CORRIGÉ – CHAPITRE 11

STATISTIQUES

Vocabulaire et représentations

EXERCICE 1 ⋆

	Population	Individus	Caractère	Nature
1.	les 28 élèves de la classe	un élève	la taille, en cm	quantitatif
2.	les 500 automobilistes	un automobiliste	la couleur de la voiture	qualitatif
3.	les 20 équipes	une équipe	le nombre de buts	quantitatif
4.	les 1 200 habitants	un habitant	le moyen de transport	qualitatif
5.	les 80 ampoules	une ampoule	la durée de vie, en heures	quantitatif
6.	les 150 élèves du niveau	un élève	la matière préférée	qualitatif

Piège : un caractère peut être désigné par un nombre sans être quantitatif. Un numéro de maillot ou un code postal ne se moyenne pas : ce sont des étiquettes, donc des caractères qualitatifs.

EXERCICE 2 ⋆

1. On additionne les effectifs :

$$14 + 16 + 8 + 2 = \boxed{40}$$

2. Chaque fréquence s'obtient en divisant l'effectif par $N = 40$:

$$f_1 = \frac{14}{40} = 0{,}35 \qquad f_2 = \frac{16}{40} = 0{,}4 \qquad f_3 = \frac{8}{40} = 0{,}2 \qquad f_4 = \frac{2}{40} = 0{,}05$$

Nombre x_i	0	1	2	3	**Total**
Effectif n_i	14	16	8	2	40
Fréquence f_i	0,35	0,40	0,20	0,05	1

3. On additionne les fréquences obtenues :

$$0{,}35 + 0{,}40 + 0{,}20 + 0{,}05 = \boxed{1}$$

Le contrôle est satisfait : le tableau ne comporte pas d'erreur.

4. « Au moins deux animaux » correspond aux valeurs 2 et 3 :

$$0{,}20 + 0{,}05 = 0{,}25 = \boxed{25\,\%}$$

EXERCICE 3 ⋆

1. L'effectif total vaut $50 + 70 + 60 + 20 = 200$. On divise chaque effectif par 200 :

$$\frac{50}{200} = \boxed{25\,\%} \qquad \frac{70}{200} = \boxed{35\,\%} \qquad \frac{60}{200} = \boxed{30\,\%} \qquad \frac{20}{200} = \boxed{10\,\%}$$

On constate que la somme vaut bien 100 %.

2. « Au moins un voyage » est le contraire de « aucun voyage » :

$$100 - 25 = \boxed{75\,\%}$$

3. « Au plus deux voyages » correspond aux valeurs 0, 1 et 2 :

$$25 + 35 + 30 = \boxed{90\,\%}$$

On pouvait aussi passer par le contraire : $100 - 10 = 90$.

EXERCICE 4 ⋆⋆

1. On additionne les fréquences :

$$0{,}12 + 0{,}28 + 0{,}36 + 0{,}16 + 0{,}08 = \boxed{1}$$

$$\boxed{\text{Le tableau est cohérent.}}$$

2. On a $f_i = \dfrac{n_i}{N}$, donc $n_i = f_i \times N$ avec $N = 250$:

$$\boxed{\begin{array}{lll} n_1 = 0{,}12 \times 250 = 30 & ; \quad n_2 = 0{,}28 \times 250 = 70 & ; \quad n_3 = 0{,}36 \times 250 = 90 \\ n_4 = 0{,}16 \times 250 = 40 & ; \quad n_5 = 0{,}08 \times 250 = 20 & \end{array}}$$

3. On vérifie que la somme des effectifs redonne l'effectif total :

$$30 + 70 + 90 + 40 + 20 = \boxed{250}$$

EXERCICE 5 ⋆⋆

1. On lit la hauteur de chaque bâton :

Nombre de livres	0	1	2	3	4	5	**Total**
Effectif	2	6	8	5	3	1	25

2. On additionne les six effectifs :

$$2 + 6 + 8 + 5 + 3 + 1 = \boxed{25 \text{ élèves}}$$

3. On divise chaque effectif par 25 :

$$\boxed{\begin{array}{l} f = 0{,}08 \ ; \ 0{,}24 \ ; \ 0{,}32 \ ; \ 0{,}20 \ ; \ 0{,}12 \ ; \ 0{,}04 \\ \text{et la somme vaut bien 1.} \end{array}}$$

4. « Au moins trois livres » correspond aux valeurs 3, 4 et 5 :

$$0{,}20 + 0{,}12 + 0{,}04 = 0{,}36 = \boxed{36\,\%}$$

EXERCICE 6 ⋆⋆

1. On additionne la ligne des fréquences :

$$0{,}15 + 0{,}25 + 0{,}30 + 0{,}25 = \boxed{0{,}95}$$

Cette somme ne vaut pas 1 :

$$\boxed{\text{Le tableau comporte donc une erreur.}}$$

2. On recalcule chaque fréquence à partir de l'effectif, avec $N = 80$:

$$\frac{12}{80} = 0{,}15 \qquad \frac{20}{80} = 0{,}25 \qquad \frac{28}{80} = 0{,}35 \qquad \frac{20}{80} = 0{,}25$$

$$\boxed{\text{L'erreur porte sur la troisième fréquence : il faut lire 0,35 et non 0,30.}}$$

On vérifie alors que $0{,}15 + 0{,}25 + 0{,}35 + 0{,}25 = 1$.

Moyenne

EXERCICE 7 ⋆

On additionne les valeurs, puis on divise par leur nombre.

1. $\overline{x} = \dfrac{4+7+9+12}{4} = \dfrac{32}{4} = \boxed{8}$ **2.** $\overline{x} = \dfrac{3+5+5+8+9}{5} = \dfrac{30}{5} = \boxed{6}$

3. $\overline{x} = \dfrac{12+15+11+14+13+7}{6} = \dfrac{72}{6} = \boxed{12}$ **4.** $\overline{x} = \dfrac{2{,}5+3{,}5+4+6}{4} = \dfrac{16}{4} = \boxed{4}$

EXERCICE 8 ⋆

1. On applique la formule de la moyenne d'une série donnée par un tableau d'effectifs :

$$\overline{x} = \frac{6\times 5 + 14\times 10 + 14\times 15 + 6\times 20}{40} = \frac{30+140+210+120}{40} = \frac{500}{40} = \boxed{12{,}5 \text{ minutes}}$$

Piège : le dénominateur est l'effectif total 40, et non le nombre de valeurs différentes, qui vaut 4.

2. Le numérateur du calcul précédent est précisément la durée totale :

$$\boxed{\text{500 minutes, soit 8 h 20 min}}$$

EXERCICE 9 ⋆

On applique la formule de la moyenne pondérée, dont le dénominateur est la somme des coefficients :

$$\overline{x} = \frac{3\times 14 + 4\times 8 + 2\times 11 + 1\times 16}{3+4+2+1} = \frac{42+32+22+16}{10} = \frac{112}{10} = \boxed{11{,}2}$$

EXERCICE 10 ⋆

1. Sans les coefficients, on fait la moyenne des trois notes :

$$\frac{16+6+12}{3} = \frac{34}{3} \approx \boxed{11{,}33}$$

2. Avec les coefficients :

$$\overline{x} = \frac{1\times 16 + 5\times 6 + 4\times 12}{1+5+4} = \frac{16+30+48}{10} = \frac{94}{10} = \boxed{9{,}4}$$

3. La moyenne pondérée est nettement plus basse que la moyenne simple.

$$\boxed{\text{La plus mauvaise note, 6, porte le plus fort coefficient : elle tire la moyenne vers le bas.}}$$

À l'inverse, le 16 ne compte que pour un dixième du total. C'est exactement ce que traduit la figure du cours, où la largeur de chaque bloc mesure le poids de la note.

EXERCICE 11 ⋆⋆

1. Les trois premières notes apportent $2\times 12 + 3\times 9 + 1\times 14 = 24+27+14 = 65$ points, pour une somme de coefficients de 6. En notant x la note du dernier devoir, de coefficient 4, la somme des coefficients devient $6+4=10$ et la moyenne s'écrit :

$$\frac{65+4x}{10} = 12 \iff 65+4x = 120 \iff 4x = 55 \iff x = \boxed{13{,}75}$$

2. La meilleure note possible est 20 :

$$\overline{x} = \frac{65+4\times 20}{10} = \frac{145}{10} = \boxed{14{,}5}$$

3. La moyenne maximale atteignable est 14,5, qui est inférieure à 15 :

$$\boxed{\text{Non, il ne peut plus atteindre 15 de moyenne.}}$$

EXERCICE 12 ⋆⋆

On utilise la propriété 1 du cours : la moyenne subit la même transformation que les valeurs.

1. On ajoute 1,5 à la moyenne :

$$\overline{x} = 12{,}5 + 1{,}5 = \boxed{14}$$

2. On multiplie la moyenne par 2 :

$$\overline{x} = 12{,}5\times 2 = \boxed{25}$$

3. On applique la transformation à la moyenne :

$$\overline{x} = 3\times 12{,}5 - 5 = 37{,}5 - 5 = \boxed{32{,}5}$$

4. Augmenter de 5 % revient à multiplier par le coefficient multiplicateur 1,05 :

$$\overline{x} = 40\times 1{,}05 = \boxed{42\ €}$$

5. La transformation est de la forme $ax+b$ avec $a = 1{,}8$ et $b = 32$:

$$\overline{x} = 1{,}8\times 20 + 32 = 36 + 32 = \boxed{68 \text{ degrés Fahrenheit}}$$

EXERCICE 13 ⋆⋆

1. La somme des notes d'un groupe s'obtient en multipliant sa moyenne par son effectif :

$$\text{groupe A} : 12 \times 13 = \boxed{156} \qquad \text{groupe B} : 18 \times 8 = \boxed{144}$$

2. On additionne les deux sommes et on divise par l'effectif total $12 + 18 = 30$:

$$\overline{x} = \frac{156 + 144}{30} = \frac{300}{30} = \boxed{10}$$

3. L'élève a calculé $\dfrac{13+8}{2} = 10{,}5$, c'est-à-dire la moyenne des deux moyennes.

$$\boxed{\text{Ce calcul supposerait que les deux groupes ont le même effectif, ce qui est faux ici.}}$$

Le groupe B, plus nombreux, doit peser davantage : c'est une moyenne pondérée par les effectifs, et non une moyenne simple.

EXERCICE 14 ⋆⋆

1. On additionne les cinq salaires et on divise par 5 :

$$\overline{x} = \frac{1\,500 + 1\,600 + 1\,700 + 1\,800 + 2\,000}{5} = \frac{8\,600}{5} = \boxed{1\,720\ €}$$

2. On procède de la même manière avec le nouveau salaire :

$$\overline{x} = \frac{1\,500 + 1\,600 + 1\,700 + 1\,800 + 9\,400}{5} = \frac{16\,000}{5} = \boxed{3\,200\ €}$$

3. Les quatre premiers salariés gagnent tous moins de 3 200 € :

$$\boxed{\text{Quatre employés sur cinq gagnent moins que le salaire moyen.}}$$

$$\boxed{\text{La moyenne décrit donc très mal cette entreprise.}}$$

Une seule valeur extrême a presque doublé la moyenne : c'est le point d'équilibre du cours qui se déplace fortement dès qu'un poids s'éloigne. On reprend cette série à l'exercice 19 pour voir comment se comporte la médiane.

Médiane

EXERCICE 15 ⋆

1. La série 3 ; 7 ; 8 ; 11 ; 14 est déjà rangée et comporte $N = 5$ valeurs. Comme N est impair, la médiane est la valeur de rang $\dfrac{5+1}{2} = 3$:

$$M = \boxed{8}$$

2. Ici $N = 4$ est pair : la médiane est la demi-somme des deuxième et troisième valeurs :

$$M = \frac{5+6}{2} = \boxed{5{,}5}$$

3. On commence par ranger la série : 4 ; 6 ; 7 ; 9 ; 12 ; 15. Avec $N = 6$:

$$M = \frac{7+9}{2} = \boxed{8}$$

Piège : on ne peut pas déterminer une médiane sans avoir rangé la série. En prenant les valeurs dans l'ordre de l'énoncé, on aurait trouvé $\frac{9+7}{2} = 8$ par hasard, mais le raisonnement aurait été faux.

4. Avec $N = 7$, impair, la médiane est la valeur de rang $\dfrac{7+1}{2} = 4$:

$$M = \boxed{15}$$

EXERCICE 16 ⋆

1. On additionne les effectifs :

$$4 + 9 + 11 + 5 + 1 = \boxed{30}$$

2. L'effectif $N = 30$ est pair : les deux valeurs centrales sont celles de rangs 15 et 16.

$$\boxed{\text{Il s'agit des rangs 15 et 16.}}$$

3. On construit la ligne des effectifs cumulés :

Nombre de langues	0	1	2	3	4
Effectif	4	9	11	5	1
Effectif cumulé	4	13	24	29	30

Les rangs 1 à 13 correspondent à des valeurs inférieures ou égales à 1, et les rangs 14 à 24 à la valeur 2. Les rangs 15 et 16 valent donc tous deux 2 :

$$M = \frac{2+2}{2} = \boxed{2 \text{ langues}}$$

4. On applique la formule de la moyenne :

$$\overline{x} = \frac{4\times 0 + 9\times 1 + 11\times 2 + 5\times 3 + 1\times 4}{30} = \frac{0+9+22+15+4}{30} = \frac{50}{30} \approx \boxed{1{,}67 \text{ langue}}$$

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. On additionne les huit salaires :

$$\overline{x} = \frac{1\,400 + 1\,450 + 1\,500 + 1\,500 + 1\,600 + 1\,650 + 1\,800 + 7\,100}{8} = \frac{18\,000}{8} = \boxed{2\,250 \text{ €}}$$

2. L'effectif $N = 8$ est pair : la médiane est la demi-somme des quatrième et cinquième valeurs :

$$M = \frac{1\,500 + 1\,600}{2} = \boxed{1\,550 \text{ €}}$$

3. Les deux chiffres sont exacts, mais ne servent pas le même propos :

> Le directeur annonce 2 250 €, chiffre flatteur qui rend l'offre attractive.
> Le syndicat annonce 1 550 €, chiffre qui décrit la situation réelle des salariés.

Les deux nombres sont exacts : c'est le choix de l'indicateur qui oriente le message.

4. Sept salariés sur huit gagnent moins de 2 250 €. Le très haut salaire de 7 100 €, isolé, déplace fortement la moyenne mais laisse la médiane inchangée.

$$\boxed{\text{La médiane décrit bien mieux la situation des salariés.}}$$

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. Il faut cinq entiers dont la troisième valeur, une fois rangés, vaut 12, et dont la somme vaut $5 \times 14 = 70$. Par exemple :

$$\boxed{8\ ;\ 10\ ;\ 12\ ;\ 15\ ;\ 25}$$

On vérifie : la médiane est bien la troisième valeur, 12, et $\dfrac{8+10+12+15+25}{5} = \dfrac{70}{5} = 14$.

D'autres réponses conviennent, par exemple 9 ; 11 ; 12 ; 13 ; 25.

2. Avec $N = 6$, la médiane est la demi-somme des troisième et quatrième valeurs : il suffit que ces deux-là soient symétriques autour de 10 sans valoir 10. Par exemple :

$$\boxed{8\ ;\ 9\ ;\ 9\ ;\ 11\ ;\ 12\ ;\ 15}$$

On vérifie : $M = \dfrac{9+11}{2} = 10$, et aucune valeur de la série ne vaut 10.

3. Par définition, au moins la moitié des données sont supérieures ou égales à la médiane. Si M était strictement supérieure à toutes les valeurs, aucune donnée ne lui serait supérieure ou égale.

$$\boxed{\text{Non, c'est impossible : la médiane est toujours comprise entre le minimum et le maximum.}}$$

EXERCICE 19 ⋆⋆

1. La série 1 500 ; 1 600 ; 1 700 ; 1 800 ; 2 000 est rangée et $N = 5$ est impair : la médiane est la valeur de rang 3.

$$M = \boxed{1\,700\ €}$$

2. La nouvelle série est 1 500 ; 1 600 ; 1 700 ; 1 800 ; 9 400, toujours rangée, et la valeur de rang 3 n'a pas changé.

$$M = \boxed{1\,700\ €}$$

3. On rassemble les résultats de l'exercice 14 et de celui-ci :

	avant	**après**
Moyenne	1 720 €	3 200 €
Médiane	1 700 €	1 700 €

$$\boxed{\text{La médiane est insensible aux valeurs extrêmes, contrairement à la moyenne.}}$$

Seul le *rang* des valeurs intervient dans le calcul de la médiane : que la plus grande vaille 2 000 ou 9 400 ne change rien, tant qu'elle reste la plus grande.

INDICATEURS DE DISPERSION

EXERCICE 20 ⋆

L'étendue est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur.

1. $21 - 4 = \boxed{17}$ **2.** $12 - (-3) = \boxed{15}$

3. $8{,}1 - 2{,}5 = \boxed{5{,}6}$ **4.** $8 - 8 = \boxed{0}$

Une étendue nulle signifie que toutes les valeurs de la série sont égales.

EXERCICE 21 ⋆

1. La série comporte $N = 12$ valeurs :

$$\frac{N}{4} = \frac{12}{4} = \boxed{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{3N}{4} = \frac{36}{4} = \boxed{9}$$

2. Ces deux résultats étant entiers, Q_1 est la valeur de rang 3 et Q_3 celle de rang 9 :

$$Q_1 = \boxed{6} \qquad \text{et} \qquad Q_3 = \boxed{13}$$

3. L'effectif $N = 12$ est pair : la médiane est la demi-somme des sixième et septième valeurs :

$$M = \frac{9+11}{2} = \boxed{10}$$

4. On calcule les deux différences :

$$\text{étendue} = 20 - 3 = \boxed{17} \qquad \text{et} \qquad Q_3 - Q_1 = 13 - 6 = \boxed{7}$$

EXERCICE 22 ⋆

1. La série comporte $N = 10$ valeurs, déjà rangées.

$\frac{N}{4} = 2{,}5$ n'est pas entier : on arrondit à 3, donc Q_1 est la troisième valeur.

$\frac{3N}{4} = 7{,}5$ n'est pas entier : on arrondit à 8, donc Q_3 est la huitième valeur.

$$\boxed{\begin{array}{l} M = \dfrac{8+10}{2} = 9 \quad ; \quad Q_1 = 5 \quad ; \quad Q_3 = 13 \\ \text{étendue} = 18 - 2 = 16 \quad ; \quad Q_3 - Q_1 = 8 \end{array}}$$

2. La série comporte $N = 9$ valeurs.

$$\frac{N}{4} = 2{,}25 \longrightarrow \text{rang } 3 \qquad \text{et} \qquad \frac{3N}{4} = 6{,}75 \longrightarrow \text{rang } 7$$

L'effectif étant impair, la médiane est la valeur de rang $\dfrac{9+1}{2} = 5$.

$$\boxed{\begin{array}{l} M = 7 \quad ; \quad Q_1 = 4 \quad ; \quad Q_3 = 10 \\ \text{étendue} = 14 - 1 = 13 \quad ; \quad Q_3 - Q_1 = 6 \end{array}}$$

Piège : l'arrondi se fait toujours *à l'entier supérieur*, même lorsque la partie décimale vaut 0,25. On ne procède pas à un arrondi au plus proche.

EXERCICE 23 ⋆⋆

On construit d'abord la ligne des effectifs cumulés, qui servira à toutes les questions :

Nombre de livres	0	1	2	3	4	5
Effectif	2	6	8	5	3	1
Effectif cumulé	2	8	16	21	24	25

1. L'effectif total vaut $N = 25$, nombre impair : la médiane est la valeur de rang $\dfrac{25+1}{2} = 13$. Comme $8 < 13 \leqslant 16$, cette valeur est 2 :

$$M = \boxed{2 \text{ livres}}$$

2. On calcule les deux rangs :

$$\frac{N}{4} = 6{,}25 \longrightarrow \text{rang } 7 \qquad \text{et} \qquad \frac{3N}{4} = 18{,}75 \longrightarrow \text{rang } 19$$

Comme $2 < 7 \leqslant 8$, la septième valeur est 1 ; comme $16 < 19 \leqslant 21$, la dix-neuvième est 3 :

$$Q_1 = \boxed{1} \qquad \text{et} \qquad Q_3 = \boxed{3}$$

3. On calcule les deux différences :

$$\text{étendue} = 5 - 0 = \boxed{5} \qquad \text{et} \qquad Q_3 - Q_1 = 3 - 1 = \boxed{2}$$

4. On applique la formule de la moyenne :

$$\overline{x} = \frac{2\times 0 + 6\times 1 + 8\times 2 + 5\times 3 + 3\times 4 + 1\times 5}{25} = \frac{0+6+16+15+12+5}{25} = \frac{54}{25} = \boxed{2{,}16}$$

$$\boxed{\text{La moyenne 2,16 est légèrement supérieure à la médiane 2.}}$$

La série est en effet un peu étirée vers la droite : les quelques élèves ayant lu 4 ou 5 livres tirent la moyenne vers le haut, sans déplacer la médiane.

EXERCICE 24 ⋆⋆

Dans les quatre cas, on commence par la ligne des effectifs cumulés : c'est elle qui permet de retrouver la valeur d'un rang donné.

a. Effectif total $N = 2 + 5 + 6 + 4 + 3 = 20$.

Nombre d'activités	1	2	3	4	5
Effectif	2	5	6	4	3
Effectif cumulé	2	7	13	17	20

$$\overline{x} = \frac{2\times 1 + 5\times 2 + 6\times 3 + 4\times 4 + 3\times 5}{20} = \frac{2+10+18+16+15}{20} = \frac{61}{20} = \boxed{3{,}05}$$

L'effectif $N = 20$ est pair : la médiane est la demi-somme des valeurs de rangs 10 et 11, toutes deux égales à 3 puisque $7 < 10 \leqslant 13$ et $7 < 11 \leqslant 13$. Par ailleurs $\dfrac{N}{4} = 5$ et $\dfrac{3N}{4} = 15$ sont entiers.

$$\boxed{\begin{array}{l} M = 3 \quad ; \quad Q_1 = 2 \text{ (rang 5)} \quad ; \quad Q_3 = 4 \text{ (rang 15)} \\ \text{étendue} = 5 - 1 = 4 \quad ; \quad Q_3 - Q_1 = 2 \end{array}}$$

b. Effectif total $N = 3 + 5 + 8 + 5 + 3 = 24$.

Nombre de fautes	0	1	2	3	4
Effectif	3	5	8	5	3
Effectif cumulé	3	8	16	21	24

$$\overline{x} = \frac{3\times 0 + 5\times 1 + 8\times 2 + 5\times 3 + 3\times 4}{24} = \frac{0+5+16+15+12}{24} = \frac{48}{24} = \boxed{2}$$

La médiane est la demi-somme des valeurs de rangs 12 et 13, toutes deux égales à 2. Ici $\dfrac{N}{4} = 6$ et $\dfrac{3N}{4} = 18$ sont entiers.

$$\boxed{\begin{array}{l} M = 2 \quad ; \quad Q_1 = 1 \text{ (rang 6)} \quad ; \quad Q_3 = 3 \text{ (rang 18)} \\ \text{étendue} = 4 - 0 = 4 \quad ; \quad Q_3 - Q_1 = 2 \end{array}}$$

c. Effectif total $N = 20 + 30 + 50 + 30 + 20 = 150$.

Nombre de personnes	1	2	3	4	5
Effectif	20	30	50	30	20
Effectif cumulé	20	50	100	130	150

$$\overline{x} = \frac{20\times 1 + 30\times 2 + 50\times 3 + 30\times 4 + 20\times 5}{150} = \frac{20+60+150+120+100}{150} = \frac{450}{150} = \boxed{3}$$

L'effectif $N = 150$ est pair : la médiane est la demi-somme des valeurs de rangs 75 et 76. Comme $50 < 75 \leqslant 100$ et $50 < 76 \leqslant 100$, ces deux valeurs sont égales à 3.

$$\frac{N}{4} = 37{,}5 \longrightarrow \text{ rang } 38 \qquad \text{et} \qquad \frac{3N}{4} = 112{,}5 \longrightarrow \text{ rang } 113$$

Comme $20 < 38 \leqslant 50$, la trente-huitième valeur est 2 ; comme $100 < 113 \leqslant 130$, la cent-treizième est 4.

$$\boxed{\begin{array}{l} M = 3 \quad ; \quad Q_1 = 2 \quad ; \quad Q_3 = 4 \\ \text{étendue} = 5 - 1 = 4 \quad ; \quad Q_3 - Q_1 = 2 \end{array}}$$

d. Effectif total $N = 13 + 22 + 28 + 27 + 24 + 12 = 126$.

Nombre de réclamations	0	1	2	3	4	5
Effectif	13	22	28	27	24	12
Effectif cumulé	13	35	63	90	114	126

$$\overline{x} = \frac{0+22+56+81+96+60}{126} = \frac{315}{126} = \boxed{2{,}5}$$

L'effectif $N = 126$ est pair : la médiane est la demi-somme des valeurs de rangs 63 et 64. Or l'effectif cumulé atteint exactement 63 à la valeur 2 : la soixante-troisième valeur est donc 2, et la soixante-quatrième est 3.

$$M = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$$

Piège : la médiane n'est ici égale à aucune des valeurs du tableau. C'est normal : lorsque l'effectif est pair, elle est une demi-somme, et rien n'impose que les deux valeurs centrales coïncident.

$$\frac{N}{4} = 31{,}5 \longrightarrow \text{rang } 32 \qquad \text{et} \qquad \frac{3N}{4} = 94{,}5 \longrightarrow \text{rang } 95$$

Comme $13 < 32 \leqslant 35$, la trente-deuxième valeur est 1 ; comme $90 < 95 \leqslant 114$, la quatre-vingt-quinzième est 4.

$$\boxed{\begin{array}{l} M = 2{,}5 \quad ; \quad Q_1 = 1 \quad ; \quad Q_3 = 4 \\ \text{étendue} = 5 - 0 = 5 \quad ; \quad Q_3 - Q_1 = 3 \end{array}}$$

EXERCICE 25 ⋆⋆

1. Les deux séries comportent $N = 6$ valeurs.

$$\text{Série A} : \overline{x} = \frac{8+9+10+10+11+12}{6} = \frac{60}{6} = \boxed{10}$$

$$\text{Série B} : \overline{x} = \frac{2+5+9+11+15+18}{6} = \frac{60}{6} = \boxed{10}$$

Les deux séries ont exactement la même moyenne.

2. L'effectif 6 est pair : la médiane est la demi-somme des troisième et quatrième valeurs.

$$\text{Série A} : M = \frac{10+10}{2} = 10 \qquad ; \qquad \text{Série B} : M = \frac{9+11}{2} = 10$$

Elles ont aussi la même médiane.

3. Ici $\frac{N}{4} = 1{,}5$ donne le rang 2, et $\frac{3N}{4} = 4{,}5$ donne le rang 5.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Série A} : Q_1 = 9 \ ; \ Q_3 = 11 \ ; \ \text{étendue} = 4 \ ; \ Q_3 - Q_1 = 2 \\ \text{Série B} : Q_1 = 5 \ ; \ Q_3 = 15 \ ; \ \text{étendue} = 16 \ ; \ Q_3 - Q_1 = 10 \end{array}}$$

4. Les valeurs de la série A sont toutes proches de 10, celles de la série B sont très étalées, de 2 à 18.

Non : deux séries de mêmes moyenne et médiane peuvent être très différentes.

Les indicateurs de position ne suffisent donc jamais à décrire une série.

EXERCICE 26 ⋆⋆

1. L'écart interquartile est la différence des deux quartiles :

$$Q_3 - Q_1 = 27 - 12 = \boxed{15 \text{ minutes}}$$

La moitié centrale des voyageurs a attendu entre 12 et 27 minutes.

2. Par définition, au moins 25 % des données sont inférieures ou égales à Q_1 :

$$0{,}25 \times 200 = \boxed{50 \text{ voyageurs au moins}}$$

3. Par définition, au moins la moitié des données sont supérieures ou égales à la médiane :

$$0{,}50 \times 200 = \boxed{100 \text{ voyageurs au moins}}$$

4. Les quartiles et la médiane ne renseignent que sur des *rangs*, pas sur les valeurs extrêmes.

Non : il faudrait connaître le maximum, qui ne se déduit pas de ces trois nombres.

C'est précisément pour cela que le diagramme en boîte affiche *cinq* nombres et non trois.

Diagramme en boîte

EXERCICE 27 ⋆

1. Les extrémités des moustaches donnent le minimum et le maximum, les bords de la boîte donnent les quartiles, et le trait intérieur la médiane :

$$\boxed{\text{min} = 3 \quad ; \quad Q_1 = 7 \quad ; \quad M = 10 \quad ; \quad Q_3 = 15 \quad ; \quad \text{max} = 19}$$

2. On calcule les deux différences :

$$\text{étendue} = 19 - 3 = \boxed{16} \qquad \text{et} \qquad Q_3 - Q_1 = 15 - 7 = \boxed{8}$$

3. L'intervalle $[7\,;15]$ est exactement la boîte, qui contient la moitié centrale des données :

$$\boxed{50\,\% \text{ des élèves}}$$

4. Le diagramme ne représente que cinq nombres, tous exprimés en notes.

$$\boxed{\text{Non : l'effectif de la classe ne se lit pas sur un diagramme en boîte.}}$$

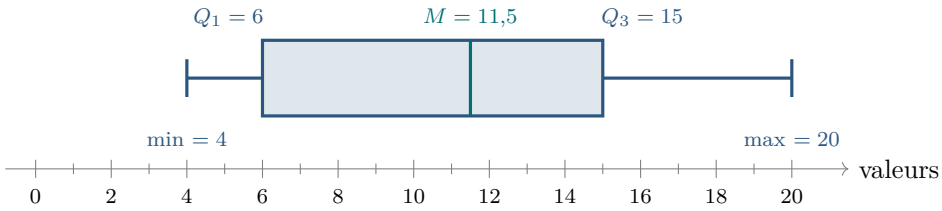
EXERCICE 28 ⋆

1. La série est déjà rangée et comporte $N = 12$ valeurs. Comme $\dfrac{N}{4} = 3$ et $\dfrac{3N}{4} = 9$ sont entiers, Q_1 est la troisième valeur et Q_3 la neuvième. L'effectif étant pair, la médiane est la demi-somme des sixième et septième valeurs :

$$M = \frac{11 + 12}{2} = 11{,}5$$

$$\boxed{\text{min} = 4 \quad ; \quad Q_1 = 6 \quad ; \quad M = 11{,}5 \quad ; \quad Q_3 = 15 \quad ; \quad \text{max} = 20}$$

2. On place ces cinq nombres sur un axe gradué de 0 à 20, à raison de 1 cm pour 2 unités :



EXERCICE 29 ⋆⋆

1. On lit les cinq nombres sur chaque diagramme :

	min	Q_1	**médiane**	Q_3	**max**
Club A	2	5	8	10	14
Club B	6	7	8	9	11

2. Le trait intérieur des deux boîtes se situe au même endroit :

Les deux clubs ont la même médiane : 8 heures.

3. On calcule les deux indicateurs pour chaque club :

Club A : $Q_3 - Q_1 = 10 - 5 = 5$; étendue $= 14 - 2 = 12$

Club B : $Q_3 - Q_1 = 9 - 7 = 2$; étendue $= 11 - 6 = 5$

4. Les deux indicateurs de dispersion sont plus petits pour le club B.

Les durées sont plus régulières au club B, dont la boîte et les moustaches sont plus courtes.

Au club A, on trouve à la fois des adhérents qui s'entraînent 2 heures et d'autres 14 heures : le club est très hétérogène, bien que sa médiane soit la même.

5. Le maximum du club B vaut 11 heures, alors que celui du club A vaut 14 heures.

Cet adhérent n'appartient certainement pas au club B.

EXERCICE 30 ⋆⋆

On utilise le fait que, pour toute série, les cinq nombres du résumé sont rangés dans l'ordre :

$$\min \leqslant Q_1 \leqslant M \leqslant Q_3 \leqslant \max$$

1. On aurait $Q_1 = 9$ et $M = 7$, donc $M < Q_1$.

Impossible : la médiane ne peut pas être inférieure au premier quartile.

2. Les cinq nombres $5 \leqslant 5 \leqslant 8 \leqslant 12 \leqslant 12$ sont bien rangés.

Possible.

Rien n'interdit à Q_1 d'être égal au minimum : il suffit qu'au moins un quart des données valent 5. La série $5\,;5\,;8\,;12\,;12$ convient, par exemple.

3. L'écart interquartile $Q_3 - Q_1$ est une différence entre deux valeurs comprises entre le minimum et le maximum : il ne peut donc pas dépasser l'étendue.

Impossible : on a toujours $Q_3 - Q_1 \leqslant$ étendue.

4. Les cinq nombres $0 \leqslant 3 \leqslant 3 \leqslant 3 \leqslant 20$ sont bien rangés.

Possible.

Le diagramme aurait alors une boîte réduite à un simple trait et deux très longues moustaches : c'est le cas d'une série dont la grande majorité des valeurs vaut 3, avec quelques valeurs extrêmes isolées.

Exercices de synthèse

EXERCICE 31 : QCM

Question	Réponse	Justification
1.	**b**	$\dfrac{4+6+7+9+14}{5} = \dfrac{40}{5} = 8$.
2.	**b**	La série est rangée et $N = 5$ est impair : M est la valeur de rang 3, soit 7.
3.	**a**	$\dfrac{3\times 10 + 1\times 16}{3+1} = \dfrac{46}{4} = 11{,}5$.
4.	**a**	D'après la propriété 1, la moyenne subit la même transformation : $15 - 3 = 12$.
5.	**b**	La somme des fréquences vaut toujours 1, c'est-à-dire 100 %.
6.	**b**	$\dfrac{N}{4} = \dfrac{20}{4} = 5$ est entier : Q_1 est la valeur de rang 5.
7.	**c**	$\dfrac{3N}{4} = \dfrac{42}{4} = 10{,}5$ n'est pas entier : on arrondit à 11.
8.	**a**	$Q_3 - Q_1 = 17 - 8 = 9$.
9.	**b**	La boîte s'étend de Q_1 à Q_3 : elle contient la moitié centrale des données.
10.	**c**	La médiane ne dépend que des rangs (voir l'exercice 19).

Piège de la question 7 : la réponse **b** est le résultat du calcul $\dfrac{3N}{4}$, et non un rang. Un rang est toujours un nombre entier.

EXERCICE 32 : VRAI OU FAUX

1. **Vraie** C'est la définition même de l'effectif total : chaque individu est compté dans exactement une valeur.

2. **Fausse** Lorsque N est pair, la médiane est une demi-somme, qui peut ne correspondre à aucune donnée. La série 8 ; 9 ; 9 ; 11 ; 12 ; 15 de l'exercice 18 a pour médiane 10, valeur absente de la série.

3. **Vraie** Ajouter 5 à toutes les valeurs ne change pas leur ordre : la ou les valeurs centrales restent les mêmes, augmentées de 5.

4. **Vraie** Ces trois nombres découpent la série rangée en quatre parts successives : ils apparaissent donc dans cet ordre (voir l'exercice 30).

5. **Fausse** Comme Q_1 et Q_3 sont compris entre le minimum et le maximum, leur différence ne peut pas dépasser l'étendue.

6. **Vraie** La moyenne est le point d'équilibre de la série : elle ne peut pas se trouver en dehors des valeurs sur lesquelles la règle est posée.

7. **Fausse** Les deux séries de l'exercice 25 ont la même moyenne 10 ; elles ont ici la même médiane, mais rien ne l'imposait. Ainsi 4 ; 10 ; 16 et 9 ; 10 ; 11 ont la même moyenne, et 1 ; 2 ; 12 a pour moyenne 5 et pour médiane 2.

8. **Fausse** Le dénominateur est la *somme des coefficients*, pas le nombre de notes. C'est l'erreur travaillée à l'exercice 10.

9. **Vraie** Une couleur ne se mesure pas par un nombre.

10. **Vraie** C'est la définition du diagramme en boîte : les moustaches rejoignent le minimum et le maximum.

EXERCICE 33 ⋆⋆⋆

Partie A

1. On additionne les vingt temps de trajet :

$$\overline{x} = \frac{420}{20} = \boxed{21 \text{ minutes}}$$

2. L'effectif $N = 20$ est pair : la médiane est la demi-somme des dixième et onzième valeurs, soit 18 et 20 :

$$M = \frac{18+20}{2} = \boxed{19 \text{ minutes}}$$

3. On calcule les deux rangs :

$$\frac{N}{4} = \frac{20}{4} = 5 \qquad \text{et} \qquad \frac{3N}{4} = \frac{60}{4} = 15$$

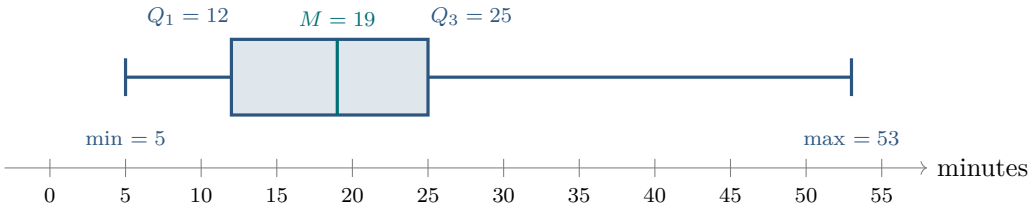
Ces deux résultats étant entiers, Q_1 est la cinquième valeur et Q_3 la quinzième :

$$Q_1 = \boxed{12 \text{ minutes}} \qquad \text{et} \qquad Q_3 = \boxed{25 \text{ minutes}}$$

4. On calcule les deux différences :

$$\text{étendue} = 53 - 5 = \boxed{48 \text{ minutes}} \qquad \text{et} \qquad Q_3 - Q_1 = 25 - 12 = \boxed{13 \text{ minutes}}$$

5. On place les cinq nombres 5, 12, 19, 25 et 53 sur un axe gradué de 0 à 55 :



Partie B

1. La somme des dix-neuf temps restants vaut $420 - 53 = 367$:

$$\overline{x} = \frac{367}{19} \approx \boxed{19{,}3 \text{ minutes}}$$

2. L'effectif $N = 19$ est impair : la médiane est la valeur de rang $\dfrac{19+1}{2} = 10$, soit 18 :

$$M = \boxed{18 \text{ minutes}}$$

3. On recalcule les rangs :

$$\frac{N}{4} = 4{,}75 \longrightarrow \text{rang } 5 \qquad \text{et} \qquad \frac{3N}{4} = 14{,}25 \longrightarrow \text{rang } 15$$

Les cinquième et quinzième valeurs de la nouvelle série sont les mêmes qu'avant, le départ n'ayant retiré que la dernière :

$$Q_1 = \boxed{12 \text{ minutes}} \qquad \text{et} \qquad Q_3 = \boxed{25 \text{ minutes}}$$

4. On compare les quatre indicateurs :

	moyenne	**médiane**	Q_1	Q_3
20 **élèves**	21	19	12	25
19 **élèves**	19,3	18	12	25

La moyenne a le plus varié : elle perd 1,7 minute.
Les quartiles n'ont pas bougé du tout.

La valeur 53 intervenait dans la somme, donc dans la moyenne ; elle n'intervenait dans les quartiles que par son rang, le dernier, et son retrait ne modifie donc pas les rangs 5 et 15.

Partie C

1. La moyenne 21 minutes est exacte, mais quatorze élèves sur vingt mettent moins de temps que cela : elle est gonflée par le seul élève qui met 53 minutes.

La moyenne est tirée vers le haut par une valeur extrême et ne décrit presque personne.

De plus, une moyenne seule ne dit rien de l'étalement, alors qu'il va ici de 5 à 53 minutes.

2. On respecte le conseil du cours en donnant *au moins* un indicateur de position et un de dispersion. Par exemple :

La moitié des élèves mettent moins de 19 minutes pour venir au lycée, et la moitié centrale de la classe met entre 12 et 25 minutes ; un élève met toutefois près d'une heure.

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

Partie A

1. On additionne les seize temps d'attente :

$$\overline{x} = \frac{1+2+2+3+3+4+4+5+5+6+6+7+8+10+12+18}{16} = \frac{96}{16} = \boxed{6 \text{ minutes}}$$

2. L'effectif $N = 16$ est pair : la médiane est la demi-somme des huitième et neuvième valeurs, toutes deux égales à 5. Par ailleurs $\frac{N}{4} = 4$ et $\frac{3N}{4} = 12$ sont entiers :

$$M = \boxed{5 \text{ minutes}} \qquad Q_1 = \boxed{3 \text{ minutes}} \qquad Q_3 = \boxed{7 \text{ minutes}}$$

3. On calcule les deux différences :

$$\text{étendue} = 18 - 1 = \boxed{17 \text{ minutes}} \qquad \text{et} \qquad Q_3 - Q_1 = 7 - 3 = \boxed{4 \text{ minutes}}$$

Partie B

1. On lit le minimum, le maximum et les quartiles dans le tableau :

$$\text{étendue} = 9 - 4 = \boxed{5 \text{ minutes}} \qquad \text{et} \qquad Q_3 - Q_1 = 7 - 5 = \boxed{2 \text{ minutes}}$$

2. On compare d'abord les deux indicateurs de position :

Les deux magasins ont la même moyenne : 6 minutes.
Les médianes diffèrent : 5 minutes pour A, 6 minutes pour B.

3. On rassemble les indicateurs de dispersion :

	minimum	**maximum**	**étendue**	**écart interquartile**
Magasin A	1	18	17	4
Magasin B	4	9	5	2

Le magasin B est bien plus régulier : ses deux indicateurs de dispersion sont plus petits.

Au magasin A, un client peut être servi en 1 minute comme attendre 18 minutes.

Partie C

1. Les deux moyennes valent effectivement 6 minutes.

L'affirmation est exacte, mais elle n'est pas honnête : elle passe sous silence la dispersion, très différente d'un magasin à l'autre.

C'est exactement le procédé dénoncé à la fin du cours : annoncer une moyenne sans rien dire de l'étalement, c'est ne livrer que la moitié de l'information.

2. Au magasin A, on a $Q_1 = 3$: au moins un quart des clients attendent 3 minutes ou moins, donc moins de 4 minutes. Au magasin B, le minimum vaut 4 minutes : aucun client n'attend moins de 4 minutes.

C'est au magasin A, où le premier quartile vaut 3 minutes.

3. Les deux réponses sont recevables, à condition d'être argumentées.

Magasin B : l'attente y est prévisible, entre 4 et 9 minutes, pour une même moyenne de 6 minutes et un écart interquartile de 2 minutes seulement.

Magasin A : la médiane y est plus basse (5 contre 6), et un quart des clients y attendent 3 minutes ou moins — au prix d'un risque d'attente longue.

On retiendra surtout que trancher exige d'utiliser *deux* indicateurs : la position ne suffit pas, la dispersion non plus.