $A(-1\,;2)$, $B(3\,;4)$ et $C(5\,;1)$.

1. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
   On commencera par traduire cette propriété par une égalité vectorielle.
2. Calculer les coordonnées du milieu de $[AC]$, puis celles du milieu de $[BD]$.
3. Que constate-t-on ? Quelle propriété du parallélogramme retrouve-t-on ainsi ?
4. Faire une figure pour illustrer les résultats.

Opérations sur les vecteurs

EXERCICE 15 ⋆

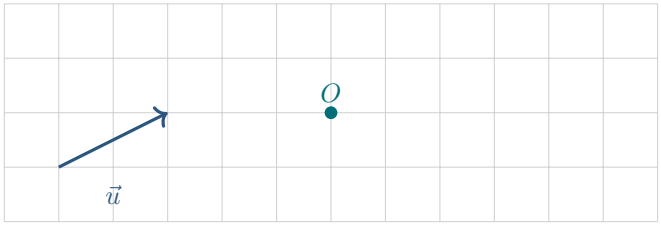
On donne $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées des vecteurs suivants.

a) $\vec{u}+\vec{v}$ c) $2\vec{u}-\vec{v}$ e) $-2\vec{v}+\vec{w}$

b) $3\vec{u}$ d) $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ f) $\frac{1}{2}\vec{u}+2\vec{v}$

EXERCICE 16 ⋆

Sur la figure ci-dessous est représenté un vecteur $\vec{u}$.



1. Reproduire la figure, puis construire les représentants d'origine O des vecteurs suivants : $2\vec{u}$, $\frac{1}{2}\vec{u}$, $-\vec{u}$ et $-\frac{3}{2}\vec{u}$.
2. Pour chacun, préciser sa longueur en fonction de celle de $\vec{u}$, ainsi que son sens par rapport à celui de $\vec{u}$.

3. Existe-t-il un réel k tel que $k\vec{u}$ soit le vecteur nul ? Lequel ?
4. Les vecteurs $3\vec{u}$ et $-5\vec{u}$ sont-ils colinéaires ? Justifier sans calcul.

EXERCICE 17 ⋆⋆

Soit ABC un triangle. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Soit I le milieu de $[BC]$. Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3. Soit D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v}$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$? Justifier.
4. Soit G le point tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v})$. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$, puis placer G sur une figure.

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. On donne $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$. Déterminer le réel x tel que $\vec{u} + x\,\vec{v} = \vec{w}$.
2. On donne $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$. Déterminer les réels a et b tels que $a\,\vec{u} + b\,\vec{v} = \vec{w}$.
   On obtiendra un système de deux équations à deux inconnues.
3. Reprendre la question 2 avec $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Colinéarité

EXERCICE 19 ⋆

Calculer le déterminant des couples de vecteurs suivants.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

e) $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-14\\2\end{pmatrix}$

f) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

Pour chacun des six couples, conclure quant à la colinéarité des deux vecteurs.

EXERCICE 20 ⋆

Pour les couples colinéaires de l'exercice précédent, déterminer le réel k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-8\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ? Répondre d'abord sans calcul, puis vérifier avec le déterminant.

EXERCICE 21 ⋆⋆

Dans chaque cas, déterminer si les trois points sont alignés.

1. $A(-2\,;1)$, $B(1\,;3)$ et $C(7\,;7)$
2. $D(0\,;0)$, $E(2\,;5)$ et $F(5\,;12)$
3. $G(-3\,;4)$, $H(1\,;-2)$ et $I(5\,;-8)$

Faire une figure pour le cas 2 : le résultat était-il facile à deviner graphiquement ?

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. On donne $A(1\,;1)$, $B(4\,;3)$, $C(0\,;5)$ et $D(6\,;9)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?
2. On donne $E(2\,;-1)$, $F(5\,;1)$, $G(-1\,;3)$ et $H(2\,;6)$. Les droites (EF) et (GH) sont-elles parallèles ?
3. Reprendre la question 1 en vérifiant que les quatre points ne sont pas alignés. Que peut-on alors dire du quadrilatère $ABDC$?

EXERCICE 23 ⋆⋆

Déterminer, dans chaque cas, la valeur du réel m demandée.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\m\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ sont colinéaires.
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}m\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ sont colinéaires.
3. Les points $A(1\,;2)$, $B(4\,;m)$ et $C(7\,;8)$ sont alignés.
4. $\vec{u}\begin{pmatrix}m\\m+1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Exercices de synthèse

EXERCICE 24 : QCM ⋆

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. La justifier.

Question	**Réponse A**	**Réponse B**	**Réponse C**
1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ est égal à :	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{BA}$
2. L'opposé de $\overrightarrow{MN}$ est :	$\overrightarrow{MN}$	$\overrightarrow{NM}$	$\vec{0}$
3. Si $A(1\,;3)$ et $B(4\,;-1)$, alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :	$\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$
4. Si $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, alors $-3\vec{u}$ a pour coordonnées :	$\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$
5. Le déterminant de $\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ vaut :	17	-13	13
6. Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si :	leur somme est nulle	leur déterminant est nul	ils ont même longueur
7. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ signifie que :	$ABCD$ est un parallélogramme	$ABDC$ est un parallélogramme	$ACBD$ est un parallélogramme
8. Dans un repère orthonormé, la norme de $\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ vaut :	1	5	7
9. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ est égal à :	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{BA}$
10. Si I est le milieu de $[AB]$, alors :	$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$	$\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}$	$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{BI}$

EXERCICE 25 : VRAI OU FAUX ⋆⋆

Chacune des affirmations suivantes est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse : par une démonstration si l'affirmation est vraie, par un contre-exemple sinon.

1. Deux vecteurs de même longueur sont égaux.
2. Deux vecteurs égaux ont la même longueur.
3. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.
4. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors $AB = CD$.
5. Si $AB = CD$, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
6. Pour tous points A et B, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.
7. Si deux vecteurs ont un déterminant nul, alors ils ont la même direction.
8. Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0$.
9. Le vecteur $2\vec{u}$ a une longueur double de celle de $\vec{u}$.
10. Le vecteur $-\vec{u}$ a une longueur négative.

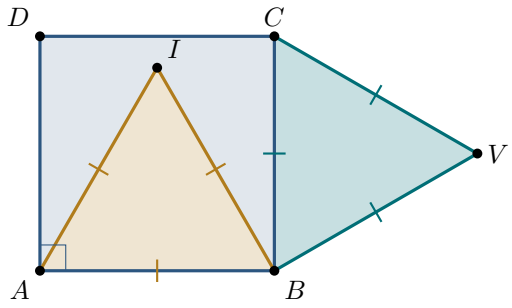
EXERCICE 26 ⋆⋆

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-2\,;1)$, $B(2\,;-1)$, $C(4\,;3)$ et $D(0\,;5)$.

1. Placer ces quatre points dans un repère.
2. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{DC}$. Qu'en déduit-on pour le quadrilatère $ABCD$?
3. Calculer les longueurs AB et AD. Que peut-on en déduire ?
4. Calculer les longueurs des diagonales AC et BD.
5. En déduire la nature exacte du quadrilatère $ABCD$.

EXERCICE 27 ⋆⋆

Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un carré, et les triangles ABI et BCV sont équilatéraux.



Dans tout l'exercice, on se place dans le repère $(A\,;B,D)$, c'est-à-dire le repère d'origine A dont les vecteurs de base sont $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

1. Reproduire la figure sur une feuille quadrillée.
2. Donner les coordonnées des points A, B, C et D dans ce repère.
3. Justifier que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1 vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   On appliquera le théorème de Pythagore dans la moitié du triangle.
4. En déduire les coordonnées exactes des points I et V.

5. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{DV}$.
6. Démontrer que les points D, I et V sont alignés.

EXERCICE 28 ⋆⋆

Dans un repère, on considère les points $A(-1\,;-1)$, $B(2\,;1)$, $C(8\,;5)$ et $D(5\,;6)$.

1. Démontrer que les points A, B et C sont alignés.
2. Le point D appartient-il à la droite (AB) ? Justifier.
3. Déterminer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$. Le point E est-il aligné avec A et B ? Justifier de deux façons différentes.
4. Déterminer les coordonnées du point F tel que $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AB}$, puis démontrer que les droites (AB) et (DF) sont parallèles.

EXERCICE 29 ⋆⋆

Un randonneur part d'un point A. Il marche d'abord 4 km vers l'est, ce que l'on modélise par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$, puis 3 km vers le nord, modélisé par $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$. L'unité est le kilomètre, et le repère est orthonormé.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$. Interpréter.
2. Calculer $\|\vec{u}+\vec{v}\|$. Que représente ce nombre ?
3. Le randonneur effectue ensuite un troisième déplacement, modélisé par $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. Déterminer le vecteur du déplacement total, puis la distance à vol d'oiseau entre le départ et l'arrivée.
4. En prenant A pour origine du repère, donner les coordonnées du point d'arrivée.
5. Quel vecteur devrait-il suivre pour rentrer directement au point de départ ?

EXERCICE 30 ⋆⋆⋆

Soit ABC un triangle. On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$.

1. Faire une figure.
2. Justifier que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
3. En utilisant la relation de Chasles, démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
   On écrira $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}$.
4. En déduire que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.
5. Que peut-on dire de la longueur IJ par rapport à BC ?
6. Comment s'appelle le théorème que l'on vient de démontrer ?

EXERCICE 31 ⋆⋆⋆

Soit ABC un triangle. On note I le point tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et J le point tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Partie A : démonstration générale.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

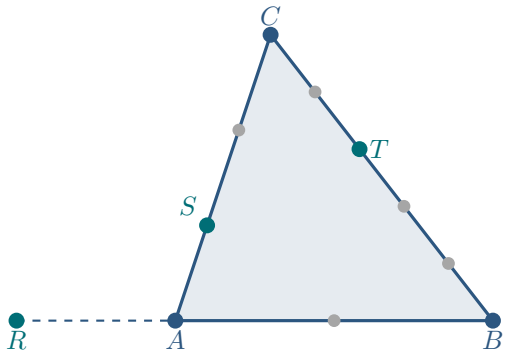
3. En déduire que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.
4. Généraliser : soit k un réel non nul, I le point tel que $\overrightarrow{AI} = k\,\overrightarrow{AB}$ et J celui tel que $\overrightarrow{AJ} = k\,\overrightarrow{AC}$. Démontrer que (IJ) et (BC) sont parallèles.

Partie B : vérification dans un repère.
On se place maintenant dans un repère, avec $A(1\,;2)$, $B(10\,;5)$ et $C(4\,;11)$.

5. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.
6. En déduire les coordonnées des points I et J définis au début de l'exercice.
7. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$ et de $\overrightarrow{BC}$, puis vérifier l'égalité de la question 2.
8. Retrouver le parallélisme des droites (IJ) et (BC) à l'aide du déterminant.

EXERCICE 32 ⋆⋆⋆

On considère un triangle ABC. Le point R appartient à la droite (AB), le point S au segment $[AC]$ et le point T au segment $[BC]$. Les points marqués en gris sur la figure partagent chaque segment en parts égales.



Question préliminaire. À l'aide de la figure, déterminer les réels α, β et γ tels que :

$$\overrightarrow{AR} = \alpha\,\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{AS} = \beta\,\overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{BT} = \gamma\,\overrightarrow{BC}$$

On se propose de démontrer que les points R, S et T sont alignés, par deux méthodes différentes.

Partie A : méthode vectorielle.

1. Démontrer que $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
2. Démontrer que $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.
   On pourra écrire $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT}$, puis exprimer $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire l'expression de $\overrightarrow{RT}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4. Vérifier que $\overrightarrow{RS} = \frac{5}{9}\overrightarrow{RT}$, puis conclure.

Partie B : méthode analytique.
On se place désormais dans le repère $(A\,;B,C)$.

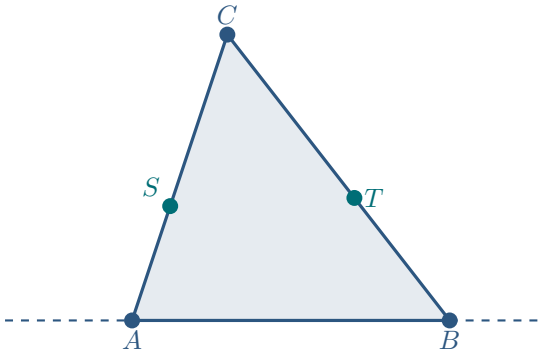
5. Donner les coordonnées des points A, B, C, R et S.
6. Déterminer les coordonnées du point T.
7. Démontrer que $\overrightarrow{ST}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix}$.
8. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{SR}$, puis démontrer que $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{SR}$ sont colinéaires.

9. Conclure. Laquelle des deux méthodes vous paraît la plus rapide ? La plus générale ?

EXERCICE 33 ⋆⋆⋆

On considère un triangle ABC et un réel a. Les points M, S et T sont définis par :

$$\overrightarrow{AM} = a\,\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{AS} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{BT} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$$



le point M se trouve quelque part sur cette droite

1. Démontrer que $\overrightarrow{AT} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$.
2. On se place dans le repère $(A\,;B,C)$. Donner les coordonnées des points M, S et T en fonction de a lorsque c'est nécessaire.
3. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{SM}$ et $\overrightarrow{ST}$.
4. Déterminer la valeur de a pour laquelle les points S, T et M sont alignés.
5. Où se situe alors le point M par rapport aux points A et B ? Le point M appartient-il au segment $[AB]$?